한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 67 - 96

# 적분개념의 발달
## (리만적분에서 르베그적분으로의 이행을 중심으로)

이화여자대학교 자연과학대학 수학전공 김경화
khkim@ewha.ac.kr

19세기에 푸리에와 디리클레가 한 개의 식으로 표현되지 않을 수도 있는 "임의의" 함수를 삼각급수로 표현하는 것과 관련하여 연속함수의 적분을 다루었던 코시의 적분보다 더 일반적인 적분의 필요성을 제기하여 리만적분론으로 이끌었다.

한동안 리만적분이 가장 일반적인 적분으로 간주되었고, 이 적분론이 집중적으로 다루어진 결과 리만적분의 약점들이 보였으나, 적어도 초기에는 이것들이 리만적분에 대한 비판으로 보이지 않았다.

그러나 죠르단이 1892년에 용량개념을 소개하며 리만적분론을 측도론적 배경에서 다루었고, 이로부터 몇 년 후에 보렐이 죠르단의 용량론을 측도론으로 발전시킨 후에 르베그가 이 둘의 이론을 합쳐서 지금 "르베그적분"으로 알고 있는 적분의 새 개념을 얻게 되었다.

주제어: 리만적분, 르베그적분

## 1. 서론

20세기 초에 프랑스 수학자 앙리 르베그(Henri Lebesgue, 1875~1941)가 현대적분론의 패러다임이 된 적분론을 확립하였다. 그 동기는 리만적분의 결점들을 극복하기 위한 것이었다.

리만적분론과 르베그적분론의 출발점은 함수에 대한 새로운 개념이었다. 18세기에 함수는 무한히 많은 수의 항을 가질 수도 있는 어떤 종류의 식이었고, 적분은 이 어떤 식으로 주어진 함수를 도함수로 갖는 원시함수를 결정하는 것이었다. 적분이 면적을 구하는 것과 관계있다는 것이 이미 알려졌었지만 면적계산은 단지 적분론의 응용으로 여겨졌었다.

19세기에 푸리에(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768~1830)와 디리클레(Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805~1859)가 한 개의 식으로 표현되지 않을 수도 있는

"임의의" 함수를 삼각급수로 표현하는 것과 관련하여 연속함수의 적분을 다루었던 코시의 적분보다 더 일반적인 적분의 필요성을 제기하여 리만적분론으로 이끌었다.

한동안 리만적분이 가장 일반적인 적분으로 간주되었고, 이 적분론이 집중적으로 다루어졌다. 이 결과 리만적분의 약점들이 보였으나, 적어도 초기에는 이것들이 리만적분에 대한 비판으로 보이지 않았다.

그러나 죠르단(Camille Jordan, 1838~1922)이 1892년에 용량개념을 소개하며 리만적분론을 측도론적 배경에서 다루었고, 이로부터 몇 년 후에 보렐(Emile Borel, 1871~1956)이 죠르단의 용량론을 측도론으로 발전시킨 후에 르베그가 이 둘의 이론을 합쳐서 지금 "르베그적분"으로 알고 있는 적분의 새 개념을 얻게 되었다.

본 고는 르베그적분이 만들어지게 된 배경을 [5], [6], [7], [9], [10]을 중심으로 정리하여, 교수들이 해석학을 가르칠 때 학생들의 흥미를 돋우게끔 역사적 배경을 설명하는데 쓰이도록 하는데 목적이 있다.

## 2. 함수개념의 변화

1854년에 나온 리만(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866)의 적분론은 실수들 사이의 대응관계 $x \to f(x)$로 함수를 생각하는 함수개념의 변화에 그 동기를 찾을 수 있다. 여기서 우리는 18세기에 함수개념이 어떻게 변화하였나를 간략히 살펴보도록 한다.

18세기 중반에 진동하는 현 문제(vibrating string problem)와 관련한 편미분방정식의 해와 관련하여 함수개념에 대한 논쟁이 벌어졌다. 시간 $t$에서 현의 방정식 $y = F(x,t)$를 결정하는 데에 있어서, 달랑베르(Jean-le-Rond D'Alembert, 1717~1783)는 1747년에 $t=0$일 때 현의 초기형태가 $y=f(x)$의 그래프로 주어지면 $F(x,t)$는

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\ [f(x+t)+f(x-t)]$$

의 형태를 가져야한다고 하였다. 달랑베르는 $f$가 "연속"함수, 즉 한 개의 식으로 나타내져야 한다고 주장한 반면에, 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)는 $f$가 "연속"일 필요는 없다, 즉 한 개의 식으로 주어질 필요는 없다고 주장하였다. $f$는 "불규칙적(irregular)" 또는 "절대적으로 임의의(absolutely arbitrary)" 함수일 수 있다고 하고 그런 함수들을 "불연속"함수라고 불렀다. 그의 "불연속"함수는 정의역 안의 서로 다른 구간에서 서로 다른 방정식으로 정의 된 함수거나 심지어는 방정식으로 주어지지 않고 평면에서 "마음대로 그려진" 곡선으로 주어진 함수를 의미한 듯하다 [4] . 그러나 1748년에 나온 「무한해석학 입문(*Introductio in analysin infinitorum*)」에서 오일러는 당시에 알려진 함수들의 특성으로부터 변량의 함수를 어떤 방식으로든 그 변량과 상수로 만들어진"해석적 표현(식)"으로 정의하였다.

다니엘 베르누이(Daniel Bernouille, 1700~1782)는 진동하는 현에 대한 물리적 원리에 근거하여 $f$가

$$f(x)=a_1\sin(\pi x/L)+a_2\sin(2\pi x/L)+a_3\sin(3\pi x/L)+\ldots..$$

와 같이 나타내진다고 하였으나 오일러, 달랑베르, 라그랑주(Joseph Louis Lagrange, 1736~1813)를 포함한 대부분의 수학자들이 받아들이지 않았다.

"임의의" 함수에 대한 관심은 1807년에 푸리에가 열전도에 관한 논문을 파리과학원(Paris Academy of Science)에 제출하여 D.베르누이의 주장을 재확인하며 다시 나왔다. 푸리에의 논문은 출판되지 않았지만 함수를 삼각급수로 표현하는 것에 대한 그의 아이디어는 1822년에 출판된 「열에 관한 해석적 이론(Théorie analytique de la chaleur)」에 처음 등장하였다. 그의 정리는 다음과 같이 쓸 수 있다:

$(-a, a)$에서 정의된 임의의 (유계)함수 $f$는

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{a}+b_n\sin\frac{n\pi x}{a})$$

와 같이 나타내진다. 여기서 계수는

$$a_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx,\ b_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

로 주어진다.

푸리에가 18세기의 함수에 대한 논의를 잘 알고 있었음을 그의 논문 「열에 관한 해석적 이론」으로 부터 알 수 있다. 푸리에에게 "임의의 함수"는 "완전히 임의인 함수 즉, 공통의 법칙을 따르던 따르지 않던 $x$의 모든 값들에 주는 값들의 이어짐....."이었으며, "함수 $f(x)$는 각각 임의인 값들 또는 세로좌표들의 이어짐을 나타낸다..... 그 값들 또는 세로좌표들은 어떠한 방식으로든 서로를 잇고, 그들 각각은 그것이 한 개의 양인 것처럼 주어진다" 였다.

위 구절들을 보면 푸리에가 함수에 대한 매우 일반적인 개념을 갖고 있었던 것으로 보이지만, 실제는 그렇지 않았다. 그는 18세기의 함수개념을 갖고 있었고, 그의 "불연속"함수는 18세기의 의미로 쓰였다. 즉, 한 개의 식으로 나타내지지 않는 것 이었다. 사실 푸리에의 임의의 함수는 매우 특별한 형태의 함수였던 것 같다. 예를 들어 푸리에는 임의의 함수 $f$는

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\cos(px-p\alpha)dp$$

의 형태로 나타내질 수 있다고 하였다. 그러나 이것은 특이적분이 수렴하지 않으므로 있을 수 없다.

베르누이와 달리 푸리에는 함수를 삼각급수로 표현하는 것에 대해 물리적 원리를 사용하지 않고 수학적으로 증명해야 한다고 생각하였다. 푸리에는 $(-\pi, \pi)$에서 정의된 함수 $f$에 대해, 방정식

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

를 풀 수 있다면, 즉 $a_0, a_1, \ldots.., b_1, b_2, \ldots..$이 구해지면 $f(x)$가 그와 같이 나타내진다고 하였다. 그래서 예를 들어 $a_m$을 구하기 위해 (1)의 양변을 $\cos mx$로 곱하고 그 결과를 $-\pi$와 $\pi$ 사이에서 적분하였다. 이 과정에서 푸리에는

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ldots..=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots..$$

를 사용하여

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$$를 얻었다.

푸리에의 증명은 '임의의' 함수가 (1)과 같이 나타내진다는 것을 가정한 것이다. 또한 두 개의 가정을 더 필요로 한다. 즉,

(a) $f$와 $f(x)\cos nx, f(x)\sin nx$가 적분을 갖는다

(b) (1)을 $\cos nx$ 또는 $\sin nx$와 곱한 급수에 대해 항별적분이 가능하다.

오래지 않아 항별적분의 타당성에 대해 의문이 제기되었으며, 푸리에는 $a_n$과 $b_n$을 적분으로 나타내는 것이 의미 있음을, 즉 임의의 함수의 정적분이 의미 있음을 증명해야한다는 것을 인식하였다.

18세기에 적분은 미분의 역연산이었으며, $f$를 적분하는 것은 $f$의 원시함수, 즉 $F'=f$인 함수 $F$를 찾는 것이었고, 그러면

$$\int_a^b f=F(b)-F(a)$$

였다.

그러나 $f$가 식으로 주어지지 않은 임의의 함수이면, $F$의 존재는 분명치 않다. 아마도 이것을 생각하며 푸리에가 적분을 넓이로 생각하는 합개념으로 돌아간 것을 그의 논문 「열에 관한 해석적 이론」에서 볼 수 있다. 각 $x$에 대해 세로좌표 $f(x)$가 존재하기 때문에 이 세로좌표들은 평면의 한 영역을 결정하며 이 영역이 명확한 면적을 갖는다는 것을 그는 결코 의심하지 않았다. 이와 같이 하여 그는 무의식중에 $f$가 "임의의" 함수일 때 $\int_a^b f(x)\,dx$를 어떻게 정확히 면적으로 정의하나 하는 문제를 제기하게 되었고 코시, 디리클레, 리만이 그 문제를 다루게 하였다.

## 3. 코시 이전의 적분

코시(Baron Augustin Louis Cauchy, 1789~1857) 이전 18세기에는 적분에 대한 독립적인 정의가 없었다. 함수 $f(x)$의 적분이란 $f(x)$를 도함수로 갖는 원시함수 $F(x)$

를 찾는 것이었다. 따라서 부정적분이 정적분 보다 더 기본적인 것이었고

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

로 정의되었다.

라이프니츠(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)는 적분을 합으로 정의하였었다. 그는 심지어 합을 뜻하는 s를 멋을 부려 적분기호 $\int$를 정하였다.[1] 그러나 대부분의 수학자들은 무한소의 무한합으로 정의하는 라이프니츠의 정의를 거부하였다.[2] 대신에 오일러, 베르누이 형제들(Jacob Bernoulli, 1654~1750: Johann Bernoilli, 1667~1748), 라그랑주, 라플라스(Pierre Simon Laplace, 1749~1827)는 적분하는 것을 미분하는 것의 역, 즉 역도함수를 찾는 것으로 생각하였다. 이것은 대수식으로 표현 가능한 많은 함수들의 적분을 계산할 수 있게 하였다.

그럼에도 불구하고 적분은 합으로 계산될 수 있다고 여겨서 정적분의 근사값을 구하는 많은 결과들이 있었고 이 근사값들에 대해 오차범위도 구해졌다. 정적분과 관련하여 코시가 필요로 했던 부등식들 중 몇이 이러한 연구에서 구해졌다.

근사값에 대한 연구는 수렴에 대한 연구로 이끌 수 있으며, 무한급수의 합의 근사값을 구하는 것은 수렴속력과 오차범위를 다루게 하였으며 궁극적으로 무한급수의 수렴에 대한 현대이론으로 이끌었다. 적분에 대해서도 비슷하게 발전하여 오일러, 르장드르(Adrian Marie Legendre, 1752~1833), 라크르와(Sylvestre François Lacroix, 1765~1843), 푸아송(Siméon Poisson, 1781~1840)은 합에 의한 정적분의 값의 근사값의 오차범위를 구하고자 하였고 각각 적어도 몇몇 특별한 경우에 오차가 임의의 주어진 양보다 적게 만들어질 수 있다는 것을 보이고자 하였다. 코시도 이 일에 끌려서 그것을 엄밀한 이론으로 발전시켰다.

## 4. 코시의 새로운 적분 정의의 동기

왜 코시는 역도함수로 정적분을 정의하는 것을 버리고 합의 극한으로 정의하는 것을 택하였는가?

르베그는 곡선 아래의 면적을 구하는 것을 가르칠 때 보통 직사각형으로 근사시키도록 하는 것이 코시의 정의와 밀접한 관계에 있는 것을 근거로 교육적 고려가 코시를 자극하였다고 하였다.[3] 일반적으로 기초(foundations)에 대한 코시의 결과들, 특히

1) 적분기호가 처음 발견된 것은 라이프니츠의 *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorium, Acta eruditorium* 5(1686)에서 이었다.

2) 당시에 무한과 무한소는 문제가 많은 개념이었다 [2] .

3) Lebesgue "*Lecons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*', Paris:Gauthier-Villars, 1904, p.5

정적분에 대한 이론은 일련의 강의에서 보여 졌고, 코시는 강의를 위하여 좀 더 주의 깊게 기초를 살펴보았을 것이다. 그러나 적분의 정의 자체는 A.P. Iushkevich가 말한 것처럼 "연구에 필요한 것"을 채우기 위하여 코시에 의해 채택되었다 [8] . 코시 자신은 "구적법 이론에 의해" 적분을 합으로 생각하게끔 "자연스럽게 이끌린다" 고 하였다.[4)]

푸리에를 비롯한 여러 수학자들이 곡선 아래의 면적으로서의 정적분이 타당한 여러 예들을 보였고 $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$에 대한 반례들을 보였다. 르장드르는 함수가 불연속이거나 무한이 되는 점을 포함하는 구간에서 정적분을 계산하는 예들을 다루었고, 코시도 1814년에 쓴 적분에 대한 *Mémoire*[5)]에서 그 문제를 다루었다. 또한 조각마다 연속인 함수의 적분은 각 조각의 적분의 합으로 정의하였고 연속인 각 조각의 적분은 연속인 구간의 끝점에서 계산된 역도함수의 차로 정의하였다. 불연속점들은 코시주요값(*Cauchy principle value*)에 의해 다루어질 수 있었다.

적분을 역도함수로 정의한 것으로부터 오는 어려움은 특이점에 국한되지 않고 더 많은 문제가 복소적분에서 발견되었다. 코시는 복소적분을 실적분으로 계산하였기 때문에 복소적분을 위해 만족할만한 실적분의 이론이 필요하였다. 1814년의 *Mémoire*에서 그는 직사각형에서의 적분을 적분경로의 끝점에서 역도함수의 값들로 묘사하였다. 그러나 복소적분에 대한 코시의 흥미가 역도함수로 적분을 정의하는 것에 만족하지 못하게 하였을 것이다.

가우스(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)는 1811년에 베셀(Friedrich Wilhelm Bessel, 1784~1846)에게 보낸 편지에서 두 점 사이의 적분경로가 복소수를 포함하면 적분의 값은 경로에 의존할 수 있다고 하였다. 코시는 가우스의 말을 알지 못했을 수도 있으나, 푸아송이 1820년의 논문[6)]에서 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$와 같은 적분에 대해 한 적분경로가 함수값으로 무한을 포함하면 다른 적분경로에 대해 다른 적분값이 나올 수 있음을 보여준 것을 알았으며, 푸아송은 그러한 적분을 합으로 계산할 것을 제안하였다. 더욱이 푸아송의 논문은 정적분이 항상 역도함수의 차 인 것은 아니지만 합으로서의 적분은 피적분함수가 구간 전체에서 유한이면 여전히 끝점에서 역도함수의 차라는 것의 증명을 보여 주었다. 이 증명이 코시에게 합의 극한으로서의 적분개념이 수학적으로 매우 유익함을 보여 주었을 것이다.

코시는 정적분을 합으로 채택하면, 변수의 두 한계가 유한할 때 피적분함수가 이

4) *Mémoire sur l'intégration des equatrons lineares aux differentielles partielles et a coefficients constantes, Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 19, 12(1823): 511ff.

5) *Mémoire sur les integrales définis, Mémoire des divers savants*, series 2, 1(1827): 601-799

6) *Suite du mémoire sur les intégrales définies*, Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 18, 11(1820): 295-341

두 한계 사이에 포함된 구간 전체에서 유한하고 연속이면 그러한 적분이 유일하고 유한한 값을 갖는다는 것을 쉽게 증명할 수 있다고 하였다. 그리고 이 정적분은 피적분 함수로부터 원시함수로 일반적으로 넘어갈 수 없는 경우까지 "모든 경우에 다 같이 적합하다"고 하였다.

위와 같이 정적분을 합들의 극한으로 정의함으로써 코시는 연속함수의 적분의 존재를 증명할 수 있었고, 알려진 함수의 도함수가 아닌 함수의 적분을 다룰 수 있었고, 경로를 따라 적분의 모습을 설명할 수 있었다. 그래서 합으로서의 적분이 푸리에, 가우스, 르장드르, 푸아송, 그리고 1814년 코시의 *Mémoire*에 의해 제기된 복잡한 문제들 중 많은 것에 대한 답이었다.

## 5. 코시의 정적분의 정의와 존재성

오일러, 라크르와, 푸아송 등이 코시에게 영향을 끼친 것은 확실하지만, 가장 어려운 기술적인 것과 개념적인 것은 코시 자신이 확립하였다. 적분을 합으로 보는 라이프니츠의 견해로 돌아 온 후에 코시는 그것을 좀 더 정확하게 만들 필요를 느껴 합을 정확하게 나타내고 극한의 존재를 증명하는 일을 하였다

그는 함수 $f(x)$를 구간 $[x_0, X]$ 에서 연속으로 잡고 정적분 $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$를 다음과 같이 정의하였다. 구간 $[x_0, X]$ 를 똑같을 필요는 없는 $n$개의 부분구간 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ....., $[x_{n-1}, X]$ 로 나누고 합

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots.. + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \qquad (1)$$

을 생각하였다. 코시는 $S$의 값이 분명히 $n$과 구간을 나누는 방식에 의존하는 것을 알았으며, 결정적인 문제는 부분구간의 크기가 매우 작고 $n$이 매우 클 때 나누는 방식이 더 이상 문제가 되지 않는가? 라는 것이었다. 그는 $f(x)$의 연속성을 사용하면서[7], 나누는 방식이 문제가 안 되고 $S$가 유일한 극한을 갖는다는 것을 증명할 수 있었다. 그리고 그 유일한 극한을 그는 정적분 $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$라고 정의하였다.

코시의 증명은 부분구간이 $[x_0, X]$ 자신뿐일 때 그에 대응되는 $S$가 0과 1 사이의 어떤 상수 $\theta$에 대해

$$S = (X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0))$$

임을 보이고[8], 이것을 각 부분구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에 적용하여 (1)을

7) 사실은 균등연속을 가정하였다.

8) 자세한 설명은 [5] , p172 참고.

$$S=(x_1-x_0)f(x_0+\theta_0(x_1-x_0))+(x_2-x_1)f(x_1+\theta_1(x_2-x_1))+\ldots.. \\ +(X-x_n)f(x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1}))$$

으로 고쳐 썼다. 그리고 $k=0,1,\ldots..,n-1$에 대해

$$f(x_k+\theta_k(x_{k+1}-x_k))=f(x_k)\pm\epsilon_k$$

로 나타내서, $x_k-x_{k-1}$들이 매우 작으면 $\pm\epsilon_k$가 0에 매우 가까워지므로

$$\pm\epsilon_0(x_1-x_0)\pm\epsilon_1(x_2-x_1)\pm\ldots..\pm\epsilon_{n-1}(X-x_{n-1})$$

또한 0에 매우 가까워지고, 따라서 원래 분할을 더 세분해도 $S$의 값을 별로 변화시키지 않을 것이라고 하였다.9)

그리고는 매우 작은 부분으로 분할하는 임의의 두 분할에 대해 이 두 부분을 모두 세분하게 되는 세 번째 부분분할을 만들면 이 세 번째 분할에 대한 $S$ 값은 주어진 두 분할 각각에 대한 $S$의 값과 거의 차이가 나지 않음을 증명할 수 있고, 따라서 주어진 두 분할에 대한 $S$의 값이 거의 차이가 나지 않는다. 따라서 $x_k-x_{k-1}$의 값들이 감소하고 부분구간들의 수가 많아지면 $S$의 값은 궁극적으로 상수가 된다 즉, 어떤 극한에 도달한다고 하였다. 여기서 코시는 급수에 대한 코시판정법을 기술할 때 가정했던 실수의 성질을 암암리에 가정하였다.

## 6. 리만의 적분 정의

코시에 의해 $f(x)$가 $a\le x\le b$에서 연속일 때 $\int_a^b f(x)dx$가 존재한다는 것이 증명되었다.

코시의 접근법을 따라서 조각마다 연속인 함수의 적분가능성이 쉽게 증명될 수 있었고, 리만도 공유했던 일반적인 견해는 이것이 "자연에서 일어나는" 모든 함수들을 다 다뤘다는 것이었다.

그러나 1829년에 디리클레가 임의의 함수를 삼각급수로 표현하는 것과 관련하여 함수값이 유리수에서 0이고 무리수에서 1인 함수 $f(x)$는 코시적분 $\int_a^b f(x)dx$가 의미를 갖지 않는 "임의의" 함수의 예임을 보여 주었다. 그리고는 적분가능성을 유지하면서 얼마나 많은 불연속점을 가질 수 있는가? 유한구간에서도 무한히 많은 불연속점을 가질 수 있는가? 하는 문제를 생각하였다. 디리클레는 1831년에 베를린 교수가 되어 리만을 가르쳤고, 리만이 1851년에 괴팅겐대학에서 박사학위를 받은 후에 *habilitation*을 위한 연구에서 적분가능성 조건을 밝히도록 이끌었다.

디리클레가 리만에게 얼마나 많은 도움을 주었나 하는 것을 리만이 그의 아버지에게 보낸 편지에서 볼 수 있는데, 다음은 1876년의 데데킨트가 쓴 리만의 전기에 있는

9) 이 부분에서 $f$의 균등연속을 사용하였다.

것이다[10]:

"어느 날 아침에 디리클레는 약 2 시간 동안 나와 함께 있었다. 그는 나의 *habilitation*을 위해 아주 완벽하게 필요한 노트를 나에게 주어서 일하기가 훨씬 더 쉬워 졌다. 그렇지 않았으면, 어떤 것들을 위해서는 도서관에서 오랫동안 뒤지고 있었을 것이다."

1853년 12월에 리만은 그의 결과들을 「함수를 삼각급수로 나타낼 수 있는 것에 대하여(*Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*)」로 괴팅겐대학에 제출하였다. 거기에 그는 "정적분 개념과 그것이 유효한 범위에 대한 짧은 에세이를 포함하는 것이 필요하였다"고 하며, 적분개념에 대한 그의 아이디어, 적분가능성에 대한 판정법, 그리고 흥미로운 예를 포함시켰다. 그러나 그 논문은 리만의 사후 2년 뒤인 1868년에야 출판되어서 그의 결과들이 알려지게 되는 데에는 비교적 긴 시간이 걸렸다.

리만은 $\int_a^b f(x)\,dx$를 다음과 같이 정의하였다:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b, \delta_k = x_k - x_{k-1}, 0 \le \epsilon_k < 1$ 이라 하자. "그러면 합

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \epsilon_{k+1}\delta_{k+1})\delta_{k+1}$$

의 값은 구간 $\delta$와 수 $\epsilon$의 선택에 의존할 것이다. 그것이 $\delta$와 $\epsilon$의 선택에 상관없이, 모든 $\delta$가 무한히 작아질 때 고정된 극한 $A$에 한없이 접근하는 성질을 가지면, 이 값을 $\int_a^b f(x)\,dx$로 부른다."

적분의 정의를 한 후에 리만은 그것의 존재에 대한 필요충분조건을 보여 주기를 원했다. 그는 $x_{k-1}$과 $x_k$ 사이에서 함수의 변화폭(oscillation), 즉 "이 구간에서 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차이"를 $D_k$로 표시하였다. 합 $\sum \delta_k D_k$는 "수 $\delta$와 함께 무한히 작게" 되어야 한다. 이제 $f(x)$가 구간에서 "항상 유한"[11]이고 모든 $\delta$는 $d$보다 작다고 가정하자. 필요충분조건은

"$\sigma$의 값에 상관없이, 변화폭이 $>\sigma$인 구간의 길이의 합이 $d$의 적절한 선택에 의해 임의로 작게 만들 수 있어야 한다."

이다.

리만은 즉시 그의 조건이 사용될 수 있고, 그의 적분개념이 코시의 것 보다 더 포괄적임을 보였다. 그는

10) *Riemann, Gesammelte mathematische Werke*, 571-590 에 있는 *Bernard Riemanns Lebenslauf*의 578쪽.

11) 유계를 뜻함.

$$r(x)=\begin{cases} x, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \\ 0, & x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

을 정의하고 그것을 모든 $x$에 대해 주기 1인 함수로 확장하였다. 함수

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(nx)}{n^2}$$

는 급수가 모든 $x$에 대해 수렴하므로, 모든 $x$에 대해 정의되고 $x=\frac{p}{2m}$ ($\frac{p}{2m}$는 기약분수) 에서만 불연속이다. $x=\frac{p}{2m}$에 대해

$$f(x\pm 0)=f(x)\mp\frac{1}{2m^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=f(x)\mp\frac{\pi^2}{16m^2}$$

이 된다. 따라서 불연속점들은 조밀집합을 이루지만 모든 유계구간에서 유한개의 $\geq\sigma$인 비약점(jump)만 있으므로 리만의 판정법에 의해 적분가능하다.

리만은 조각마다 연속인 함수의 적분가능성을 말하였으며, 위의 함수는 조각마다 연속도 아니고 조각마다 단조함수도 아니어서, 리만은 그의 적분개념의 적용범위를 보이기 위해 그것을 사용하였다. 리만의 적분정의는 한동안 "생각할 수 있는 가장 일반적인 것으로 보여졌다".

리만은 적분을 정의하는 것 외에 적분에 대한 아무런 정리도 증명하지 않았다. 그러나 리만의 적분정의는 소위 일반화된 리만적분을 포함하여 Stieltjes 적분, 르베그적분으로 이끌었다.

## 7. 리만적분에 대한 논의

함수의 새로운 개념과 특히 리만의 적분개념에 반응한 첫 번째 사람 중의 하나는 한켈(Hermann Hankel, 1839~1873)이다. 한켈은 1860년에 잠시 괴팅겐에서 공부하였고 그의 선생님들 중 하나인 리만에게 큰 영향을 받았다.

한켈은 1870년에 「무한히 자주 진동하고 불연속인 함수에 대한 연구(*Untersuchungen über die unendlich oft oscillirendenund unstetigen Funktionen*)」를 발표하였다. 거기서 그는 디리클레의 추상적 함수개념을 갖고 함수의 연속개념을 오늘날의 것과 같이 정의하였다. 그리고는 유한구간에서 무한히 많은 특이점을 갖는 함수를 만들어 내는 원리를 언급하였다. 그는 리만을 언급하며 그의 예를 일반화하고 "이 함수들로부터..... $f$로 가는 원리를 특이점들의 응집원리(Principle of condensation of singularities)라고 불러도 된다고 느꼈다"고 하였다.

한켈은 점 $a\in\mathbb{R}$에서 함수 $f$가 불연속이라는 것을 "$f(a+\delta)-f(a)$가 양수 $\epsilon$ 보다

작은 모든 $\delta$에 대해 임의의 작은 양 $\sigma$ 사이에 놓이도록 아주 작게 $\epsilon$을 잡을 수 없다"로 정의하였다.

한켈은 이 상황을 "$a$에서 비약(jump)이 $\sigma$ 보다 크다"고 하였다. 이것을 $j_f(a) > \sigma$ 라고 쓰면 $f$가 $a$에서 연속이라는 것은 $j_f(a) = 0$을 뜻한다. 한켈은 함수의 비약점들의 집합, 특히 오늘날 우리가 $S_\sigma(f) := \{x \in R : j_f(x) > \sigma\}$ 라고 부를 수 있는 집합들을 생각하였다. 그리고 다음을 정의하였다.

> "아무리 작더라도 집합의 점을 적어도 하나라도 포함하지 않는 구간이 없으면" 그 집합은 "구간을 채운다"[12].
>
> "아무리 가깝더라도 두 점 사이에 그 집합의 점들을 하나도 포함하지 않는 구간이 항상 있으면" 집합은 구간에서 "채워지지 않고 흩어져 있다"[13].

이 정의를 사용하며 한켈은 다음을 "증명"하였다. 간단히 하기 위해 현대용어로 쓰면,

(1) $S_\sigma(f)$가 구간 $(a, b)$에서 어디에서도 조밀하지 않으면(nowhere dense) $\omega_f(I) > 2\sigma$ 인 (부분) 구간 $I$들의 전체 길이는 임의로 작게 만들 수 있다.[14]

(2) 역으로, $\omega_f(I) > \sigma$인 구간 $I$들의 전체 길이를 임의로 작게 만들 수 있으면 $S_\sigma(f)$는 $(a, b)$에서 어느 곳에서도 조밀하지 않다.

이 중 첫 번째 것은 역사적으로 매우 흥미로운 것이지만 그것은 사실 틀리다. 이것이 맞는다면 리만의 판정법에 의해 모든 $\sigma > 0$에 대해 $S_\sigma(f)$가 어디에서도 조밀하지 않은 함수 $f$는 적분가능하다. 그래서 사람들은 다음 한켈의 결론에 동의할 수 있었을 것이다:

> "직선에서 완전 불연속(totally discontinuous)인 함수[15]는 절대로 적분가능하지 않고, 점별 불연속(pointwise discontinuous)인 함수[16]는 항상 적분가능하다."

그러나 1875년에 영국 수학자 스미스(Henry John Stanley Smith, 1826~1883)가 어디에서도 조밀하지 않은 불연속점들의 집합을 갖는 (그래서 특히 어디에서도 조밀하지 않은 집합 $S_\sigma(f)$를 갖는) 함수들을 발견하였는데, 그것들은 적분가능하지 않으므로 위 한켈의 결과에 대한 반례가 되었다.

이런 종류의 예들은 위상적으로 작은(어디에서도 조밀하지 않은) 집합이 측도론적 의미로 반드시 작지는 않다는 사실을 알게 하였고, 그래서 용량론과 집합의 측도에

---

12) 집합이 구간에서 조밀(dense)하다는 표현.

13) 집합이 어느 곳에서도 조밀하지 않다(nowhere dense)는 표현.

14) 여기서 $\omega_f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\}$. 그러나 한켈은 sup과 inf 대신 최대값과 최소값을 사용하였다.

15) "비약이 어떤 유한한 한계 보다 큰 점들이 전체 구간을 채우는" 함수.

16) 모든 $\sigma > 0$에 대해 $S_\sigma(f)$가 어디에서도 조밀하지 않은 함수 즉, 연속점들의 집합이 조밀한 함수.

대한 개발의 동기가 되었다.

리만 이론의 확장에서 필수적 단계는 프랑스 수학자 다부(Jean Gaston Darboux, 1842~1917)에 의해 취해졌다. 1872년과 1879년 사이에 발표된 세 논문[17]에서 그는 해석학에서 좀 더 엄밀한 방법이 필요하다는 것에 대해 프랑스 수학사회를 설득시키고자 하였다. 이 논문들에서 다부는 직관을 신뢰함으로써 생기는 위험을 보여 주는 반례를 여럿 보였다. 이를 위해 다부는 균등수렴 개념을 매우 중요하게 사용하였다.

다부는 유계함수 $f$만을 분명하게 다루었고, 그런 함수들에 대해 구간에서 함수의 최대·최소값과 최소상계·최대하계의 차이를 지적하였다.

그는 임의의 구간 $[a,b]$에서 정의 된 유계함수 $f$에 대해 $[a,b]$의 임의의 분할 $a=x_0<x_1<.....<x_n=b$와 이 분할에 대해

$$M(n):=M_1\delta_1+.....M_n\delta_n,$$
$$m(n):=m_1\delta_1+.....m_n\delta_n,$$
$$\triangle(n):=\triangle_1\delta_1+.....\triangle_n\delta_n$$

을 생각하였다. 여기서 $\delta_i:=x_i-x_{i-1}$는 $i$번째 구간의 길이이고, $m_i$는 $i$번째 구간에서 $f$의 값들의 최대하계, $M_i$는 최소상계, $\triangle_i:=M_i-m_i$는 $f$의 "변화폭 (oscillation)"이다.

여기서 중요한 것은 다부가 $M(n),m(n),\triangle(n)$이 ($n\to\infty$이고 $\delta_i\to 0$일 때) $a,b$와 $f$에만 의존하는 유일한 극한값들로 수렴함을 보인 것이다. 여기서 상적분과 하적분이 처음으로 구해졌고, 페아노(Giuseppe Peano, 1858~1932)는

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx:=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_i$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx:=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}M_i\delta_i$$

로 표기하였다.

다부는 $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$가 성립하는 함수와 다른 것들을 구별하였다. 그리고 다부는 리만적분을 재표현하였다. 분할 $a=x_0<.....<x_n=b$에 대해 $\delta_i:=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,.....,n)$와 $\theta_i\in[0,1]$를 갖고 그는 $n,\delta=(\delta_1,.....,\delta_n)$과 $\theta=(\theta_1,.....,\theta_n)$에만 의존하는 *다부합*

17) ①Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions, Bulletin des sciences mathématique et astronomiques 3(1872), 307-313
②Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 2nd ser. 4(1875), 58-112
③Addition au mémoire sur les fonctions discontinues, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 2nd ser. 8(1879), 195-201

$$S(n,\delta,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i f(x_{i-1}+\theta_i\delta_i)$$

를 생각하였다. $m(n) \le S(n,\delta,\theta) \le M(n)$이므로 다음을 얻었다.

정리 1. 다부합은 $\Delta(n)$이 0으로 갈 때 즉, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$가 성립할 때, 또 그 때에 한해 유일한 극한 ($\delta$와 $\theta$에 무관한)으로 수렴한다. [1]

결과적으로 다부는 이 값을 $\int_a^b f(x)\,dx$라고 불렀다. 그리고는 여러 결론들을 끌어냈다 [1] . 예를 들어

- 모든 연속함수는 (다부) 적분가능하다.
- 함수 $x \to \int_a^x f(y)\,dy$는 $x$에서 연속이다.
- $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$라 하자. $f$가 $x_0$에서 연속이면 $F$는 $x_0$에서 미분가능하고 $F'(x_0)=f(x_0)$이다.

그는 또한 마지막 절에서 다음을 보였다.

정리 2. $[a,b]$ 에서의 함수$F$가 유계 적분가능 도함수 $f=F'$을 갖고 미분가능하면, 모든 $x \in [a,b]$ 에 대해

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(y)\,dy$$

이다.

이런 식으로 다부는 리만적분 개념을 최종적으로 확립하였다.

위 정리는 코시가 도함수의 연속성을 가정했어야만 했던 것에 반해 그 보다 약한 조건인 도함수의 적분가능성이 미분적분학의 기본정리를 증명하는데 충분함을 보여주었다.

그러나 이 정리로부터 어떤 문제가 제기되었다.

디니(Ulisse Dini, 1845~1918)는 $f$가 모든 구간에서, 그 구간이 아무리 작아도, $f'(t)=0$인 $t$가 존재하면, $f$는 상수함수이거나 $f'$이 리만의 의미로 적분가능하지 않다는 것을 보았다. 그리고 위의 성질을 갖는 상수가 아닌 함수로서 $f'$이 적분가능하지 않은 함수 $f$가 존재할 것이라고 추측하였다[18]. 얼마 안지나 디니의 추측을 뒷받

18) 1878년의 「실변수함수론의 기초(*Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali*)」에서.

침해 주는 여러 예들이 나왔다.

1881년에 볼테라(Vito Volrerra, 1860~1940)는 유계 도함수를 갖는 상수함수가 아닌 함수 $f$로서 조밀집합에서 0인 함수의 예를 보였다. 비슷한 예가 1896년에 스웨덴 수학자 브로덴(Torsten Brodén, 1857~1931)에 의해 발표되었다. 브로덴은 리만이 시작하고 한켈이 완전하게 만든 특이점의 응집원리에 기초하여 예를 보였다.

리만은 이 원리를 그의 정의의 일반성을 보여 주는데 사용한 반면에 브로덴이 그것을 응용한 것은 오늘날 우리에게 리만의 정의가 충분히 일반적이지 않음을 보여 준다. 즉, 함수 $f$를 미분하는 과정은 리만적분가능하지 않은 유계함수 $f'$을 만들어 낼 수 있다. 따라서 리만의 적분과 미분은 완전히 가역적은 아니다.

여기서 우리는 나중에 르베그를 새 개념으로 이끌게 될 첫 비판적인 지점에 이르렀다. 르베그는 그의 박사학위 논문[19]의 서론에서 다음을 말하였다.

> "리만의 적분정의를 받아들이면, 적분가능하지 않은 도함수가 있는 것이 알려졌다. 리만이 정의한 것과 같은 종류의 적분은 미적분학의 기본문제 즉, 주어진 도함수를 갖는 함수 찾기를 모든 경우에 해결하게 하지는 않는다. 그래서 가능한 한 넓은 영역에서 적분을 미분의 역연산으로 만드는 적분의 정의를 찾는 것이 자연스러워 보인다".

그러나 르베그 이전의 수학자 중 아무도 위의 결과들을 리만에 대한 비판으로 사용하려고 하지는 않았고 리만의 적분개념이 여전히 인기가 있었다. 그러나 리만적분에 대한 활발한 논의가 리만적분의 결점을 발견할 수 있었고, 그로 인해 새로운 이론이 나오게 되었다.

참고로 브로덴의 예를 보도록 한다.[20]

$x \in [-1, 1]$ 에 대해 $\phi(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 으로 놓는다. $\{a_n\} \subset [-1, 1]$ 을 조밀집합이라 하고

$$\phi_n(x) = \phi(x - a_n) = (x - a_n)^{\frac{1}{3}}$$

라고 한다. 그러면 모든 $x \in [-1, 1]$ 에 대해 $\phi_n'(x)$가 존재하지만, $x = a_n$에 대해 $\phi_n'(x) = \infty$ 이다. $[-1, 1]$ 에서 $f$를

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{2^n}$$

로 정의한다. 그러면 모든 $x \in [-1, 1]$ 에 대해

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n'(x)}{2^n}$$

이고, $n = 1, 2, 3, \ldots..$에 대해 $f'(a_n) = \infty$ 이다. 모든 $\phi_n$이 순증가하므로 $f$는 순증가함

19) 제목은 「적분, 길이, 면적(*Intégrale, Longueur, Aire*)」이고 1902년에 발표되었다.

20) 브로덴에게 이 예는 리만적분의 문제점을 보여주는 것이 아니었고, 단지 조밀집합에서 수평접선을 갖는 연속함수의 예 이었다.

수이다. 따라서 $f$는 $[a,b]=[f(-1),f(1)]$ 에서 정의되는 연속인 역함수 $g=f^{-1}$을 갖는다. 그러면 $b_n=f(a_n)$일 때 $\{b_n\}$ 은 $[a,b]$ 에서 조밀집합이고 $g'(b_n)=\dfrac{1}{f'(a_n)}=0$이다. $g'$은 $[a,b]$ 에서 유계이고 순증가함을 쉽게 볼 수 있으며 디니가 보았던 것에 의해 $g'$은 적분가능하지 않다.

## 8. 균등수렴 문제

푸리에는 수렴하는 함수급수는 항별적분 될 수 있다고 가정하였다. 즉,

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b u_i(x)\,dx$$

가 성립하는 것을 당연한 것으로 받아들였다. 이것은 19세기 후반부까지도 많은 수학자들에 의해 당연한 것으로 사용되었다.

그러나 1870년에 바이어슈트라스(Karl Theodor Weierstrass, 1815~1897)의 친구인 하이네(Heinrich Eduard Heine, 1821~1881)는 「삼각급수에 대하여(*Über trigonometrische Reihen)*」에서 유한한 적분한계에서 수렴하는 급수의 적분이 각 항들의 적분의 합이라는 것을 증명하기 위하여 급수의 균등수렴(uniform convergence)이 필요하다는 것을 바이어슈트라스가 처음 알아냈다고 하였다.

바이어슈트라스는 베를린에서 한 강의에서 점별수렴(pointwise convergence)과 균등수렴의 차이를 소개했으며, 적분과 극한을 취하는 것을 교환할 수 있기 위한 조건으로 균등수렴을 말하였으나, 그것은 하이네가 1870년에 분명하게 말하기 전까지는 거의 안 알려졌었다.

1875년의 「불연속함수에 대한 논문(*Mémoire sur les fonctions discontinues*)」에서 다부는 균등수렴을 정의하고 균등수렴 급수에 대해 연속성과 적분가능성이 보존되는 것을 말하였다. 이와 관련하여 다부는 여러 예들을 보였다. 첫 번째 예는 균등수렴이 연속성을 위한 필요조건이 아님을 보여 주는 것이다:

$$f(x):=x^2e^{-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2x^2e^{-n^2x^2}-(n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}\right].$$

$R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\left[k^2x^2e^{-n^2x^2}-(k+1)^2x^2e^{-(k+1)^2x^2}\right]=n^2x^2e^{-n^2x^2}$이고 $R_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{e}$이므로 이 급수는 $(0,1)$에서 균등수렴하지 않지만 극한함수는 연속이다. 또 다른 예는 적분과 극한을 취하는 것을 교환하는 것이 불가능한 것을 보이는 것이다:

$$f(x):=-2xe^{-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-2n^2xe^{-n^2x^2}+2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}\right].$$

극한함수를 $[0,a]$ 위에서 적분하면 $e^{-a^2}-1$을 얻지만 항별적분의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-n^2a^2} - e^{-(n+1)^2a^2}]$ 즉, $e^{-a^2}$이 된다. 이 급수도 균등수렴하지 않는다.

그래서 리만적분은 일반적으로 극한을 취하는 것과 교환가능하지 않다.

이 문제에 대한 일반적인 결과를 처음 내놓은 사람은 디니의 학생인 아젤라(Cesare Arzelà, 1847~1912)이다. 그는 1885년에 논문 「급수의 적분에 대하여(*Sulla integrawione per serie*)」에서 균등하게 유계이고 적분가능한 함수들의 급수가 적분가능 극한함수로 수렴하면 적분과 극한을 취하는 것은 교환가능하다는 것을 보였다. 또한 미국 수학자 오스굿(William Fogg Osgood, 1864~1943)은 1896년 8월에 발표한 논문21)에서 연속함수 $s_n : [a,b] \to \mathbb{R}$들의 열이 연속 극한함수로 수렴할 때 (오스굿은 이것을 "조건(A)를 만족시킬 때" 라고 하였다), 균등수렴하지 않을 수도 있음을 보여주는 예로

$$S_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2},\ f(x) = 0,\ x \in [0,1]$$

을 들었다. 오스굿은 $S_n(x)$가 점 $x=0$의 근방에서 무한 첨점(infinite peak)을 갖는다고 하였으며 이러한 점을 $X$-점이라고 불렀다. 그리고 다음을 보였다.

정리 3. $S_n(x)$가 조건 (A)를 만족시키는 $x$의 함수이고 $(\alpha,\beta)$가 $X$-점이 없는 임의의 구간이고, $x_0 < x_1$이 이 구간의 임의의 두 점이면,

$$\int_{x_0}^{x_1} \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x_1} S_n(x)\,dx$$

이다. $S_n$이 급수

$$S_n(x) = u_1(x) + \ldots\ldots + u_n(x)$$

의 형태로 주어지면 이 급수는 항별 적분가능하다고 한다.

이것은 연속 극한함수를 갖는 연속함수열이 균등유계이면, 적분과 극한을 취하는 것은 교환가능함을 말한다.

1899년에 베어(René-Louis Baire, 1874~1932)가 리만적분가능하지 않은 극한함수를 갖는 균등유계 함수열의 예를 보임으로써 극한함수에 대한 조건이 필요하다는 것이 보여 졌다. 그의 예는 매우 간단한 것으로 다음과 같다.

$x \in [0,1]$ 에 대해 $x$가 유리수 $\frac{p}{q}$이고 $p$와 $q$는 공통인수를 갖지 않고 $q \le n$이면 $f_n(x) = 1$이라 하고, 그렇지 않은 경우 $f_n(x) = 0$이라 한다. 그러면 $f_n$은 $[0,1]$ 에서 유한개의 점을 제외하고 0이므로 적분가능하고 $|f_n(x)| \le 1$이다. 따라서 $\{f_n\}$ 은 균

21) *Non-uniform convergence and the integration of series term-by-term*, American Journal of Mathematics, 19, 1897, 155-190

등유계 함수열이다. 모든 $x \in [0,1]$ 에 대해 $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$가 존재하고, $x$가 유리수이면 $f(x) = 1$, $x$가 무리수이면 $f(x) = 0$임을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 극한함수 $f$는 디리클레의 적분불가능한 함수이다.

그러나 베어는 이 예를 보일 때 적분론을 언급하지 않았다. 르베그적분론이 나오기 전까지는 이러한 예들의 존재가 리만 적분에 대한 비판으로 작용하지 않았다.

## 9. 다차원 적분과 죠르단

적분론의 발전에 중요한 마지막 문제는 다변수함수 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$을 어떻게 다루나 하는 문제로부터 나왔다. $A$가 평면 $\mathbb{R}^2$의 영역일 때

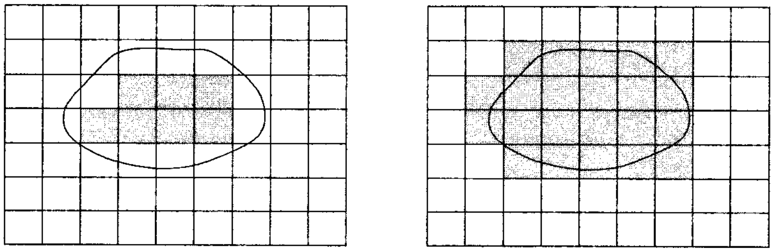
$$\int_A f(x,y)\,da$$

의 의미는 무엇이어야 하는가?

평면을 그림 1과 같이 직사각형 $R_{ij}$로 분할하여 $a(R_{ij}) = \Delta(x_i)\Delta(y_j)$일 때

$$\sum f(x_i, y_j) a(R_{ij}),\ \ (x_i, y_j) \in R_{ij}$$

형태의 코시-리만합을 생각하는 것이 자연스럽게 나온다. 그러나 어떤 직사각형에 대해 합을 구해야 하는가? $A$에 완전히 포함되는 직사각형? 또는 $A$의 점을 포함하는 모든 직사각형?



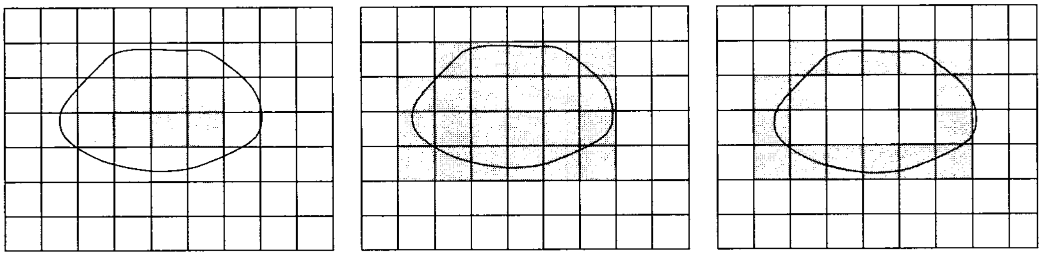
<그림 1>

둘의 차이는 $A$의 경계와 만나는 직사각형들이고 그 직사각형들의 넓이의 합은 분할을 점점 더 세분함에 따라 0으로 수렴할 것이라는 것이 가정되었다. 그래서 둘은 같은 결과로 이끌어야 한다. 그러나 페아노가 모든 점들 $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ 을 지나는 연속곡선을 발견하게 되어서 이 가정은 문제가 되었다. 그래서 $A$에 어떤 조건들이 주어져야 적분 $\int_A f(x,y)\,da$가 잘 정의될 것인가를 생각하게 되었고, 페아노곡선이 나온 지 2년 후에 프랑스 수학자 죠르단(Camille Jordan, 1838~1922)이 새로운 접

근법을 내놓았다.

정적분에서 피적분함수 $f$의 역할이 리만과 다부에 의해 명백하게 되었지만, 적분영역에 대해서는 그렇지 못 하였다. 죠르단은 1892년의 논문 「정적분에 대한 소견(*Remarque sur les intégrales d'efinis*)」에서 "영역의 종류의 영향은 똑같이 주의 깊게 다루어지지 않았던 것 같다"고 하였다. 그리고는 이것을 출발점으로 하여 $\mathbb{R}^2$ 즉, 평면의 부분집합에 대한 용량론을 전개하였다.

$E\subset\mathbb{R}^2$가 평면의 유계영역이라 하고 변의 길이가 $r$이고 변이 좌표축과 평행한 정사각형들로 분할하자. 죠르단은 이 분할에 대해 $E$에 완전히 포함되는 정사각형들의 합집합 $S$와 $E$의 점을 적어도 하나 포함하는 정사각형들의 합집합 $S+S'$을 생각하였다. 여기서 $S'$은 정확히 $E$의 경계를 포함하는 사각형들로 이루어진다. (그림 2 참조.)



$S$ $S+S'$ $S'$

<그림 2>

이 집합들은 모두 $r^2$과 사각형들의 수의 곱으로 주어지는 잘 정의된 면적을 갖는다. 죠르단은 다음을 보일 수 있었다.

정리 4. 평면의 분할에서 $r$이 점점 작아져서 0으로 가면, $S$와 $S+S'$의 면적은 고정된 극한 $A$와 $a$로 간다.

$A$와 $a$가 같으면 $E$의 경계를 포함하는 집합 $S'$의 면적이 0으로 가야한다. 이로부터 다음을 정의하였다.

정의 1. $E\subset R^2$가 유계집합이라 하자. 그러면 $A$는 $E$의 내용량이라 하고, $a$는 $E$의 외용량이라 하고, $A=a$가 성립하면 $E$는 측정가능이라 한다. 이 경우에 $I(E):=A=a$를 $E$의 용량이라 한다.

앞에서 논한 가정은 바로 $E$의 측정가능성이다. 따라서 $E$가 측정가능할 때 적분

$\int_E f(x,y)de$는 코시-리만합을 그대로 일반화하여 얻을 수 있다.

$f: R^2 \to R$이 측정가능집합 $E \subset R^2$의 내부에서 유계인 함수라고 하자. 죠르단은 $\int_E f(x,y)de$를 다음과 같이 정의하였다.

죠르단의 첫 단계는 유한개의 서로소인 측정가능집합으로 $E$를 분할하는 것 이었다:

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k.$$

$$M_k := \sup\{f(x) : x \in E_k\},\ 1 \le k \le n$$

$$m_k := \inf\{f(x) : x \in E_k\},\ 1 \le k \le n$$

라고 쓰면서, 그는 다부의 아래합과 위합으로부터

$$s(P) := \sum_{k=1}^{n} m_k I(E_k),\quad S(P) := \sum_{k=1}^{n} M_k I(E_k)$$

를 정의하였다. 그리고 다부가 보였다고 언급하면서

"분할이 그것의 원소들의 직경이 0으로 수렴하도록 변하면 $S$와 $s$는 고정된 극한으로 간다"

는 것을 새 용어를 사용하면서 증명을 보였다. 거기서 그는 $\lim S = T$와 $\lim s = t$를 쓰고 다음을 정의하였다.

정의2. $t$는 아래적분(*par defaut*)이라고 불리고, $T$는 위적분(*par exces*)이라고 불린다. 아래적분과 위적분이 일치하면 $f$는 적분가능하다고 한다. 이 경우에 그 값 $\int_E f(x,y)de := t = T$는 $f$의 적분이라고 불린다.

죠르단은 그의 결과들을 그의 유명한 교재 「에꼴 폴리테크닉의 해석학 교재(*Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*)」(1893)에 거의 단어 하나하나 옮겼다. 그래서 그것들이 잘 알려지게 되었고 특히 프랑스에서 *Cours d'Analyse* 는 널리 보급되어 보렐(F. E. E. Borel, 1871~1956)과 르베그(H. L. Lebesgue, 1875~1941)도 읽었다.

1894년과 1897년 사이에 *Ecole Normale*에서 공부한 르베그는 죠르단에 대하여

"집합론의 어떤 부분들을 그의 *Ecole Polytechnique*의 *Cours*에 삽입함으로써 어떤 의미에서 그의 이론을 복구하였다; 그는 그것이 수학의 한 분야라는 것을 확인하였다. 그는 이것을 확인하였을 뿐만 아니라 면적과 집합의 측도에 대한 연구와 적분에 대한 연구에 의해 그것을 증명하였는데, 그것이 어떤 연구결과 특히 내 자신의 결과를 위한 방법을 마련하여 주었다"[22]

22) *Notices sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse: Privat, or Oeuvres Scientifiques 1, 1922 : 97-175

라고 말하였다.

1900년경에 지위가 확립된 프랑스 수학자 중의 하나인 죠르단은 해석학에 대한 집합론적 접근을 조사하고 공인하였다.

## 10. 측도론의 전개

한켈이 함수의 불연속점들의 집합을 묘사할 때, 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합이 임의의 작은 전체 길이를 갖는 구간들에 포함될 수 있는 집합과 일치한다고 가정하였다. 즉, 한켈은 위상적으로 작은 집합과 측도론적으로 작은 집합이 일치한다는 오류를 범하였다.

그러나 옥스퍼드 수학교수인 스미스는 아마도 한켈에 의해 자극받아서 1875년에 발표된 논문 「불연속함수의 적분에 대하여(On the Integration of Discontinuous Functions)」에서 함수의 비약 불연속점을 다루며, 그가 각각 "in close order" 집합과 "in loose order" 집합이라고 부른 조밀집합과 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합을 한켈이 구별한 것을 도입하였다. 그러나 한켈과 대조적으로 그는 임의의 작은 전체 길이를 갖는 구간에 의해 덮어질 수 없는 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합을 만들어냈다. 나중에 발견된 예들도 같은 아이디어에 근거하는데, 기본 아이디어는 구간 [0, 1]로부터 1 보다 작은 전체 길이를 갖는 구간들을 제외시키는 것이다.

자연수 $m>2$에 대해 스미스의 아이디어를 보이면 다음과 같다.

(1) 첫 단계에서 구간을 $m$등분하여 마지막 부분구간을 $I_1$이라 부른다. 이 부분구간은 길이 $\dfrac{1}{m}$을 갖고 이후 단계에서 제외된다.23)

(2) 두 번째 단계에서 남은 $m-1$개의 구간을 각각 길이 $\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{m^2}$을 갖는 부분구간 $m^2$ 개로 나눈다. 마지막 것들이 제외된다. 이것들을 $I_2, \ldots\ldots, I_m$이라 부른다.

(5) 남은 $(m-1)(m^2-1)$ 개의 구간이 각각 $m^3$ 개의 구간으로 등분되고 마지막 것들이 제외된다.

.................

$k$ 번째 단계 후에

$$N(k)=1+(m-1)+(m-1)(m^2-1)+\ldots+(m-1)(m^2-1)\ldots(m^{k-1}-1)$$

개의 서로소인 구간 $I_1, \ldots\ldots, I_{N(k)}$가 제외되고 그들의 전체 길이는

23) $I_1$을 포함하여 이후 제외되는 모든 구간은 열린집합이라 가정.

$$\ell\left(\sum_{n=1}^{N(k)} I_n\right) = 1-(1-\frac{1}{m})(1-\frac{1}{m^2})\dots(1-\frac{1}{m^k})$$

이 된다.

이 과정을 계속했을 때, $X := [0,1] - \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ 은 $[0,1]$ 에서 어느 곳에서도 조밀하지 않다. 그러나 제외된 구간들의 전체 길이는 $1-\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{m^k})<1$ 로 수렴하므로 $X$를 임의의 작은 크기의 구간들로 덮을 수 없다.

사실 스미스는 약간 다른 결론을 유도하였다: 그는 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합 $X$의 부분집합인 구간들의 모든 끝점들의 집합 $Q$(그 자신 $[0,1]$에서 어느 곳에서도 조밀하지 않은)를 생각하고, $Q$에서 유한 비약 불연속점을 갖는 함수 $f$는 적분가능하지 않다는 것을 보였다.

스미스는 한켈 덕분에 조밀한 집합과 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합의 구별을 생각하였다고 하며 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합이 임의의 작은 전체 길이를 갖는 구간들에 의해 덮어질 수 있다는 것을 한켈이 "증명"한 것을 분석하며 그의 증명이 틀린 것 같다고 조심스럽게 말하였다[24].

스미스의 조심스러운 표현은 그 자신 그의 예가 보여준 결과들에 대해 충분히 알고 있지 않았음을 보여준다. 또한 그의 동시대인들도 처음에는 그랬다. 그러나 볼테라의 예와 관련된 다른 연구나 스미스의 결과가 거의 무시되었던 독일에서 1880년 대 초에 어떤 진전이 이루어졌다.

1880년과 82년에 뒤 보아 레이몽(Gustav du Bois-Reymond, 1831~1889)이 적절히 덮어질 수 없는 어느 곳에서도 조밀하지 않은 집합의 중요성을 지적했으며, 하낙(Carl Gustav Axel Harnack, 1851~1888)도 1880년에 삼각급수와 임의의 함수의 표현 가능성 문제를 다루며 "합이 임의로 작게 만들어 질 수 있는 유한한 길이를 가진 구간들에 포함될 수 있는" 집합이 특히 중요함을 알았으나 처음에는 제대로 하지 못하였다.

그러나 하낙은 1881년에 교재 「미분적분학 기초론(*Die Elemente der Differential- und Integralrechnung*)」을 출판하였는데, "합의 극한으로서의 정적분에 대한 일반 정리들"에 관한 단원에서 사용된 개념들을 매우 정확하게 보여 주었다.

리만 적분을 정의한 후에 그는 한켈처럼 $f$의 불연속점들의 집합을 분석하며, 무한한 수의 원소를 갖는 이 집합들에 대해 그가 "이산적(discrete)"이라고 부른 용량 0인 집합과 "선형적(linear)"이라고 부른 다른 집합들을 구분하였다. 그리고 이 집합들을 적분론에 적용하며, 모든 $\sigma>0$에 대해 $\sigma$ 보다 큰 비약을 갖는 불연속점들의 집합 $S_\sigma(f)$가 "이산적"이면 (그래서 용량 0을 가지면) $f$는 점별 불연속(pointwise discontinuous)이고 $S_\sigma(f)$가 "선형적"이면 $f$는 선형적 불연속(lineary discontinuous)

24) *On the Integration of Discontinuous Functions*, Proceedings of the London Mathematical Society, 6, 1875, 140-153에서.

이라고 하였다. 이 용어를 사용하며 그는 다음의 적분가능성에 대한 정리를 보였다.

> 정리 5. "구간에서 점별 불연속인 함수는 적분가능하다..... 선형적 불연속인 함수는 적분가능하지 않다.

즉, 그는 $\int_a^b f(x)\,dx$는 모든 $S_\sigma(f)$의 용량이 0일 때 또 그때에 한해서 존재함을 보였다.

용량론은 칸토르(Georg Cantor, 1845~1918)가 더 진전시켰는데, 그는 1883년의 논문 「무한 선형 점다양체에 대하여(*Über unendliche lineare Punctmannichfaltigkeiten*)」[25]의 4부에서 이 주제를 전적으로 다루었고, 1884년에 나온 6부[26]에서는 오늘날 "외용량"이라고 부를 수 있는 용량을 정의하였다. 칸토르는 "적분에 대한 정리의 일반화에 대한 뒤 보아 레이몽과 하낙의 연구에서 구간들의 합이 주어진 양 보다 작게 유한개의 구간으로 덮어질 수 있는 성질을 갖는 점집합들이 사용 된다"고 하였다[27].

칸토르와 같은 시기에 독립적으로 오스트리아 수학자 스톨츠(Otto Stolz, 1842~1905)도 1884년에 하낙의 아이디어를 분명하게 채택하며 외측도론을 전개시킨 논문[28]을 발표하였다.

하낙은 1885년에 "점집합의 용량에 대하여[29]"를 발표하였는데, "이산적" 집합 즉, "용량 0"의 집합의 정의에서 덮는 구간이 유한개로 제한되는 것을 처음으로 명백히 지적하였다. 그리고 "어떤 의미에서 모든 "가산(countable)" 점집합은 모든 점들이 임의의 작은 합을 갖는 구간들에 포함될 수 있다는 성질을 갖는다" 는 것을 덧붙였다. 그는 구간 $[0,1]$ 에 있는 모든 유리수들을 예로 들며 가산집합의 모든 점들 $a_1, a_2, \ldots\ldots$이 임의로 주어진 양 $\delta > 0$에 대해 $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \delta$ 가 되게 구간들의 길이 $\epsilon_i$가 선택되어 길이 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots\ldots$를 가진 서로소인 구간들에 의해 덮어질 수 있다는 것을 설명하였다.

## 12. 보렐 측도

---

25) *Mathematische Annalen*, 21, 1883, 51-58에 수록.

26) *Mathematische Annalen*, 23, 1884, 453-488에 수록.

27) *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leibzig, 1883

28) *Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwert, Mathematische Annalen*, 23, 1884, 152-156

29) *Uber den Inhalt von Punktmengen, Mathematische Annalen*, 25, 1885, 241-250

보렐은 1894년의 박사학위 논문에서 $\{a_n : n \in N\}$ 이 단순 닫힌 볼록 곡선(simple closed convex curve) $C \subset \mathbb{C}$의 조밀집합일 때, 칸토르의 아이디어를 사용하여, 식

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n},\ z,\ A_n,\ a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$$

에 대해 위 급수가 수렴하는 $C$위의 비가산개의 점들이 존재하므로 위 식이 $C$를 넘어 해석적 확장이 가능함을 보일 수 있었다.

다음으로 그는 "모든 수렴하는 점들의 집합은 무엇일까?" 하는 문제를 생각하였다. 이 문제는 그가 1896/1897 학년도에 *Ecole Normal*에서 강의할 때 자세히 다루어졌으며, 그의 강의에 대한 긍정적 반응으로 그 강의록을 1898년에 "*Leçons sur la théory des fonctions*"로 출판하게 되었다. 거기에 오늘날 우리가 보렐집합이라고 부르는 집합이 처음으로 다루어졌다.

측정가능집합과 그것들의 측도가 중요하게 된 상황을 설명하기 위하여 보렐은 위의 급수 $f(z)$에 대한 실수값 형태를 먼저 생각하였다30).

단위구간 $[0,1] \subset \mathbb{R}$로 국한시켜서 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|},\ x, a_n \in (0,1),\ A_n \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N},\ A := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} < \infty$$

를 생각하자. 여기서 집합 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 은 단위구간에서 조밀하다고 가정한다.

$$v_n(k) := \frac{\sqrt{A_n}}{2k},\ I_n(k) := (a_n - v_n(k), a_n + v_n(k)),\ n \in \mathbb{N}$$

$$B_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(k)$$

라고 놓으면 다음이 성립 한다: $x \in [0,1]$ 이 $B_k$에 속하지 않으면

$$|x - a_n| \geq v_n(k) \Leftrightarrow \frac{A_n}{|x - a_n|} \leq \frac{A_n}{v_n(k)} = 2k\sqrt{A_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

이 된다.

그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x - a_n|}$은 $[0,1] - B_k$ 에서 균등수렴 한다. $D$를 급수가 수렴하지 않는 모든 점들의 집합이라고 할 때, $D \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ 이다. 그러므로 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해 $D \subset B_k$이다.

$B_k$는 최대 전체길이

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{A_n}}{k} = \frac{A}{k}$$

인 구간들로 이루어져 있기 때문에 집합 $D$는 임의의 작은 전체길이를 갖는 가산개의

30) *Leçons sur la théory des fonctions*, p63-69

구간 $I_n(k), n \in \mathrm{N}$에 덮여 질 수 있다.

여기서 $D$는 측도 0인 집합이 된다. 그러나 용량론의 언어로는 급수가 수렴하지 않는 점들의 집합 $D$와 수렴하는 점들의 집합 $[0,1]-D$는 둘 다 내용량 0, 외용량 1을 가져서 측정가능하지 않으므로 두 집합을 구별할 수 없다.

이로부터 보렐은 다음 정의를 하게 되었다:

> "한 집합이 전체길이 $s$인 가산 무한개의 서로소인 구간으로 이루어지면 이 집합은 측도 $s$를 갖는다고 한다. 두 개의 서로소인 집합이 측도 $s$와 $s'$을 가지면 그들의 합집합은 측도 $s+s'$을 갖는다......
>
> 좀 더 일반적으로 측도 $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$을 갖는 가산 무한개의 서로소인 집합이 있으면 그들의 합집합은 측도 $s_1+s_2+\ldots+s_n+\ldots$ 을 갖는다.
>
> 이것들은 모두 측도의 정의로부터 나온다. 이제 여기에 몇 개의 새 정의가 있다: 측도 $s$인 집합이 측도 $s'$인 집합 $E'$의 모든 점을 다 포함하면 집합 $E-E'$은 측도 $s-s'$을 갖는다 ....
>
> ............
>
> 위의 정의에 의해 측도가 부여될 수 있는 집합을 측정가능하다고 한다 ...."[31]

보렐은 측정가능집합 체계가 얼마나 광범위한지에 대한 문제는 건드리지 않았다. 대신 그는 위의 정의로부터 나오는 4 개의 중요한 성질을 강조하였다:

> "가산 개의 집합의 합의 측도는 그들의 측도의 합이다[32]; 두 집합의 차의 측도는 그들의 측도의 차이다[33]; 측도는 항상 음이 아니고 양의 측도를 가진 모든 집합은 비가산이다."

그의 정의와 관련하여 보렐은 한 어려움에 직면하였다. 그의 급수에 대한 수렴하지 않는 점들의 집합 $D$는 측도 0인 보렐집합의 부분집합이다. 그러나 보렐의 정의로부터 $D$가 측정가능집합이라는 것이 나오지 않는다. 따라서 그는 다음의 관례를 채택해야했다. 집합 $E$가 각각 측도가 $a$와 $b$인 보렐측정가능집합 '사이에 샌드위치가 되었다'면 $E$가 측정가능인지 아닌지 걱정하지 않고 $E$의 측도가 $\geq a$이고 $\leq b$라고 하자. 집합 $D$는 물론 둘 다 측도 0인 공집합과 집합 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_k$ 사이에 '샌드위치가 되었다'. 그래서 보렐의 관계에 의해 $D$에는 측도 0이 부여되었다.

보렐이 에꼴 노르말(*Ecole Normal*)에서 강의하던 때에 르베그가 있었고 그로 하여금 보렐의 사고를 이어받아 결심을 맺게 하였다.

---

31) *Leçons sur la théory des fonctions*, p47-48

32) 집합이 서로소임을 가정한 듯하다

33) 하나가 다른 하나에 포함됨을 가정

## 13. 르베그 측도와 적분

르베그는 죠르단의 *Cours d'analyse*가 지배했고 해석학에서 집합론적 방법이 획기적으로 채택되었던 시기에 수학교육을 받았다. 1894년과 1897년 사이에 그는 에꼴 노르말의 학생이었기 때문에 보렐의 강의를 들을 수 있었을 것이다.

앞에서 이미 보았던 대로 르베그는 리만적분이 충분히 일반적이지 않은 것에 자극받아 박사학위 논문을 위하여 리만적분에서 나왔던 문제들을 해결하고자 하였다.

1902년에 발표한 박사학위 논문[34]에서 르베그는 죠르단과 마찬가지로 집합의 측정가능성 문제로부터 시작하였다. 처음부터 그는 측도 $m$이 가산 가법적(countably additive)이어야 한다고 하였다. 즉, 많아야 가산개의 서로소인 집합 $E_i$, $i \in I$ 에 대해

$$m(\sum_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} m(E_i)$$

가 성립해야 한다.

측도의 정의에 대한 그의 아이디어를 단위구간 $[0,1]$의 부분집합에 대해 보도록 하자.

임의의 구간(예를 들어 $[0,1]$)의 길이를 단위로 채택하면 모든 임의의 구간 $I$에 그것의 길이 $L(I)$를 $I$의 측도로 정하는 것이 가능하다. 그러면 가산개의 서로소인 구간들 $I_n$ $(n \in \mathrm{N})$에 대해 원했던 가산 가법성(countable additivity)이 성립한다. 즉,

$$m(\sum_{n=1}^{\infty} I_n) = L(\sum_{n=1}^{\infty} I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n).$$

이렇게 생각하는 데에서 보렐의 영향을 쉽게 볼 수 있다. 르베그는 보렐을 언급하였고 보렐의 생각을 보완하였다. 사실, 임의의 집합 $E$에 측도를 부여하고자 하면, $E \subset \bigcup_{n \in I} I_n$ (여기서 $I \subset \mathrm{N}$이고, $I_n$은 구간)에 대해

$$m(E) \le m(\bigcup_{n \in I} I_n) \le \sum_{n \in I} L(I_n)$$

이 성립해야 한다. 그래서 $E$의 덮개(covering)에 대해 $\sum_{n \in I} L(I_n)$ 값들의 하한(infimum)이 $E$의 가능한 측도에 대한 자연스러운 상계(upper bound)가 된다.

그래서 르베그는 다음과 같이 외측도를 정의하였다.

정의3. 유계집합 $E \subset \mathbb{R}$에 대해

$$m_e(E) := \inf \{\sum_{n \in I} L(I_n) : I \subset \mathrm{N},\ E \subset \bigcup_{n \in I} I_n\}$$

이 $E$의 외측도를 나타내도록 하자.

그리고는 집합 $E \subset [0,1]$에 대해 그것의 여집합 $C(E) := [0,1] - E$ 를 정의하고, $m(E)$가 정의되면

34) *Intégrale, Longueur, Aire*

$$m(E) \geq m([0,1]) - m_e(C(E))$$

여야 한다고 하였다. 그래서 다음을 정의하였다.

정의4. $E \subset [0,1]$에 대해

$$m_i(E) = m([0,1]) - m_e(C(E))$$

는 $E$의 내측도이다.

$m_e(E) + m_e(C(E)) \geq m([0,1])$임을 알 수 있어서 $m(E)$가 정의된다면

$$m_i(E) \leq m(E) \leq m_e(E)$$

이다. 이것으로부터 자연스럽게 다음을 정의하였다.

정의5. 유계집합 $E \subset \mathbb{R}$은 $m_i(E) = m_e(E)$가 성립하면 측정가능이라 하고 이때 $m(E) := m_i(E) = m_e(E)$를 $E$의 측도로 정의한다.

가산개의 측정가능집합의 합집합은 측정가능집합이고 이 집합들이 서로소이면 측도는 가산 가법적임이 나온다.

르베그, 보렐, 죠르단의 측정가능집합 사이의 관계는 무엇인가?

우선 르베그외측도 $m_e(E)$는 $E$를 많아야 가산개의 구간으로 덮는 반면에 죠르단 외용량 $\bar{I}(E)$는 유한 덮개로 제한하므로 $m_e(E) \leq \bar{I}(E)$이다. 죠르단 내용량 $\underline{I}(E) = 1 - \bar{I}([0,1] - E)$이므로 이것은 르베그의 정의 $m_i(E) = 1 - m_e([0,1] - E)$와 일치하고 $\underline{I}(E) \leq m_i(E)$가 곧장 나온다.

그러므로 $\underline{I}(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq \bar{I}(E)$로부터 모든 죠르단측정가능집합은 르베그 측정가능이고, 이 경우 용량과 측도는 일치한다.

르베그의 정의는 길이의 단위를 구간 $[a,b]$가 길이 $b-a$를 갖도록 선택하면 보렐 집합이 르베그측정가능임을 알 수 있고, 보렐의 정의는 측도 0인 보렐집합의 부분집합이 보렐측정가능임을 보장하지 않지만, 르베그의 정의로부터는 르베그측도 0인 집합의 부분집합이 르베그측정가능이라는 것이 나온다. 따라서 르베그의 측정가능 개념은 보렐 개념의 확장이 된다.

이와 같이 르베그는 보렐의 아이디어를 매우 자연스러운 방법으로 일반화하였다. 그러나 보렐과 대조적으로 르베그는 이 아이디어를 적분론에 적용시켰고 이것을 그의 박사학위 논문 두 번째 단원에서 보였다.

논문에서 르베그는 그의 정의가 정적분개념을 어떤 성질들을 갖는 보다 더 일반화된 것으로 만들어내고자 하는 욕구에 의해 만들어졌다고 하였다. 특히 새로운 정의는

- 리만의 정의를 특별한 경우로 포함해야 하고
- 일변수나 다변수 경우를 크게 구별하지 않아야 하고
- 도함수의 정적분을 위 한계의 함수로 간주했을 때 원시함수가 되고, 그래서 미분적분학의 기본문제가 풀리는 것을 확실하게 보장해야한다

고 하였다.

1926년 5월 코펜하겐에서의 컨퍼런스에서 르베그는 「적분개념의 발달(*Sur le developpement de la notion d'intégrale*)」에 대한 강의를 하였는데, 거기서 그는 그의 적분에 대한 생각의 근원을 말하였다.

르베그는 코시-리만-다부의 적분정의가 논리적 관점에서 매우 자연스러워 보인다고 설명하였다:

> 연속함수 $f$에 대해 $(a,b)$를 점점 더 작은 구간 $(x_i, x_{i+1})$로 나누는 것은 $(x_i, x_{i+1})$에서 $f(x)$의 하계와 상계인 $\underline{f_i}$와 $\overline{f_i}$의 차 $\overline{f_i}-\underline{f_i}$를 점점 더 작게 만드는 것이 명백하고
>
> $$\underline{S}=\sum \underline{f_i}(x_{i+1}-x_i) \text{와} \quad \overline{S}=\sum \overline{f_i}(x_{i+1}-x_i)$$
>
> 의 차 $\overline{S}-\underline{S}$를 0으로 가게 하는 것이 분명하다. 그래서 $S=\sum f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$는 $\underline{S}$와 $\overline{S}$의 사이에 놓이므로 $S$의 극한이 존재한다.

"그러나 모든 곳에서 불연속인 함수에 대해서도 같은 경우가 될 이유가 없다" 라고 자신의 생각을 말하였다. 더 작은 구간 $(x_i, x_{i+1})$을 택하는 것이 대응되는 $\overline{f_i}-\underline{f_i}$를 더 작게 한다는 보장이 없다고 하였다. 그래서 그는 다음을 말하였다.

> "달성해야 할 목표 즉, 작게 차이가 나는 $f(x)$의 값들을 모으거나 분류하는 것을 향해 나아가자. 그러려면 $(a,b)$를 나누는 것이 아니라 $(a,b)$에서 $f(x)$의 하계와 상계가 경계가 되는 구간 $(\underline{f}, \overline{f})$를 분할해야 하는 것이 분명하다."

위와 같이 르베그는 정말로 새로운 방향으로 나아갔다. [12] 에 의하면 르베그적분의 기본 아이디어는 다음과 같다.

$(\underline{f}, \overline{f})$를 $\epsilon$ 보다 작게 차이가 나는 수 $y_i$들로 분할한다. 집합 $E_i$를

$$y_i \le f(x) \le y_{i+1}$$

인 $x$들의 집합이라 한다. 모든 $y_i$에 대해 집합 $E_i$가 측정가능인 함수 $f(x)$를 측정가능함수라고 부른다.

$\eta_i$가 $y_i$와 $y_{i+1}$ 사이에서 택해 진 임의의 수

$$y_i \le \eta_i \le y_{i+1}$$

이면, $f$가 측정가능함수일 때 합

$$S=\sum \eta_i m(E_i)$$

를 생각한다. $y_i$를 $\epsilon$이 0으로 가게 변화시키면 합 $S$가 명확한 극한으로 가는 것을 쉽게 증명할 수 있고, 이 극한이 정의에 의해 $\int_a^b f(x)\,dx$ 이다.

$f$가 유계함수가 아닌 경우에도 마찬가지로 할 수 있다. 다만 무한히 많은 $y_i$와 그에 따른 집합 $E_i$들을 생각해야 하고 급수

$$S = \sum \eta_i m(E_i)$$

가 수렴해야 할 것이다. 급수 $S$가 $y_i$들의 한 선택에 대해 수렴한다고 가정하면 $y_i$의 다른 선택에 대해서도 수렴하고, 적분의 정의는 위 유계함수의 경우와 같다.

위 과정에 의해 적분될 수 있는 모든 함수들을 적분가능(summable)함수라고 한다.

집합 $E$위에서의 $f$의 적분도 $E$가 측정가능집합이면 마찬가지로 정의된다.

## 14. 결론

르베그적분은 리만적분의 일반화다. 즉, 모든 리만적분가능함수는 르베그적분가능하다. 그리고 디리클레함수처럼 리만적분가능하지 않은 르베그적분가능 함수가 있다.

르베그는 그의 박사학위 논문에서 다음 정리들을 보임으로써 리만적분의 약점[35]을 극복하였다.

정리 6. $[a, b]$에서의 함수 $f$가 유계도함수 $f'$을 가지면 $f'$은 르베그적분가능하고 $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ 이다.

정리 7. 절대값이 위에서 균등유계인 적분가능 함수 $f_n$들의 함수열이 극한함수 $f$를 가지면 $f$의 적분은 $f_n$의 적분의 극한이다.

르베그적분이 나옴으로써 '임의의 함수'가 해석학적 방법으로 다루어질 수 있다는 푸리에의 단순한 믿음이 확인되었다.

35) 정리 2와 정리 3과 관련된 것(p13과 p16 참고).

## 참고 문헌

1. Darboux, G., *Memoire sur les fonctions discontinues*, Annales sciéntifiques de l'Ecole Normale Supéreure, 2éme série, IV, 1875 : 57-112
2. Euler, L., *Institutiones calculi differentialis*, St. Petersburg, 1755
3. Euler, L., *Institutiones calculi integralis*, St. Petersburg, 1768-1780
4. Fourier, J. B. I., *Théorie analytique de la chaleur*, 1822, Paris
5. Grabiner, Judith V., *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Dover 1981
6. Grattan-Guiness, L., editor, *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910 : An Introductory History*, Duckworth, 1980.
7. Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integral/ Its Origins and Development.*, Madison: University of wisconsin Press, 1970
8. Iushkevich, A. P., *On the origins of Cauchy's concept of the definite integral*(in Russian), Academia Nauk SSSR 1, 1974 : 373-411
9. Jahnke, Hans N., editor, *A History of Analysis*, AMS, 2003
10. Laugwitz, Detlef, *Bernard Riemann, 1826-1866 : Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birkhaeuser, 1999.
11. Lebesgue, H., *Notices sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse: Privat, or Oeuvres Scientifiques 1, 1922 : 97-175
12. Lebesgue, H., *Sur le developpement de la notion d'intégrale*, Matematisk Tidsskrift 19, 1926, 54-74

# Development of the Integral Concept (from Riemann to Lebesgue)

Department of Mathematics, Ewha Womans University **Kyung Hwa Kim**

In the 19th century Fourier and Dirichlet studied the expansion of "arbitrary" functions into the trigonometric series and this led to the development of the Riemann's definition of the integral.

Riemann's integral was considered to be of the highest generality and was discussed intensively. As a result, some weak points were found but, at least at the beginning, these were not considered as the criticism of the Riemann's integral.

But after Jordan introduced the theory of content and measure-theoretic approach to the concept of the integral, and after Borel developed the Jordan's theory of content to a theory of measure, Lebesgue joined these two concepts together and obtained a new theory of integral, now known as the "Lebesgue integral".

*Key words*: Riemann integral, Lebesgue integral

2000 Mathematical Subject Classification : 01A55

ZDM Subject Classification : A30

접수일 : 2008년 4월 25일 수정일 : 2008년 5월 30일 게재확정일 : 2008년 6월 5일