한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 127 - 142

케일리 공식의 네 가지 증명

강원대학교 서승현
shyunseo@gmail.com
경인교육대학교 권석일
steinein@dreamwiz.com
건국대학교 홍진곤
dion@konkuk.ac.kr

수학의 역사에서는 이미 발견되어 논증된 정리를 새로운 방법으로 공략함으로써 그 정리의 깊은 의미를 드러내는 작업의 기록을 쉽게 찾을 수 있다. 이 연구는 직관적으로 비교적 이해하기 쉬운 소재인 수형도를 대상으로 하여, 꼭지점의 집합이 결정되었을 때 수형도의 개수를 결정하여 주는 케일리 공식(Cayley formula)의 증명에 대한 서로 다른 네 가지 접근방법을 소개하는 것을 목적으로 한다. 네 가지 증명은 수형도의 성질로부터 유도된 재귀적 관계식을 이용한 케일리의 증명에서부터 특정한 수학적 대상과 수형도 사이의 일대일대응 관계에 주목하는 나머지 세 가지 증명으로 이루어진다. 특히, 마지막 증명은 순수한 수학적 작업이 다른 분야에 강력한 도구를 제공하는 전형적인 예를 보여준다.

주제어 : 케일리 공식, 수형도, 그래프 이론, 이산수학, 조합론, 이론전산학

0. 머리말

이 연구는 케일리 공식(Cayley formula)의 증명에 대한 서로 다른 네 가지 접근 방법을 소개하는 것을 목적으로 한다. 이 연구의 결과는 이미 발견된 수학적 진리가 새로운 접근 방법을 통하여 그 폭과 깊이가 심화되는 수학 고유의 과정을 잘 보여준다.

수학의 역사 속에는 새로운 영역의 선구자가 되기 위한 치열한 경쟁의 기록도 많이 남아있지만, 이미 발견되어 논증된 정리를 새로운 방법으로 공략함으로써 그 정리의 깊은 의미를 드러내는 작업의 기록 역시 쉽게 찾을 수 있다. 가우스가 '대수학의 기본 정리'에 깊이 매료되어 다섯 번이나 새로이 증명하였다는 일화([22, p. 173])에서 알 수 있듯이 알려져 있는 수학적 진리 중에는 새롭게 음미되는 과정에서 정리 자체의 아름다움이 더해지는 경우가 많다. 수학사에서, 발견된 정리에 새로운 내용을 엮고 그 결을 새로이 하는 일을 쉬이 볼 수 있는 이유 중 하나는 수학자가 아름다운 증명을

탐닉하는 특징을 가지고 있기 때문이다. 수학자들의 이런 성향을 잘 드러내는 또 하나의 예로서 유클리드의 시대에 이미 증명된 바 있는 "소수가 무한히 많다"는 정리에 대한 증명을 들 수 있다. 소수에 대한 수학자들의 사랑은 이미 정평이 나있는 것으로 수학자들은 이 정리에 대하여서도 여러 차례에 걸쳐 새로운 증명을 시도한 바 있다. 하늘의 책THE BOOK[1]에 있을 법한 증명을 정리하여 모아놓는 것을 목적으로 하는 Martin Aigner와 Günter M. Ziegler의 <Proofs from THE BOOK>의 제1부 제1장은 바로 이 정리에 대한 서로 다른 6가지 증명으로 이루어져 있다([5]).

이 연구에서는 꼭지점의 집합이 결정되었을 때 수형도의 개수를 결정하여 주는 케일리 공식(Cayley formula)에 대하여 그 최초의 증명에서부터 최근까지의 증명 중 서로 다른 접근 방법을 택하고 있는 네 가지 증명 아이디어를 소개하고자 한다. 수형도는 조합수학, 이론전산학, 생물정보학 분야에서 다루어지는 주요한 연구대상([21], [13], [11])인 동시에 현 수학과교육과정 중 <이산수학>의 주요한 내용이다([1]). 수형도는 "회로를 갖지 않는 연결된 그래프"([2, p. 66])[2]로서 직관적으로 쉽게 이해할 수 있는 소재인 동시에 수학적으로도 깊이와 폭을 가지고 있는 주제이다. 본 연구에서 다루고 있는 케일리의 공식은 현 수학과 교육과정에서 주요한 학습 내용으로 다루어지고 있지는 않으나 네 개의 꼭지점을 가지는 경우에 대해서는 가능한 모든 수형도를 찾는 문제가([2, p. 76]) 다루어지고 있다.

이와 같이 친숙하면서도 수학적으로 여러 가지 의미를 가지고 있는 수형도를 소재로, 그 개수에 대한 케일리의 공식에 대하여 다항계수 사이의 재귀적 관계식과 수형도의 개수 사이의 재귀적 관계식의 유사성을 이용한 케일리의 증명에서부터 특정한 수학적 대상과 수형도 사이의 일대일대응 관계에 주목하는 방법을 사용하는 나머지 세 가지 증명 아이디어를 차례로 살펴보는 것은 새로운 증명을 덧씌움으로써 깊이를 더해가는 수학 고유의 방법론을 드러내는 좋은 예가 될 것으로 보인다.

이를 위하여 우선 제1장에서는 수형도와 관련된 용어를 정의하고 수형도의 기본적인 성질을 기술하여 이를 바탕으로 케일리 공식을 소개한다. 이어서 제2장에서는 케일리 공식에 대한 케일리의 증명에서부터 가장 최근에 이루어진 증명까지 모두 4가지의 서로 다른 증명방법에 대하여 그 기본적인 아이디어를 소개하면서 각각의 증명의 특징과 의의에 대하여 설명한다. 마지막으로 제3장에서 이상의 연구결과를 종합적으로 정리한다.

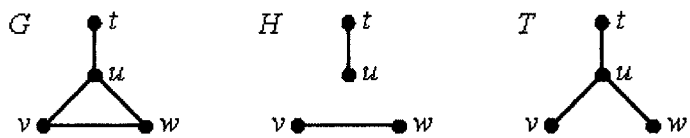
1) 에어디쉬(P. Erdős)는 오묘한 수학적인 사실들은 이미 존재하던 하느님의 법칙이 이제 우리에게 드러난 것이라고 생각하여 멋진 증명을 보면 하느님의 "그 책(THE BOOK)" 에 있는 바로 그것이라며 좋아하였다([10]).

2) 보다 엄밀한 정의는 다음 장에서 다룬다.

1. 케일리 공식

이 장에서는 케일리 공식을 소개하고자 한다. 케일리 공식은 수형도라는 특수한 그래프의 개수에 대한 공식이다. 그러므로 케일리 공식을 이해하기 위해서는 우선 그래프 이론에 나오는 몇 가지 용어와 수형도의 기본 성질을 알 필요가 있다. 특별히 '그래프', '인접(하다)', '근접(하다)', '차수', '(단순)경로', '회로', '연결그래프', '연결성분', '부분그래프', '수형도'를 차례로 설명하고 수형도의 기본 성질 4가지를 증명 없이 소개하고자 한다. 용어의 정의와 기본 성질에 대한 진술은 수학적으로 엄밀한 형태를 취하기보다는 읽고 이해하기 쉬운 형태를 택하였다.

전술한 바와 같이 수형도는 그래프의 특수한 형태이다. 그래프 G는 유한개의 꼭지점의 집합 V(또는 $V(G)$)와 두 꼭지점을 연결하는 변의 집합 E(또는 $E(G)$)로 이루어져 있으며 $G=(V,E)$로 나타낸다. 이때, V에 속한 두 꼭지점 u와 v가 변 $e=\{u,v\}$로 연결되어 있으면 u와 v는 인접하다고 하고, 변 e는 u 또는 v와 근접하다고 한다. 또 꼭지점 v와 근접한 변의 개수를 차수라고 하고 $d(v)$로 나타낸다.



<그림 1> 수형도인 그래프와 수형도가 아닌 그래프

예를 들어 <그림 1>의 그래프 G를 살펴보면, 꼭지점의 집합은 $V=\{t,u,v,w\}$, 변의 집합은 $E=\{\{t,u\},\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}\}$이다. 또한 꼭지점 v와 인접한 꼭지점은 u와 w이며, 꼭지점의 차수는 각각 $d(t)=1$, $d(u)=3$, $d(v)=2$, $d(w)=2$이다.

그래프 G의 (단순)경로란 꼭지점의 나열 $P=x_0x_1\cdots x_k$로, x_i들은 서로 다르고 각 $i=0,\cdots,k-1$에 대해 $\{x_i,x_{i+1}\}\in E$를 만족하는 것을 말한다. 이때 x_0를 시작점, x_k를 끝점이라고 한다. 특별히 경로의 조건에서 시작점과 끝점이 같을 때, 즉 $x_0=x_k$일 때, 나열 $C=x_0x_1\cdots x_k$를 회로라고 한다. 이 경우 경로 P와 회로 C의 길이는 모두 k로 정의한다. 예를 들어 <그림 1>의 그래프 G에서 tuw는 길이가 2인 경로이고, $vuwv$는 길이가 3인 회로이다.

그래프 G의 임의의 두 꼭지점 x와 y에 대해 x에서 y로 가는 경로가 존재할 때, G가 연결되었다고 하고 G를 연결그래프라고 부른다. 일반적인 그래프는 몇 개의

연결된 부분으로 이루어지는데 이를 각각 연결성분이라 한다. 예를 들어 <그림 1>의 그래프 G와 T는 연결그래프이고, H는 연결성분이 2개인 그래프다. 한편 G의 부분그래프란, $V(H) \subseteq V(G)$과 $E(H) \subseteq E(G)$를 만족시키는 그래프 H를 말한다. 예를 들어 <그림 1>의 그래프 H와 T는 모두 G의 부분그래프이다.

이상의 개념을 바탕으로 수형도를 정의하면 다음과 같다. 수형도는 연결되어 있으면서 회로를 부분그래프로 가지지 않는 그래프를 말한다. 예를 들어 <그림 1>의 그래프 T는 수형도이다. 하지만 G와 H는 수형도가 아니다. 왜냐하면 G는 회로를 가지고 있고, H는 연결되지 않았기 때문이다.

주어진 그래프 G가 수형도일 때, 다음의 성질은 수학적 귀납법에 의해 증명할 수 있다([6]).

<정리 1> 수형도의 기본 성질

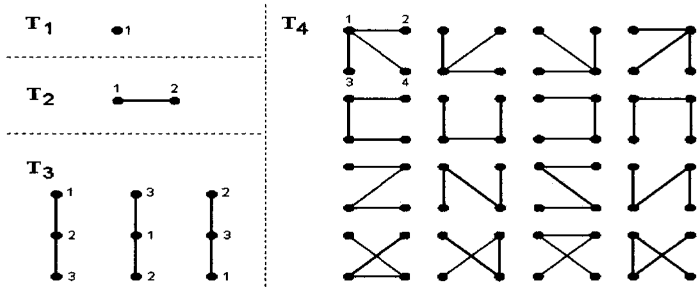
(1) G의 꼭지점의 수는 G의 변의 수보다 1 크다. 즉, $|V(G)|-|E(G)|=1$.

(2) 만약 G의 꼭지점의 수가 2이상이면 G는 적어도 2개의 차수가 1인 꼭지점을 가진다. 앞으로 이런 꼭지점을 잎이라고 부르기로 한다.

(3) G에서 한 잎 v와 그와 근접한 변을 제거해 만든 그래프($G-v$로 표기)도 수형도이다.

(4) G에 새로운 꼭지점을 추가하여 그 점을 G의 임의의 꼭지점 중 하나와 인접하게 해서 만든 그래프도 수형도이다.

앞으로 우리는 주어진 그래프 G가 n개의 꼭지점을 가질 때, $V(G)$를 $\{1,2,\cdots,n\}$(간단한 표기로 $[n]$)으로 놓겠다. 이때, 꼭지점의 집합 $[n]$ 위에서 정의된 수형도(전체)의 집합을 T_n이라 하자. <그림 2>는 $n=1,2,3,4$일 때, T_n에 속한 수형도들을 나열한 것이다.



<그림 2> 꼭지점의 개수가 4 이하인 수형도들

이때 T_n 의 원소의 개수를 t_n이라 할 때, 케일리는 다음 공식을 발견하였다.

$$t_n = n^{n-2}, \qquad (n \geq 1)$$

이 공식을 케일리 공식이라고 한다.

이 공식은 매우 단순하고 간결하지만, 보기와는 다르게 쉽게 유도되지 않는다.

케일리의 공식은 수학 내적으로도 중요한 내용이지만 다른 학문과도 깊은 관련을 가지고 있다. 케일리의 공식을 비롯한 케일리의 수형도에 대한 연구는 특정한 화합물(chemical compounds)의 개수를 세는데 활용되었다. 특히 Lunn과 Senior는 케일리의 증명방법을 이용하여 특정한 이성질체의 셈이 치환군의 셈과 밀접하게 관련되어 있음을 보이기도 하였다([16]).

이제 다음 장에서는 케일리 공식에 대한 케일리 자신의 증명 아이디어부터 최근에 이루어진 케일리 공식의 증명 아이디어까지 모두 네 가지의 증명 아이디어를 살펴보고, 그 증명이 가지는 의의를 살펴보도록 하겠다.

2. 케일리 공식에 대한 네 가지 증명

2.1 케일리의 증명

케일리의 증명은 규칙을 추측한 후 이를 수학적 귀납법을 이용하여 정당화하는 방식의 것으로서 케일리 공식에 대해 가장 손쉽게 접근할 수 있는 증명 방법이다. 케일리의 증명은 다항계수 사이의 재귀적 관계식과 케일리 공식에 대한 재귀적 관계식의 유사성을 이용한다.

케일리의 증명을 이해하기 위해 먼저 다항계수의 뜻을 살펴보자. 자연수 n에 대해 $r_1, r_2, \cdots, r_k$는 합이 n인 k개의 음 아닌 정수들이라 하자. 이때 다항계수 $M(n; r_1, \cdots, r_k)$는

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum M(n; r_1, \cdots, r_k) x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k} \qquad (2.1)$$

에 의해 정의된다. 즉 $(x_1 + \cdots + x_k)^n$를 전개할 때 $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$의 계수가 $M(n; r_1, \cdots, r_k)$이다. 실제로 다항계수는 같은 것을 포함한 순열의 개수이므로 다음 공식으로 주어진다.

$$M(n; r_1, \cdots, r_k) = \binom{n}{r_1, \ \cdots \ , r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

$$(\text{단}, \ n! = n(n-1) \cdots 1, \ 0! = 1) \qquad (2.2)$$

이제 $t_n(d_1, d_2, \cdots, d_n)$을 $[n]$ 위에서 정의된 수형도 중 꼭지점 1의 차수가

d_1, 2의 차수가 $d_2, \cdots$, 그리고 n의 차수가 d_n인 것의 개수라고 하자. 이 차수 조건을 만족하는 수형도 T가 있다고 하자. <정리 1>의 (2)에 의해 T에는 잎이 존재하므로 일반성을 잃지 않고 우리는 꼭지점 n이 잎이라 할 수 있다. 그러면 잎 n은 <정리 1>의 (4)에 의해 1 부터 $n-1$까지의 어느 꼭지점 i와도 인접 가능하다. 그러므로 $t_n(d_1, \cdots, d_n)$은 점화식

$$t_n(d_1, \cdots, d_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t_{n-1}(d_1, \cdots, d_i - 1, \cdots, d_{n-1})$$

을 만족한다. (단, d_i 중 음수가 있으면 $t_n(d_1, \cdots, d_n) = 0$) 한편 다항계수도 정의에 의해 재귀적 관계식

$$M(n-2; d_1 - 1, \cdots, d_n - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} M(n-1; d_1 - 1, \cdots, d_i - 2, \cdots, d_{n-1} - 1)$$

를 만족한다. 따라서 $t_n(d_1, \cdots, d_n)$과 $M(n-2; d_1-1, \cdots, d_n-1)$ 은 같은 재귀적 관계식을 가진다. 뿐만 아니라 두 수열의 초기조건 또한 일치하므로 수학적 귀납법에 의해

$$t_n(d_1, \cdots, d_n) = M(n-2; d_1 - 1, \cdots, d_n - 1)$$

이 성립한다. 그러므로

$$t_n = \sum t_n(d_1, \cdots, d_n) = \sum M(n-2; d_1 - 1, \cdots, d_n - 1) \tag{2.3}$$

이다. (단, $\sum$ 의 범위는 모든 가능한 자연수 d_i 들)

이제 (2.1)에서 n 대신 $n-2$를, k대신 n을 대입하면

$$(x_1 + \cdots + x_n)^{n-2} = \sum M(n-2; r_1, \cdots, r_n) x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$$

이고, 여기에 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 을 대입하면

$$n^{n-2} = \sum M(n-2; r_1, \cdots, r_n) \qquad (2.4)$$

을 얻는다. 따라서 식 (2.3)와 (2.4)으로부터 케일리 공식

$$t_n = n^{n-2}$$

이 유도된다.

수형도의 개수에 대한 이 같은 공식은 1889년 케일리에 의해 처음 소개되었다([7]). 실제로 케일리는 $n=6$일 때에 대해 위의 사실을 확인하고 일반적인 n에 대해서는 쉽게 할 수 있다고 언급하였다. 케일리의 증명의 아이디어를 발전시켜 완전한 형태로 증명한 결과는 여러 문헌을 통하여 확인할 수 있다(예를 들어, [14], [23]). 특히, <Proofs from THE BOOK>에서는 이 논문에서 소개하지 않은 케일리 공식에 대한 세 가지 증명이 나와 있다.

2.2 프뤼퍼(Prüfer)의 증명

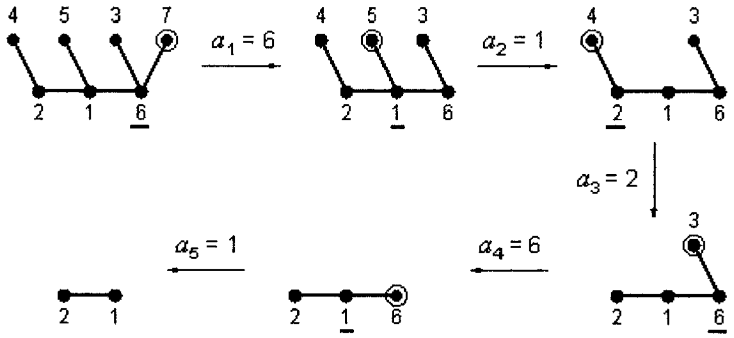
이 절에서 다루는 프뤼퍼의 증명을 포함하여 이하의 세 가지 증명은 수형도의 집합 T_n과 특정한 다른 집합 사이의 일대일 대응을 이용한 증명 방법이다. 프뤼퍼의 증명은 2.4에서 다루는 증명 아이디어와 밀접한 관련이 있는 것인 동시에 케일리 공식에 대한 가장 간결한 형태의 증명이다.

케일리 공식의 증명을 위해 프뤼퍼는 $[n]$ 위에 정의된 수형도의 집합 T_n과 집합 $[n]\times\cdots\times[n]=[n]^{n-2}$ (단, $n\geq2$) 사이의 일대일대응을 고안하였다([17]). 만약 두 유한집합 사이에 일대일대응이 존재하면 두 집합의 원소의 수가 같음은 자명하므로, 이를 통하여 우리는 쉽게 케일리 공식

$$t_n=|T_n|=|[n]^{n-2}|=n^{n-2} \qquad (2.5)$$

을 증명할 수 있다.

이제 프뤼퍼가 고안한 일대일대응을 살펴보자. 주어진 수형도 T에서 v가 잎 중 가장 큰 것이라 하고 a_1을 v와 인접한 꼭지점이라 하자. 이제 $T-v$에 대해서도 가장 큰 잎을 고르고 그것에 인접한 꼭지점을 a_2라 하자. 이와 같은 과정을 두 개의 꼭지점이 남을 때 까지 반복하자. 예를 들어, 수형도 T가 <그림 3>와 같이 주어진 경우, 프뤼퍼의 일대일대응에 의해 생성되는 $[n]^{n-2}$(여기서는 $[7]^5$)의 원소는 $(6,1,2,6,1)$이다.



<그림 3> 프뤼퍼 알고리즘의 예

이와 같이 주어진 수형도 T에 대응되는 코드 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$를 프뤼퍼 코드라고 부르고 이 일대일대응을 프뤼퍼 알고리즘이라고 부른다.

프뤼퍼 알고리즘이 일대일대응인지를 증명하기 위해서는 그 역함수가 존재함을 보이면 충분하다. 이제 프뤼퍼 알고리즘의 역함수를 기술해 보자.

임의의 코드 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$가 있을 때, 각 i가 차례로 $i=1,\cdots,n-1$인 경우에 대해 b_i는 집합

$\{a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{n-1}\}\cup\{b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}\}$

에 속하지 않는 최대의 자연수라 하자. (단, 편의상 $a_{n-1}=1$로 놓는다.) 그러면 $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \cdots, \{a_{n-1}, b_{n-1}\}$ 를 변으로 하는 수형도를 S라고 하면 S에 대응되는 프뤼퍼 코드를 구하면 다시 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$가 나옴을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 위와 같이 코드로부터 수형도를 구하는 대응이 바로 프뤼퍼 알고리즘에 대한 역함수가 된다. 이로부터 프뤼퍼 알고리즘이 일대일대응임을 확인할 수 있고, 따라서 식 (2.5)가 성립함이 증명된다.

프뤼퍼 알고리즘을 이용한 수형도 셈은 1918년 처음 발견되었다([17]). 이 증명은 케일리 공식에 대한 일대일대응을 이용한 최초의 증명이면서 가장 간결한 증명이라고 할 수 있다. 이 증명은 셈을 연구하는 조합론자들에 의하여 일대일대응 방법의 원형(prototype)으로 간주된다. 실제로, Gessel과 Stanley는 유한집합의 셈(enumeration)에 있어 중요한 두 가지 도구로 일대일대응(bijection)과 생성함수(generating function)을 꼽았다. 특히 일대일대응이라는 도구의 강력함을 설득하기 위해 바로 케일리공식에 대한 프뤼퍼의 증명을 예로 들었다([9]).

또한 프뤼퍼 알고리즘을 이용하면 다음과 같이 일반화된 케일리 공식도 쉽게 증명할 수 있다.

$$\sum_{T\in T_n} x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n} = x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{n-2} \qquad (\text{단, } d_i = d(i)\text{이다.})$$

이 식에서 양변의 $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}$항의 계수를 비교하면 앞서 케일리의 증명 과정에서 나온 식

$t_n(d_1, \cdots, d_n) = M(n-2; d_1-1, \cdots, d_n-1)$

을 수학적 귀납법을 사용하지 않고 얻을 수 있다.

2.3 Eğecioğlu와 Remmel의 증명

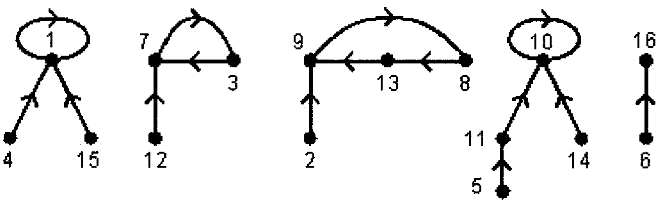
Eğecioğlu와 Remmel(이하 줄여서 ER 이라 표기)은 수형도가 어떤 함수를 시각화한 것과 비슷하게 보인다는 사실에 착안하여, 수형도의 집합과 개수가 n^{n-2}인 어떤 함수의 집합 사이의 일대일대응을 고안함으로써 케일리 공식을 증명하였다([8]). 이는 그래프 이론과 위상수학 등에 널리 사용되는 고유의 방법론을 사용하여 다시 한 번

증명을 시도하였다는 점에서 의미가 있다. 이제 그 증명을 살펴보자.

정의역이 $[n-1]$이고 공역이 $[n]$이면서 1이 고정점, 즉 $f(1)=1$인 함수 f의 집합을 F_n이라 하자. 이때 F_n의 원소의 수는 n^{n-2}임을 쉽게 알 수 있다. 이제 함수 f가 주어졌을 때, 꼭지점 $1, 2, \cdots, n$를 i에서 $f(i)$로 가는 화살표로 연결하여 (유향)그래프 D를 만들 수 있다. 예를 들어 함수 f가 <표 1>과 같이 주어져 있을 때, <그림 4>는 f에 대응되는 유향그래프 D를 나타낸 것이다.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(i)$	1	9	7	1	11	16	3	13	8	10	10	7	9	10	1

<표 1> 주어진 함수 f

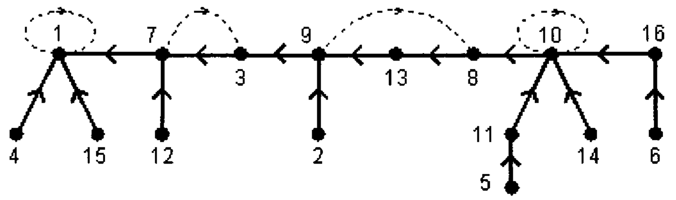


<그림 4> f에 대응되는 유향그래프 D

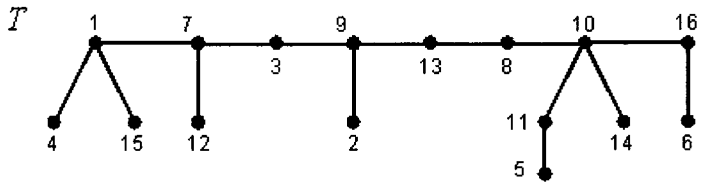
이때 D는 꼭지점 1과 n으로 화살표들이 향하는 두 개의 수형도[3]와 시계방향으로 회전하는 회로에 수형도들이 붙어있는 모양들의 합으로 이루어지게 된다. 특별히 각 회로의 회전 방향은 시계방향이 되고, 각 회로의 가장 오른쪽에 회로에 속한 최소원이 오며, 회로의 가장 왼쪽의 원소들이 오름차순이 될 수 있도록 연결성분들을 배열하자. 단, 꼭지점 1이 속한 수형도는 가장 왼쪽에, 꼭지점 n이 속한 수형도는 가장 오른쪽에 배열한다.

<그림 4>에서 각 회로에 있는 화살표 중 가장 왼쪽에서 가장 오른쪽으로 가는 화살표를 제거하고, 이웃하는 연결성분끼리 마주보는 꼭지점을 오른쪽에서 왼쪽으로 가는 화살표로 연결하자(<그림 5>). (이 상태에서 화살표들이 모두 꼭지점 1을 향함을 주목하자.) 여기서 화살표를 변으로 바꾸면 <그림 6>에서와 같이 수형도 T를 얻게 된다. 이것이 함수 f에서 수형도 T로의 ER의 대응이다.

3) 꼭지점 1에 연결된 루프(근접한 꼭지점이 하나인 변)는 예외적인 것으로 생각한다.



<그림 5> 연결된 그래프



<그림 6> 수형도 T

역으로 수형도 T에서 함수 f를 얻는 과정은 다음과 같다.

1) T에서 꼭지점 n에서 1로 가는 경로를 택하여 <그림 6>와 같이 수형도를 배치한다.
2) 모든 변을 꼭지점 1로 향하는 방향의 화살표로 바꾼다.
3) 가장 오른쪽 n에서부터 차례로 경로의 꼭지점을 탐색해 가면서 그때까지의 최소원 v가 나오면 v 바로 왼쪽의 화살표를 삭제하고 대신 v에서 경로의 가장 오른쪽 꼭지점으로 향하는 화살표를 그린다.
4) 꼭지점 1이 탐색될 때 까지 위의 3)의 과정을 반복한다.

이 알고리즘을 수행하면 우리는 집합 $\mathrm{F_n}$에 속한 함수 f와 대응되는 그래프를 얻을 수 있고, 이것이 ER 대응의 역과정임은 각 단계가 가역이므로 쉽게 확인할 수 있다. 그러므로 ER의 대응은 $\mathrm{T_n}$과 $\mathrm{F_n}$ 사이의 일대일대응이 된다. 그런데 $|\mathrm{F_n}| = n^{n-2}$이므로 케일리 공식

$$t_n = |\mathrm{T_n}| = |\mathrm{F_n}| = n^{n-2}$$

이 증명된다.

ER의 대응법은 1986년에 소개되었다([8]). 이 방법은 비록 프뤼퍼 알고리즘보다 다소 복잡해 보이지만 그래프 이론과 위상수학 등에 널리 사용되는 절단과 붙이기(cut and paste) 방법이 사용되었다는 점에서 의미가 있다. 이는 이미 발견된 정리를 해당 분야 고유의 방법론을 사용하여 재음미하는 전형적인 예가 될 것이다. 참고로 이와 유사한 방법으로 <그림 5>에서의 경로를 순열로 이해하여 증명을 하는 Joyal의 대응

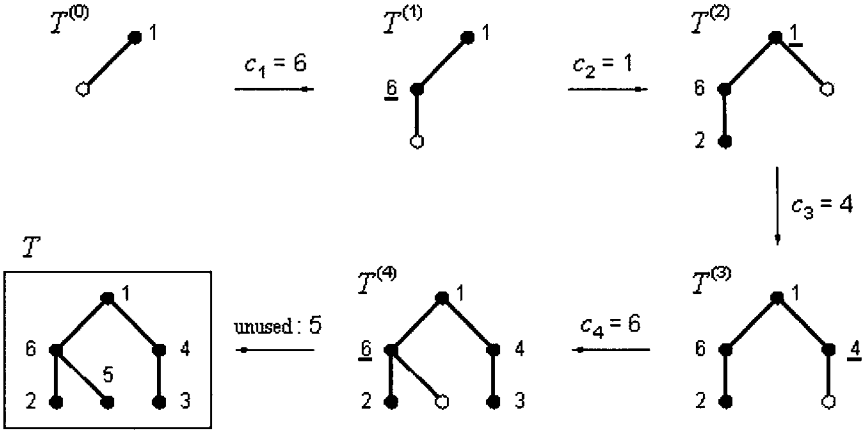
([12])도 있다.

케일리의 공식에 의해서 셈해지는 수형도는 그래프 이론의 관점에서 완전그래프의 덮개수형도로 이해할 수 있다. 이 때 ER의 증명은 완전그래프 뿐만 아니라, 보다 일반적인 그래프의 덮개수형도의 개수를 세는 데에도 적용 가능하다. 이러한 덮개수형도의 개수를 셈하는 것은 전산학에서의 정렬(sorting) 문제, 산업공학에서의 최적화(optimization) 문제와 밀접한 관련이 있다([18]).

2.4 Seo와 Shin의 증명

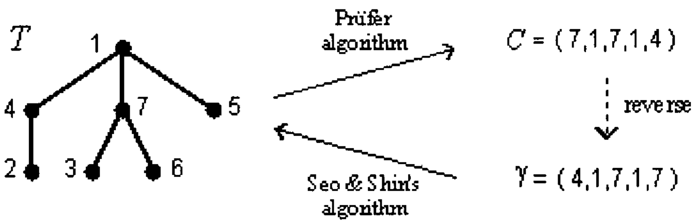
케일리 공식에 대한 간결한 증명으로 프뤼퍼 알고리즘을 앞서 소개하였다. 이 방법에 의해 수형도 T로부터 코드 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$를 얻는 것은 매우 쉬운 일이지만 반대로 코드로부터 수형도를 다시 생성해 내는 것은 각 단계의 잎 b_i들을 찾는 과정 때문에 다소 성가시게 된다. 특히 수형도를 점진적으로 생성해 나가는 것이 아니라 수형도의 변들을 하나씩 찾아나가기 때문에 수형도의 개략적인 모습을 파악하려면 b_1부터 b_{n-2}까지를 모든 잎을 살펴봐야 한다. 이에 Seo와 Shin([20])은 다음과 같은 코드로부터 수형도로 가는 새로운 알고리즘을 만들어서 케일리 공식을 증명하였다.

코드 $=(c_1, \cdots, c_{n-2}) \in [n]^{n-2}$가 주어져 있다고 하자. 이때 우리는 를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽어가면서 $c_1, \cdots, c_i$를 가지고 $i+2$개의 꼭지점을 가지는 수형도 $T^{(i)}$를 생성해 가면서 최종적으로 수형도 T를 만들고자 한다. 우선 코드를 읽기 전 꼭지점 1과 빈 꼭지점이 연결된 수형도를 $T^{(0)}$라고 하자. 이제 $c_1, \cdots, c_{i-1}$을 가지고 $T^{(i-1)}$을 만들었다고 하자. 만약 c_i가 $T^{(i-1)}$의 꼭지점 중 하나라면 우리는 $[n]$의 원소 중 $T^{(i-1)}$에 사용되지 않은 가장 작은 숫자를 $T^{(i-1)}$의 빈 꼭지점에 넣고 새로운 빈 꼭지점을 c_i에 인접하도록 만든다. 만약 c_i가 $T^{(i-1)}$의 꼭지점 중 하나가 아니라면 $T^{(i-1)}$의 빈 꼭지점에 c_i를 넣고 그 꼭지점에 인접하는 새로운 빈 꼭지점을 만든다. 이렇게 만든 새 수형도를 $T^{(i)}$라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 코드의 마지막 원소 c_{n-2}까지 사용하여 수형도 $T^{(n-2)}$를 만든 후, 마지막으로 $T^{(n-2)}$의 빈 꼭지점에 사용하지 않은 숫자를 넣어 수형도 T를 얻는다. 아래 <그림 7>은 코드 $(6, 1, 4, 6)$에 대응되는 수형도를 얻는 과정을 보여준다.



<그림 7> 코드에서 수형도를 얻는 과정

Seo와 Shin의 대응의 특징은 수형도 T를 만드는 과정이 마치 나무에서 가지를 치는 것처럼 점진적으로 이루어진다는 점이다. 또 한 가지 중요한 특징은 이들의 알고리즘이 프뤼퍼의 증명과 밀접한 관련이 있다는 것이다. 구체적으로 수형도 T의 프뤼퍼 코드가 $C=(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$라면 C를 뒤집은 코드 $=(a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1)$에 Seo와 Shin의 대응을 적용하면 원래의 수형도 T를 얻는다. (<그림 8> 참조.) 이런 이유로 Seo와 Shin의 대응을 역프뤼퍼 알고리즘이라고 한다.



<그림 8> Seo와 Shin의 대응과 프뤼퍼 알고리즘의 관계

역프뤼퍼 알고리즘은 조합론 뿐만 아니라, 전산학 분야에도 기여가 있다. 수형도를 임의로(랜덤하게) 생생해야 하는 경우 이전까지는 프뤼퍼 알고리즘을 이용하여 수형도를 생성해 냈다. 그 과정은, 길이가 $n-2$인 코드로 수형도를 다시 생성해 내는데 걸리는 계산의 복잡도가 $O(n^2)$이었다. 반면에 역프뤼퍼 알고리즘을 이용하여 수형

도를 생성해 내는 경우 계산의 복잡도는 $O(n)$으로 크게 향상된다. 뿐만 아니라 자료구조의 이용도 매우 적고, 높은 국소성을 가진다.

여기서 알고리즘의 복잡도란 주어진 알고리즘에 대해 입력이 특정크기일 때, 알고리즘이 사용하는 연산의 수를 말한다. 일반적으로 복잡도는 입력자료의 개수 n에 대한 함수로 O-표기법을 이용하여 근사적으로 나타낸다([18]). 실제로 복잡도의 개선은 컴퓨터를 이용한 문제풀이에 필요한 시간을 줄이는 기본적이고도 핵심적인 요소이다. 한편, 높은 국소성을 가진다는 말은 코드 또는 입력자료의 변화가 작을 때, 출력자료의 변화가 크지 않은 성질을 말한다([15]). 높은 국소성을 가지게 되면 유전 알고리즘에 이용될 수 있는데, 실제로 높은 국소성은 효과적인 진화 탐색에 필수적인 것으로 알려져 있다([19]. 유전 알고리즘은 진화의 원리를 문제 해결에 이용하는 대표적인 방법론 중 하나로, 풀고자하는 문제에 대한 가능한 해들을 정해진 형태의 자료구조로 표현한 다음, 이들을 점차적으로 변형함으로써 점점 더 좋은 해들을 생성하게 된다. 즉 풀고자 하는 문제에 대한 가능한 해들을 염색체로 표현한 다음 이들을 '교배', '돌연변이' 등의 방법으로 변형함으로써 점점 더 우수한 해들이 선택되게 된다([4]).

21세기에 수학에서 다루어야 할 중요한 문제 중의 하나가 "효율적인 셈"에 관한 것이다([3]). 효율적인 셈을 뒷받침 하는 것은 바로 효율적인 알고리즘이다. 실제로 복잡도의 개선은 컴퓨터를 이용한 문제풀이에 필요한 시간을 줄이는 기본적이고도 핵심적인 요소이다. Seo와 Shin의 증명은 순수한 수학적 증명이 다른 분야에 대한 실용적인 영향력을 보이는 전형적인 예이다.

3. 맺음말

이상에서 우리는 꼭지점의 집합이 결정되었을 때 수형도의 개수를 결정하여 주는 케일리 공식(Cayley formula)에 대하여 그 최초의 증명에서부터 최근까지의 증명 중 서로 다른 접근 방법을 택하고 있는 네 가지 증명 아이디어를 살펴보았다. 우선 제1장에서 수형도와 관련된 용어를 정의하고 수형도의 기본적인 성질을 기술하여 이를 바탕으로 케일리 공식을 소개하였다. 이어서 제2장에서는 케일리 공식에 대한 케일리의 증명에서부터 가장 최근에 이루어진 증명까지 모두 4가지의 서로 다른 증명방법에 대하여 그 기본적인 아이디어를 소개하면서 각각의 증명의 특징과 의의에 대하여 설명하였다. 케일리의 증명은 다항계수 사이의 재귀적 관계식과 수형도의 개수 사이의 재귀적 관계식의 유사성에 주목한 증명 방법으로서 케일리 공식을 추측하였을 때 가장 쉽게 떠올릴 수 있는 증명이다. 프뤼퍼의 증명은 가장 깔끔한 형태의 증명으로서 수형도의 집합과 다른 집합 사이의 일대일 대응을 이용한 최초의 증명이다. 이는 일대일대응 방법의 원형(prototype)이 된다. ER의 증명에서는 조합론에서 널리 사용되는 방법론인 절단과 붙이기(cut and paste) 방법을 사용하여 다시 한 번 케일리 공식을

증명하였다. 이러한 방법은 전산학에서의 정렬(sorting) 문제, 산업공학에서의 최적화 (optimization) 문제와 밀접한 관련이 있다. Seo와 Shin의 증명에서는 프뤼퍼 알고리즘을 재음미하면서 새로이 역프뤼퍼 알고리즘을 개발하여 이를 이용하여 케일리 공식을 새롭게 하였는데, 이 증명은 전산학 분야에 기여하였다. 한편, 케일리의 공식을 비롯한 케일리의 수형도에 대한 연구는 특정한 화합물(chemical compounds)의 개수를 세는데 활용되기도 한다. 이러한 실용적인 기여는 역설적으로 수학자들의 가장 순수한 학문적 탐구 욕구, 이미 증명된 정리를 새롭게 음미하고자 하는 욕망을 그 동력으로 삼고 있다.

수형도는 수학에 대한 풍부한 배경 지식을 가지지 않아도 이해하기 쉬운 소재이면서도 수학적으로 풍부한 내용과 학문적 깊이를 가지고 있다. 그 중에서 이 연구에서 소개한 케일리 공식에 대한 네 가지 증명은 그 아이디어를 비교적 쉽게 이해할 수 있으면서도 이미 발견되어 논증된 정리라고 하더라도 계속하여 새로운 방법론으로 증명을 시도하고 그 과정에서 다른 학문과의 관련성도 더욱 견고하게 되는 수학의 고유한 특징을 잘 드러내고 있다.

참고 문헌

1. 교육부, 제7차 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호). [별책 8]. 서울: 대한 교과서 주식회사, 1998.
2. 교육인적자원부, 이산수학. 서울: (주) 천재교육, 2002.
3. 김홍종, 미적분학 1, 서울대학교출판부, 2005
4. 문병로, 유전알고리즘, 서울: 두양사, 2003.
5. Aigner, M., & Ziegler, G., *Proofs from THE BOOK*. New York: Springer, 2003.
6. Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., *Graph Theory with Applications*, North-Holland, 1974.
7. Cayley, A., *A theorem on trees*, Quart. J. Math., 23 (1889), 376-378.
8. Eğecioğlu, O., & Remmel, J. *Bijections for Cayley trees, spanning trees, and their q-analogues*, J. of Comb. Theory A, 42 (1986), 15-30.
9. Gessel, I.M. & Stanley, R.P., *Algebraic Enumeration*, In Handbook of Combinatorics vol 2, ed. R. Graham, M. Grotschel and L. Lovasz, Elsevier (1995), 1021-1061.

10. Hoffman, P., *The Man who loved only numbers: the story of Paul Erdos and the search for mathematical truth.* New York : Hyperion. (역) 신현용(1999), 우리 수학자 모두는 약간 미친 겁니다: 수학자 폴 에어디쉬의 삶. 서울: 승산, 1998.
11. Jones, N.C., & Pevzner, P.A., *An Introduction to Bioinformatics Algorithm*, MIT Press, 2004.
12. Joyal, A. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Math., 42 (1981), 1-82.
13. Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1998.
14. Moon, W., *Counting Labelled Trees*, Canadian Math. Monographs, no. 1, Canadian Mathematical Congress, 1970.
15. Paulden, T., & Smith, D.K., *Developing new locality results for the Prüfer code using a remarkable linear-time decoding algorithm.* The Electronic. Journal of Combinatorics, 14, 2007.
16. Polya, G. & Read, R. C., *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, 1987.
17. Prüfer, H., *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*, Archiv der Math. und Phys., 27(3) (1918), 142-144.
18. Rosen, K. H., *Discrete Mathematics and Its Application*, 4th Ed., Boston: McGraw-Hill, 1999.
19. Rothlauf, F., *Reperesentations for Genetic and Evolutionary Algorithms*, Springer, 2003.
20. Seo, S. & Shin, H., *A generalized enumeration of labeled trees and reverse Prüfer algorithm*, J. of Combin. Theory A, 114 (2007), 1357-1361.
21. Stanley, R.P., *Enumerative Combinaotorics vol. 2*, Cambridge University Press, 1999.
22. Struik, D., A Concise History of Mathematics, Dover Publications, Inc. (역) 장경윤, 강문봉, 박경미(2002), 간추린 수학사. 서울: 경문사, 1948.
23. Van Lint, J.H. & Wilson, R.M., *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.

Four proofs of the Cayley formula

Department of Mathematics Education, Kangwon National University **Seung Hyun Seo**
Department of Mathematics Education, Gyeongin National University of Education **Seok Il Kwon**
Department of Mathematics Education, Konkuk University **Jin Kon Hong**

In this paper, we introduce four different approaches of proving Cayley formula, which counts the number of trees (acyclic connected simple graphs). The first proof was done by Cayley using recursive formulas. On the other hands the core idea of the other three proofs is the bijective method - find an one to one correspondence between the set of trees and a suitable family of combinatorial objects. Each of the three bijection gives its own generalization of Cayley formula. In particular, the last proof, done by Seo and Shin, has an application to computer science(theoretical computation), which is a typical example that pure mathematics supply powerful tools to other research fields.

Key words : Cayley formula, Tree, Graph theory, Discrete Mathematics, Combinatorics, Theoretical Computation

2000 Mathematics Subject Classification : 05-03

ZDM Subject Classification : K35

접수일 : 2008년 6월 18일 수정일 : 2008년 7월 12일 게재확정일 : 2008년 7월 20일