한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 53 - 66

비와 비례 개념의 의미와 표현에 대한 역사적 발달 과정

청담중학교 박정숙
pjungsook@hanafos.com

비와 비례 개념은 학생들에게 매우 친숙하지만 어렵게 느껴지는 개념이다. 본고에서는 비와 비례 개념의 의미와 표현에 대한 역사적 발달 과정을 고찰하여 현대의 비와 비례 개념의 의미를 확인하고자 하였다. 비와 비례 개념의 의미는 처음에 산술적인 의미로 시작되었으나 통약불가능한 값의 발견으로 기하적인 의미가 산술적인 의미를 대체하게 되었고 다시 대수 표기법의 발달로 인해 산술적 의미와 기하적 의미를 모두 포함한 대수적인 의미로 확장되었다. 비와 비례 개념의 의미와 표현에 대한 역사적 발달 과정을 통해 수학 개념의 의미는 기호 발달에 영향을 주고 기호 발달은 수학 개념의 의미를 확장해 가는데 도움을 줌을 알 수 있다.

주제어 : 비, 비례, 통약불가능성

0. 들어가는 말

비(ratio)와 비례(proportion)는 일상생활 및 수학이나 과학에서 자주 사용되고 있지만 특별한 구분 없이 혼용하여 사용되고 있는 사례가 많다. 예를 들어 황금비(golden ratio)와 같은 용어도 중학교 수학 교과서에서 황금비, 황금비율, 황금비례 등이 혼재되어 있고 미술 교과서에서는 황금비례, 가정교과서에서는 황금비율이라고 사용하는 등 같은 개념에 대하여 여러 가지 용어를 사용하고 있다.

영어에서 비를 뜻하는 “ratio”라는 단어는 ‘생각하다, 어림하다’라는 뜻을 가진 라틴어 동사 reri의 과거분사 ratus에 유래된 것으로서 이 말의 의미는 계산, 관계, 이성 등을 의미했으며, 중세 시대의 산술에서는 계산을 뜻하는 것으로 사용되었다(Smith, 1958). 그러나 고대 그리스의 Euclid는 「원론(Elements)」에서 “비는 같은 종류의 두 양 사이의 크기에 대한 일종의 관계이다(Heath, 1956, p.114).”라고 정의하였고 Freudenthal(1983)은 비를 수나 량의 순서쌍에 집합에서 동치 관계로 얻어지는 동치류라고 하여 관계임을 분명히 하고 있다. 비를 관계로 볼 것인지, 수로 볼 것인지에 대

한 논의는 그 역사가 깊으며 비가 이해하기 어려운 개념 중의 하나인 이유이다.

영어에서 비례를 뜻하는 'proportion'은 처음부터 비의 상등을 의미한 것이 아니라 중세 라틴어 학자들이 $a:b$를 'proportio'라고 불렀던 것에서 비롯되었으며 $a:b=c:d$는 'proportionalitas'라고 불렀다. 따라서 중세 시대와 르네상스 시대에는 'ratio'를 대신하여 'proportion'이라고 쓰는 것이 더 일반적이었다(Smith, 1958). 오늘날 용어 사용에 있어 비와 비례라는 단어를 사용할 때 혼란스럽게 생각되는 원인 중의 하나라고 볼 수 있다.

비와 비례 개념의 정의가 문서로 남아있는 것은 고대 그리스의 「원론」에서 비롯되었으나 그리스 수학에서 새롭게 창조한 개념은 아니다. 이집트 수학의 많은 부분이 비례의 아이디어로 설명할 수 있는 것처럼 비례 개념은 그리스 이전 수학에서도 중요한 역할을 했다. 따라서 비례의 아이디어가 어떻게 시작되었는지 용어의 기원에 근거하여 설명하는 것은 별로 도움이 되지 않는다. 비례의 아이디어는 매우 고대로 거슬러 올라가며 인간의 근원적인 사고로 귀착되기 때문이다(Szabó, 1978).

고대 그리스로 넘어가면서 비례 개념은 통약불가능한 값의 발견으로 산술적인 의미를 가지는 것과 기하적 의미를 가지는 것으로 구분하여 다루게 되었다. 고대 그리스 수학자 Nichomachos는 비례를 산술적 특성을 가지고 있는 것으로 보았으나 Eudoxus는 기하적 특성을 가지고 있는 것으로 보았다(Gullberg, 1997). Euclid 「원론」의 비례 부분은 Eudoxus의 이론을 거의 대부분 받아들이고 있으므로 기하적 의미를 가지고 있다고 할 수 있다. 반면 수를 다룬 이론에서 비례를 다시 정의하거나 복비에 관한 부분에서 산술적인 비의 해석가능성을 남겨놓았다. 본고에서는 비와 비례 개념의 역사적 발달 과정을 분석함으로써 산술적 의미를 지니고 있던 비와 비례 개념이 고대 그리스 시대에 산술적 의미와 기하적 의미를 동시에 지니게 된 경위와 중세 시대를 거쳐 현재에 이르면서 대수적 의미로 변하게 되는 과정을 살펴본다. 이 과정을 통해 수학 개념의 의미는 기호 발달에 영향을 주고 기호 발달은 수학 개념의 의미를 확장해 가는데 도움을 줌을 알 수 있을 것이다.

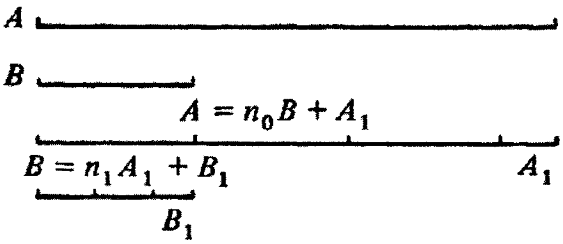
1. 피타고라스 학파의 비와 비례

통약불가능한 값이 발견되기 이전의 비와 비례는 음악 이론을 바탕으로 산술적 의미를 가지고 있었다. 특히 피타고라스학파는 화음이 현 사이의 고정된 비와 관련 있음을 발견하고, 음의 간격을 수치적 비로 나타내었다. 현의 길이를 수치적으로 측정하여 현의 길이가 절반일 때 한 옥타브 높은 소리가 나는 것을 1:2로, 원래의 현과 2/3 또는 3/4 길이의 현과 같이 연주하면 아름다운 화음이 나는 것을 발견하여 2:3, 3:4 등과 같은 비를 발견하였다. Szabó(1978)는 그리스 시대의 비와 비례를 나타내는 용어들이 음악 이론에 근거를 둔 용어에서 변형되었음을 지적하며 통약불가능한 값의 발

견 이전의 산술적 의미의 비와 비례 이론은 음악 이론에 바탕을 두고 있다는 주장을 지지하였다.

음악 이론과 깊은 관련을 가지며 시작된 산술적 의미의 비와 비례 이론을 산술과 기하에 적용하기 시작하면서 비와 비례 개념에 변화를 가져오게 된다. 이 때 비의 개념은 특별히 정의하지 않고 자연스럽게 받아들인 반면 서로 다른 두 수들의 비가 같음을 판별하는 비례 개념이 중요한 문제로 대두되었다. 두 비가 같음을 증명하는 방법 중 하나는 두 수의 최대공약수를 찾는데 이용하는 유클리드 호제법의 원리와 유사한 anthyphairesis 방법이다. 이 방법의 기원은 분명치 않으나 이미 Aristotle도 알고 있었다고 한다. 구체적인 방법은 다음과 같다.

같은 종류의 크기 A, B (A>B)[1]가 있다고 하자. 큰 수 A에서 작은 수 B를 n_0번 빼고 난 나머지 A_1은 B보다 작은 수가 되면 이번에는 B에서 A_1을 빼나간다. B에서 A_1을 n_1번 빼고 난 나머지 B_1가 A_1보다 작게 되면 A_1에서 나면 B_1을 빼나간다. 이 과정을 간단히 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1] anthyphairesis 방법 (Fowler, 1979)

이 과정이 유한으로 끝날 경우에 통약가능하다고 하며 유한으로 끝나지 않을 때 통약불가능하다고 한다. 한다. 이 과정에서 나타난 수열 n_0, n_1, ...을 Anth(A, B)=[n_0, n_1, ...]로 나타낸다(Fowler, 1979). anthyphairesis 방법이 「원론」에 사용된 예를 살펴보면 두 군데이다. 제 7권에서 두 수의 최대공약수를 찾을 때, 다른 하나는 제 10권에서 두 양이 통약가능한지 그렇지 않은지를 판단할 때 사용하였다. 즉, anthyphairesis 방법은 처음에는 이산적인 수의 성질을 연구하는 산술에만 적용되었는데 피타고라스 학파가 기하에 적용하면서부터 임의의 두 크기가 통약가능하면 두 수의 비로 나타낼 수 있음을 알게 되었다(Filep, 2003). anthyphairesis 방법은 비례의 의미가 산술과 기하를 통합하는 것으로 확대할 수 있도록 해주었으나 통약불가능한 길이의 발견은 비례 개념이 포함된 기하적 증명을 모두 무효로 만들었으며 새로운 비례 이론이 발전하는데 중요한 공헌을 하였다.

통약불가능성은 산술적 의미의 비례를 산술과 기하에 모두 적용할 수 있도록 확장

1) 여기서 A, B는 모두 선분이라고 가정한다.

을 하는 과정에서 발견된 것이다. 두 비의 같음을 결정하는 anthyphairesis 방법은 통약가능한 양이나 통약불가능한 양 모두 적용할 수 있는 방법이나 기하적 양에 대해서 이 방법을 받아들이지 못했던 것은 유한한 길이인 통약불가능한 선분의 길이의 비가 무한 수열로 표현되었기 때문이며 이를 당시에 받아들일 수 없었기 때문이다(Szabó, 1978).

산술적 의미 즉 이산량에서 비례 이론이 시작되었다는 것은 학생들이 연속량에 비해 이산량인 경우 비례의 의미를 더 자연스럽게 받아들일 수 있음을 보여주는 것이며 실제 교육과정에서 비를 도입하는 경우에도 이산량에서의 비로 도입하는 근거를 제기한다고 볼 수 있다. 또한 두 양의 비를 구하는 anthyphairesis 방법은 연속적인 뺄셈을 이용한 방법이므로 학생들이 두 양의 비를 구할 때 승법적 방법이 아닌 차를 이용하는 방법이 비를 계산하는 자연스러운 방법임을 추측할 수 있게 해준다. 통약불가능성의 발견으로 비례의 의미는 확장되었지만 그것을 뒷받침할 수 있는 기호가 그 의미를 반영할 만큼 충분히 발달하지 못했기 때문이며 새로운 비례 이론이 필요하게 된 계기가 되었다.

2. 유클리드 원론의 비와 비례

두 선분이 통약불가능한 경우 비의 상등을 해결하게 된 것은 Eudoxus의 비례론 덕분이다. Euclid는 「원론」에서 되도록 비와 비례를 사용하지 않고 전개하려고 노력하였으며 비례를 중심적으로 다룬 제 5권에서는 Eudoxus의 비례론을 채택하여 이론을 전개하였다. 그러나 수에 관한 부분에서는 이전에 사용한 산술적 비의 전통을 유지함으로써 기하적 의미의 비례와 산술적 의미의 비례가 「원론」에 동시에 나타나게 되었다. Katz(1998)는 Euclid의 비례 이론이 방정식 이론, 분수의 성질 그리고 실수 체계의 본성과 같이 다양한 영역의 본성을 결정하였다고 주장할 만큼 제 5권은 현대에 이르기 까지 수학 연구의 방향에 큰 영향을 미쳤다.

「원론」에서 비례에 대한 기본 개념을 다루고 있는 책은 제 5권과 제 7권이며 제 5권에서는 량[2]에 대한 비례를 다룬 반면 제 7권에서는 수에 대한 비례를 다루고 있다. 량에 대한 비례와 수에 대한 비례를 따로 다룬 것은 아리스토텔레스가 량과 수를 구분하고 있는 전통에 따른 것이다(Katz, 1998). 다시 말하면 제 5권은 연속량 즉 기하적 의미의 비례론을 다룬 반면에 제 7권은 이산량 중 산술적 의미의 비례론을 언급하고 있다고 볼 수 있다.

---

2) 여기서 '량'은 영어의 'magnitude'를 뜻한다. quantity를 '양'으로 번역하게 되는 경우가 많은데 Heath(1956)는 원론을 번역하면서 quantity 대신 magnitude를 사용했기 때문에 quantity와 구별하기 위하여 '량'이라는 단어를 사용하기로 한다.

제 5권에 나타난 비와 비례의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

정의 3 : 비는 같은 종류의 두 량(magnitude) 사이의 크기(size)에 대한 일종의 관계이다.

정의 4 : 두 량(magnitude)이 서로 비가 있다고 하는 것은 어느 것에 곱을 하면 다른 것보다 더 크게 할 수 있다.

정의 5 : 네 개의 량이 있을 때, 첫째와 둘째의 비, 셋째와 넷째의 비가 같다는 말은 첫째와 셋째에 같은 수를 곱해 곱을 취하고 둘째와 넷째에 다른 어떤 수를 곱해 곱을 취했을 때, 전자가 후자보다 더 크거나, 전자가 후자와 크기가 같거나, 전자가 후자보다 더 작게 된다는 것이다.

정의 6 : 같은 비를 갖는 양을 비례한다고 한다. (Heath, 1956, p114)

제 5권에 나타난 정의에 따르면 비는 두 양을 비교하는 방법이며 하나의 수 또는 양으로 표현하지 않고 단지 관계의 범주에 속할 뿐이다. 또한 어떻게 비교를 하는지 구체적인 방법에 대해 나타나있지 않으므로 불충분한 정의라고 볼 수 있다. 제 5권에서는 막연하게나마 비를 정의하였지만 수에 관해 논리적으로 정리한 첫 번째 책인 제 7권에서는 비의 정의조차 찾아볼 수 없다. 정의 3에서 Euclid가 다룬 량(magnitude)은 기하학에서의 선분과 같이 연속적인 양이었다. Euclid가 통약가능한 비 뿐 아니라 통약불가능한 두 량의 비 역시 인정하고 있다는 사실은 정의4에서 드러난다(Heath, 1956). '어느 것에 곱을 하면 다른 것보다 더 크게 할 수 있다.'는 성질은 통약불가능한 유한한 양에서도 성립하기 때문이다. 또한 정의 4는 비가 승법적 관계임을 보여주고 있다.

비를 정의한 정의 중 가장 중요한 것은 정의 5번이며 정의 5번은 Eudoxus의 비례론을 받아들인 증거로 볼 수 있다. 제 5권의 전체적인 구성 절차를 살펴보면 $a:b$ 그리고 $c:d$ 각각에 의미를 부여하는 것이 아니라 두 비가 같음을 정의할 뿐이다. 정의 5는 Eudoxus가 정의한 것과 동일한 방법으로 두 비가 같다는 것이 무엇을 의미하는지 제시하고 있으며 통약가능한 양과 통약불가능한 양의 비를 모두 포함한다는 점에서 의미 있는 정의이다(Heath, 1956). 또한「원론」의 명제 VI.13번 '임의의 두 선분 사이에 비례가 성립한다.'는 것에 대한 완전한 증명은 정의 5를 기반으로 해서만 가능하다. 정의 5를 현재 사용하고 있는 대수 기호를 사용하여 다시 나타내면 다음과 같다.

양의 정수 m, n에 대하여 $ma > nb$일 때는 언제나 $mc > nd$가 되고, $ma = nb$일 때

는 언제나 $mc = nd$가 되며, $ma < nb$일 때는 언제나 $mx < nd$가 된다면 $a:b = c:d$이다. (Katz, 1998, p.80)

「원론」이 일반적인 모든 량에 대하여 성립하는 이론을 구축할 수 있었던 것은 부등식을 사용하여 간접적으로 비를 정의하였기 때문이다. 량의 비 $a:b$가 $c:d$와 같다는 것을 정의한 위의 정의 5를 다르게 표현하면 임의의 정수 m,n에 대하여 다음이 성립함을 의미한다.

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{n}{m}, \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{n}{m}, \quad \frac{a}{b} < \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} < \frac{n}{m}$$

이는 수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 서로 같다는 개념을 각각의 수보다 '큰 유리수의 집합', '작은 유리수의 집합', '같은 유리수의 집합'이 서로 완전하게 일치한다는 사실을 이용하여 정의한 것으로, 현대적인 관점으로 보자면 '데데킨트의 절단(Dedekind cut)'을 이용한 실수의 정의와 같은 의미라고 볼 수 있다(Boyer, 1968). 따라서 비는 실수와 동형일 수밖에 없다(Smith & Confrey, 1994). 그러나 고대 그리스 시대에는 무리수라는 개념이 발전하지 못했으며 통약불가능한 양을 수로 다루지 못했던 것은 통약불가능한 양을 anthyphairesis 방법을 사용하여 수로 나타내면 무한소수나 연속된 분수로 표현되어 직관적으로 받아들일 수 없었기 때문이다. 따라서 수 이론을 발전시키기 보다는 수를 선분의 길이로 대체하여 이론을 전개시켜 나갔다.

오늘날 비례는 $a:b = c:d$ 또는 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$로 정의할 수 있지만 그리스 사람들은 통약가능한 두 량을 나누는 경우에만 분수를 인정하였다. 비례에 대한 정의는 제 5권의 정의 6과 제 7권의 정의 20에서 찾아볼 수 있다. 구체적인 내용은 다음과 같다.

정의 20 : 수들이 서로 비례한다는 말은 첫째 수가 둘째 수의 곱이거나, 같거나, 몫일 때, 셋째 수가 그와 똑같이 넷째 수의 곱이거나, 같거나, 몫인 것을 말한다. (Heath, 1956, p278)

Euclid는 제 5권에서는 정의 3, 정의 4, 정의 6을 통해 비를 관계로 정의하고 비례를 같은 비를 갖는 것으로 정의하는데 비해 제 7권 20번 정의에서는 수 사이의 비례 관계를 직접 정의하여 비례를 좀 더 이해하기 쉽게 제시하였다. 그러나 비례의 정의를 서로 다르게 제시하여 두 가지 해석이 가능하도록 하는 계기를 제공하였다. 수에 대한 이론을 살펴보면 그리스 인들이 유리수 이론을 특별히 개발하지 않았으며 대신 수에 대한 비와 비례를 조작하는 기술을 개발하였다. 예를 들어, 제 7권에서는 '$a:b::c:d$이면 $a:c::b:d$이다. (제 7권 명제 13)', '$a:b::c:d$이면 $(a+b):b::(c+d):d$이

다. (제 7권 명제 12)', '$a:b::c:d$이면 $(a-b):b::(c-d):d$이다. (제 7권 명제 11)'와 같이 항의 교환에 따른 비례의 보존, 비례 사이의 덧셈과 뺄셈 등 여러 규칙들을 제시하고 있다.

비를 양으로 생각하는 사람들에게 비는 분수와 같은 방법으로 나타낼 수 없으며 비례는 방정식으로 표현할 수 없다. 반면 비를 수로 생각하는 사람들은 $a:b=c:d$로 나타낼 수 있으며 이 때 콜론은 나누기의 기호이다. Oughtred는 <수학의 열쇠(Clavis mathematicae)>에서 비의 기호로 점을 도입하였다. 그는 기하적 비례를 $a.b::c.d$와 같이 표현하였다. 오늘날 비례는 $a:b=c:d$ 또는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$로 나타낸다. 이를 $ad=bc$로 구한다. 이 규칙은 상업에서 주로 사용되었으며 6세기 경 인도인에 의해 처음 사용되어진 것으로 보인다. 삼수법(rule of three)이라는 이름도 Brahmagupta와 Bhaskara에 의해 이름 붙여졌으며 아랍인들과 중세시대 라틴어 번역가들 역시 사용하였다. "샤프란 2와 2분의 1을 사려면 niska 7분의 3이 필요하다. 9 niska로 샤프란을 얼마나 살 수 있는가?"와 같은 문제를 그는 $\begin{matrix}3&5&9\\7&2&1\end{matrix}$로 표현하였다. 이것은 $\frac{3}{7}N.2\frac{1}{2}P.9N.$으로 표현할 수 있다. 이 식을 $x:2\frac{1}{2}=9:\frac{3}{7}$로 표현하기 전까지는 비례의 아이디어는 보이지 않는다. 르네상스시대에 오면서 수학자들이 상업적 산술에 관심을 보이면서 두 비 사이에 중요한 연결이 있음을 알아내었다.

현대수학에서는 량이 수에 쉽게 포함될 수 있지만 Euclid 시대에는 그렇지 못했다. Euclid가 전체적으로 비에 관하여 상등(equal)의 기호를 사용하지 않았던 것은 비를 량 또는 수와 다른 것으로 인정했다는 의미라고 할 수 있다(Grattan-Guinness, 1996). 비례성의 정의가 수로부터 일반적인 양에 이르기 까지 확장할 수 있었던 것은 통약불가능성의 존재가 밝혀지면서 통약불가능성에 대한 이론의 발달 덕분이다(Szabó, 1978). 비례 이론이 통약불가능한 수도 포함하여 전개할 수 있게 됨으로써 실수 이론에서 할 수 있는 대부분의 것을 할 수 있게 되었다.

역사적으로 수와 비는 서로 독립된 두 개의 개념이라고 볼 수 있다. 원론에서 비는 $a:b$라는 기호와는 독립적인 의미로 시작되었으며, 고대 그리스인들은 모든 크기는 공통된 단위로 만들 수 있기 때문에 세기(counting)가 량의 크기를 지칭하는 것으로 충분하다고 보았다(Smith & Confrey, 1994). Euclid 원론에서 수와 비를 서로 구분하고는 있지만 수에서의 비례와 비에서의 비례를 각각 정의하여 비례에 대한 개념의 경계가 분명치 않았다. Euclid 시대의 비례 개념은 같은 종류의 크기 사이의 비의 상등을 의미하였으며 서로 다른 종류의 크기 사이의 비의 상등을 다루지 않았다. 같은 종류의 크기 사이의 비의 상등인가 그렇지 않은가는 18세기까지 주요 관심사가 되었다.

3. 중세 시대의 비와 비례

Euclid 이래 1500년 동안 수와 비는 서로 다른 종류로 인식되었으나(Smith & Confrey, 1994) 고대와 중세 시대 동안 운동의 수학적 표현은 비례로 표현되었으며 과학과 천문학 등의 실용적 문제를 해결하는데 활용되었다. 이 과정에서 기하적 의미의 비보다 산술적 의미의 비가 좀 더 중요한 의미를 가지게 되었다.

「원론」에서 비의 산술적 특성을 알 수 있는 부분은 제 7권 외에 복비(compounding ratio)[3]를 들 수 있다. Euclid는 비의 곱셈을 정의하지 않았지만 제 5권의 정의 9와 정의 10에서는 비의 곱셈을 정의하는 것과 유사한 정의가 등장하고 있다.

정의 9 : 세 개의 양이 비례할 때, 첫째와 셋째의 비는 첫째와 둘째의 비의 두 겹(duplicate)이다.

정의 10 : 네 개의 양이 연달아 서로 비례할 때, 첫째와 넷째의 비는 첫째와 둘째의 비의 세 겹(triplicate)이다. (Heath, 1956, p.114)

이 정의에서 두 겹과 세 겹의 의미는 제곱과 세제곱을 의미하고 있다. Heath(1956)는 이 부분에서 복비가 나와야 하는데 어느 곳에도 나오지 않음을 지적하였으며 Euclid가 2배, 3배라는 말과 혼동될 것을 우려하여 두 겹, 세 겹이라는 용어를 매우 조심스럽게 사용하였다고 한다.

복비는 중세시대에서 산술적 의미의 비로 전환하는 계기를 마련하는데 이 과정에 큰 공헌을 한 사람들이 14세기경의 Bradwardine과 Oresme이다(Katz, 1998; Smith & Confrey, 1994). 발단이 된 것은 Aristotle의 명제였다. 14세기 초 옥스퍼드와 파리 대학에서는 "F/R은 V에 비례한다."는 Aristotle의 명제를 분명히 하려는 시도가 있었다. 여기서 F는 어떤 물체의 운동에 대한 힘, R은 저항, V는 속력이다. 중세 물리학의 기본 가정은 F는 R보다 커야 운동이 일어난다는 것이다. Aristotle은 F/R은 V에 비례한다는 명제를 표현하였으나 이 수학적 관계는 바로 가정에 대한 모순에 직면하게 되었다. F를 고정하고 R을 2배하면 V는 절반이 된다. 양의 값의 속력을 반으로 나누면 그 값은 여전히 양수이고 R은 다시 2배가 되므로 결과적으로 R은 F보다 크게 할 수 있어 기본 가정에 모순이 된다(Katz, 1998; Grant, 1960).

Bradwardine은 1328년 그의 저서 <속도비례론 (Tractatus de proportionibus)>에 힘, 저항, 그리고 속도를 특별한 방법으로 관련지어 Bradwardine의 함수라고 불리는 해법을 제안하였다. 이를 현대적 표기법을 사용하여 나타내면 두 힘 F_1, F_2가 있고 두 개의 저항 R_1, R_2가 있고, 두 개의 속력 V_1, V_2이 있다고 할 때 다음과 같다.

① $V_2/V_1=(F_2/R_2)/(F_1/R_1)$ 또는

② $F_2/R_2=(V_2/V_1)*(F_1/R_1)$

3) 비들의 크기를 곱해서 새로운 비를 만들면 그것을 복비라 한다.

②식은 F/R이 V에 비례한다는 조건을 만족하며 비에 비를 곱한 결과를 보여준다(Smith & Confrey, 1994). Euclid 시대까지 비와 수 또는 비와 크기를 곱한 경우는 있어도 비의 비를 곱한 결과를 보여준 예는 없다.

Euclid의 경우 수 P에 $m:n$을 적용시킨 값 Q를 구하면 P를 n등분한 값 중 m개를 선택한 값이므로 $\mathrm{Q}=\frac{m}{n}\mathrm{P}$이 된다. 그러나 Bradwardine의 경우에 비 A:B에 $m:n$을 적용한 값 $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$을 구하는 것이고, 비 관계가 승법적이므로 $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}})^{\frac{m}{n}}$이 된다. 따라서 ②의 식을 다시 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다(Smith & Confrey, 1994).

③ $\frac{F_2}{R_2}=(\frac{F_1}{R_1})^{V_2/V_1}$

④ $\frac{\log(F_2/R_2)}{\log(F_1/R_1)}=\frac{V_2}{V_1}$

위의 식은 승법적 관계를 지수적 관계로 대체한 것이다. $F>R$이 기본 가정이고 이 상황에서 속력을 2배 감소한 값은 F/R의 제곱근과 같게 된다. F/R은 1보다 큰 값을 유지하므로 R은 결코 F보다 클 수 없으므로 Aristotle의 명제를 만족시킨다고 볼 수 있다. 또한 지금까지 비의 상등과 다른 형태를 취하고 있으며 비를 하나의 수로 보는 입장을 취하고 있다. 그러나 다루는 량이 여전히 연속적인 양만을 취급하고 있어 Euclid의 전통을 완전히 벗어났다고 보기는 어렵다. Bradwardine의 관심은 Aristotle의 명제와 일치하는 수학적 모델을 발달시키는 것이었으므로 자신의 법칙을 증명하려는 실험을 하지 않아 15세기 중반까지 널리 받아들여지지도 않았지만 그 뒤에 숨겨진 수학은 중요하고 새로운 아이디어를 탄생하게 하는 원동력이 되었다(Katz, 1998).

Oresme의 아이디어는 1360년에 출판된 <비례의 비례에 관해서(De proportionibus proportionum)>에서 찾을 수 있다. 그는 "비례의 비례"에 대한 연구는 운동의 비례를 일관적으로 나타내는 수단일 뿐 아니라 우주의 비밀과 철학의 비밀 그리고 어려움을 해결하는데 잠재적 도구가 된다고 생각하였다(Grant, 1960). Oresme은 Bradwardine의 비례론에 제시된 비의 곱셈에 대한 개념을 "비의 비"라는 개념으로 심화 발전시켰으며 제곱근이 포함된 비까지 제시하고 있다(Sylla, 2002). Oresme은 Bradwardine이 제시한 비의 곱셈에 대한 개념을 보다 명백히 하는데 일조하였다.

Smith와 Confrey(1994)는 Bradwardine의 비 개념은 반복적인 덧셈으로 받아들여지는 것에 비하여 Oresme의 비 개념은 반복적인 곱셈의 활동으로 변화되었다고 주장하였다. 즉, 비 A가 비 B의 m개의 부분이라면 A를 m배하면 B를 얻을 수 있다. 다시 말하면 $A^m=B$ 또는 $A=B^{\frac{1}{m}}$가 된다는 것이다.[4] 또한 Oresme은 $A^{\frac{2}{5}}=(A^{\frac{3}{5}})^{\frac{2}{3}}$과 같은

4) Oresme은 비를 관계로 보고 있었기 때문에 비 A의 m배는 A를 m번 곱한 것과 같은 것으로 인정하고 있다.

것으로 생각하였는데(Grant, 1960) 이를 통해 비를 지수로 나타낼 수 있게 됨으로써 산술적 계산도 가능하게 되었다. Oresme은 원론 제 5권을 언급하면서 비 관계를 연속적인 량에 대해서만 다루었고 원론에 나타난 비가 유리수와 무리수 모두에 적용된다는 점을 지적하였다. 이런 점에서 Grant(1960)는 Oresme이 사용하는 비례론을 원론의 제 5권의 기하적 양과 제 7권의 산술적 양 사이의 전통적 차이를 여전히 유지하려는 입장으로 보았다. Bradwardine과 Oresme이 "비의 비"라는 개념을 사용하면서 비와 비를 곱해야 하는 경우가 생겨났고 관계로서의 비와 수로서의 비를 구별하는 입장에서 수의 곱셈과는 다른 해석이 요구되었다.

중세시대의 비례가 고대 그리스 시대의 비례와 공통되는 점은 기하적 양과 산술적 양을 구분하고 있다는 점이며 차이점은 산술적 의미를 보다 강하게 받아들여 비의 곱셈을 인정한다는 것이다. Euclid 시대의 비의 덧셈과 뺄셈은 인정되었으나 비와 비의 곱은 받아들여지지 않았다. Euclid 시대에 비와 비의 곱을 인정하지 않았던 것은 비를 선분의 의미로 암묵적으로 받아들일 때 선분과 선분을 곱하면 넓이가 되어 대상이 다른 것으로 변하기 때문이었다. 그러나 Bradwardine과 Oresme은 비의 비라는 개념을 사용하여 비의 곱셈에 대한 새로운 표기 방법을 마련하여 산술적 의미를 발전시켰다.

4. 17세기 이후의 비와 비례

기하를 매개로 비례 명제에서 대수적 방정식으로의 변환은 비례의 언어로부터 대수 방정식으로 전환하는 난관을 해결하는데 있어 17세기에 중요한 전략이었다. Oresme의 비 개념은 17세기에 들어오면서 Newton에게로 이어진다. 특히 Newton의 <프린키피아(Principia)>를 통해 중세시대에서 근대시대로 전환하는 시기의 비의 표현을 알 수 있으며, 수학과 물리학 사이에서 비를 이해할 수 있는 자료라 할 수 있다(Grosholz, 1987; Sylla, 2002). 1687년 <프린키피아>가 처음 출판된 후 Newton은 Clerke로부터 한 통의 편지를 받는다. Clerke는 저명한 수학자로 알려지지는 않았지만 <프린키피아>에 대한 첫 번째 비판을 한 사람이다. Clerke는 비의 3/2 제곱을 나타내는데 'sesquiplicata'라는 용어를 사용한 것에 대해 질문하였고 Newton은 'sesquialtera'를 의미한 것이라고 답했다. 그러나 그 당시에 'sesquialtera'는 비의 3/2배를 의미하므로 $\frac{16}{1}\times\frac{3}{2}=24$가 되는데 Newton은 $(16/1)^{\frac{3}{2}}=64$라고 쓰고 있어 Newton이 제시한 대수식이 설명한 것과 같지 않자 인쇄가 잘못되었다고 생각하고 수정해 줄 것을 요구한 것이다(Katz, 1998; Sylla, 2002).

Sylla(2002)는 이 같은 대수식의 차이가 Newton은 비는 관계이므로 수와는 서로 다른 것으로 보고 비의 3/2배에 대한 계산을 수의 3/2배와 달리 비의 3/2제곱과 같은 것으로 생각한 반면 Clerke는 비와 양을 서로 같은 것이라 보고 분수의 계산과 같은 것

으로 생각한 결과로 해석하였기 때문에 나타난 것으로 보았다. Newton이 Clerke의 비판을 받아들여 용어를 수정하기는 하였지만 이것은 근본적인 변화가 아니라 표면적인 타협이었다. 보다 근본적인 변화는 용어 보다는 표기에서 나타난다.

비례에 대한 Oughtred의 표기법은 영국뿐 아니라 유럽에서 광범위하게 채택되었다. 그럼에도 불구하고 Oughtred의 책이 출판된 지 20년 뒤에 콜론(:)이 1651년 영국에서 나타나기 시작했다. 콜론은 천문학자 Vincent Wing에 의해 나타났다. Leibniz는 비와 나눗셈을 나타내기 위해 콜론(:)을 도입하였으며 비와 상등의 기호면 충분하다는 간단한 이유에서 비례에 대해 특별한 기호를 사용하는 것에 대해 반대의 뜻을 나타내었다. Leibniz는 다음과 같이 주장하였다(Cajori, 1928).

a대 b를 $a:b$ 또는 $\frac{a}{b}$ 로 사용한다. $\frac{a}{b}$는 a를 b로 나누는 것이다. 나는 비례를 나타내는데 두 비가 같음을 두 개의 나눗셈 또는 두 분수가 같음을 의미하는 것으로 사용한다. 따라서 a대 b와 c 대 d가 같다는 것은 $a:b=c:d$ 또는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$로 나타내면 충분하다(Cajori, 1928, p.295에서 재인용).

Leibniz의 표기법은 비를 양으로 보고 있음을 알 수 있다. 실제로 Sylla(2002)는 Leibniz와 Clarke 사이에 교환된 편지를 근거로 Leibniz는 비를 양으로 생각하였고 Clarke는 비를 관계로 보고 있음을 밝혔다.

중세시대 이후 천문학과 물리학 그리고 대수 표기법의 발전으로 비를 수로 보는 관점이 증대하였으나 기하적 비례의 관점과 산술적 비례의 관점이 여전히 혼재해 있었다. 기하적 의미의 비례와 산술적 의미의 비례가 통합하게 된 것은 16세기 대수의 발달 덕분이다. 대수 기호를 본격적으로 도입한 Viète는 산술과 기하학을 구별하여 대수 기호를 적용하였고 산술을 기하학의 하위 영역으로 보았다. Descartes는 Viète가 기하학과 대수를 극단적으로 분리하였다고 비판하면서 대수적 연산을 기하적 언어로 표현함으로써, 기하적 해석에 의해서 기호를 조작하지 않고 반대로 기호의 조작 결과를 기하적으로 해석하였다(Roche, 1998). Descartes에 의하여 대수는 기하학에서 실제적 영역을 확보하였을 뿐 아니라 연속성과 무리수 개념도 포함하게 되었다. Desrcates가 기하학의 산술화를 의도한 것은 아니었지만(Boyer, 1968), 그로 인해 대수 기호의 유용성과 효율성으로 그 적용 범위는 빠르게 확대되었고 17세기 비례론은 대수화되었다.

Goldstein(2000)은 현대의 대수적 비례로 비례에 대한 관점이 변화한 또 다른 원인으로 18세기 원론의 번역판의 영향을 언급하였다. 16세기, 17세기에 나타난 원론의 영문판이 대중성을 위해 쓰이고 보급되었다면 18세기 원론의 영문판은 Euclid의 본래 견해에 초점을 두고 만들어졌다. 한 쪽은 원론의 기하적 성질을 수치, 대수의 예로 제시하여 대중들이 쉽게 읽고 이해할 수 있도록 하였고, 다른 한 쪽은 원론이 산술화

되어가고 있음을 비판하고 초기 개념으로 돌아가고자 하는 시도가 이루어졌다. 18세기에 나타난 원론의 영문판은 Wallis와 Barrow 사이의 갈등을 다소 포함하고 있다(Goldstein, 2000).

Wallis는 산술의 일반화를 통해 Euclid 원론의 분석에 정당성을 주는 동시에 음수와 허수를 합법화시켰다. 또한 Wallis는 비를 수로 보고 비가 기하보다 산술과 훨씬 관련이 깊다는 주장을 하였다. 비는 관계가 아니라 수라고 가장 강력하게 주장한 Wallis는 "A의 B에 대한 비례 관계는 $\frac{A}{B}$로 표현된다. 이는 A를 B로 나눈 몫이다(Roche, 1998, p.76)."라고 말하였다. 반면 Barrow는 비례의 기하적 정의를 지지하고 Euclid 원론의 본래 구조를 지키려하였다(Goldstein, 2000). 특히 Simson은 원론을 재 발간하면서 제 6권의 정의 5 즉 "비의 크기를 서로 곱하여 어떤 새로운 비를 만들면 그 비를 복비라고 한다(Heath, 1956, p189)."를 삭제하여 비를 관계로 보는 전통을 복원시키려고 하였으며(Sylla, 2002) 비례의 기하적인 관점을 지지하였다. 즉, 기하적인 길이가 존재하지 않으면 비례 역시 존재하지 않는 것이다.

원론의 영문판에서 제 5권의 비례 이론은 매우 중요한 것으로 간주되었다. 18세기 원론의 영어 번역판에서 가장 의미 있는 작품은 Whiston이 쓴 것이다. Whiston은 보다 공격적으로 산술화를 수행하여 해석적 주석을 달고 종합적인 것으로 대체하고 제 2권과 제 5권에 새로운 정의를 사용하였다. 특히 비례를 기하와 독립시켜 비례의 정의를 바꾸었다. 다시 말하면 비례를 임의의 수학적 양을 표현하는 것으로 정의하여 비례의 정의를 량(magnitude) 뿐 아니라 수치적 비에 적용하였다(Goldstein, 2000). 또한 Whiston은 학생들이 비례를 쉽게 다룰 수 있도록 대수 규칙을 핵심 정의로 정리하였다. 이러한 혁신은 수학적 관행에 변화를 가져와 원론의 정의와 명제를 대수 규칙이 대신하게 되었다.

Legendre는 <기하학 원론>에서는 비례 관계를 산술적으로 설명하였으며 이산량에서 성립하는 것처럼 연속량에서도 성립한다고 설명하였다. Legendre의 <기하학 원론>에 이르러 산술, 기하, 대수가 혼합적으로 다루어지기 시작하였으며, 비례론은 산술, 기하, 대수 영역에서 동시에 성립하는 것으로 정의되었다.

5. 맺는말

역사적 발달과정에 따라 비와 비례 개념의 발달 과정을 분석한 결과 비와 비례 개념의 의미는 처음에 산술적인 의미로 시작되었으나 통약불가능한 값의 발견으로 기하적인 의미가 산술적인 의미를 대체하게 되었고 다시 대수 표기법의 발달로 인해 산술적 의미와 기하적 의미를 모두 포함한 대수적인 의미로 확장되었다. 기하적 의미가 비례에 대한 아이디어의 중심이 되었던 시대에는 통약불가능한 선분의 길이가 유한한

데 비해 그 길이를 산술적으로 나타내는 기호가 무한으로 나타나 그 기호를 직관적으로 받아들일 수 없었다. 그러나 대수 표기법의 발달로 Descartes에 의해 대수가 연속성과 무리수를 포함하게 되고, 비의 상등을 나타내는 Eudoxus의 방법이 Dedekind의 절단과 같은 의미임을 알게 되면서 비를 대수적으로 나타낸 기호의 의미를 받아들이게 되었다. 따라서 비례 개념의 역사적 발달 과정을 통해 수학 개념의 의미는 기호 발달에 영향을 주고 기호 발달은 수학 개념의 의미를 보다 정확히 하는데 도움을 줌을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Boyer, K. B. (1968). *A history of mathematics.* New York : Wiley.
2. Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations,* Chicago: Open Court Publishing.
3. Filep, L. (2003). Reform of instruction in Geometry. *The American Mathematical Monthly,* 70(3), 323-327.
4. Fowler, D. H. (1979). Ratio in early Greek mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 1(6), 807-846.
5. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
6. Goldstein, J. (2000). A matter of great magnitude : The conflict over arithmetization in 16th-, 17th-, 18th- *century english editions of Euclid's Elements Books* I through Ⅵ(1561-1795).
7. Grant, E. (1960). Nicole Oresme and his De proportionibus proportionum, *Isis,* 51(3), 293-314.
8. Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitude, ratios, and proportions in Euclid's Elements : How did he handle them?, *Historia Mathematica,* 23, 355-375.
9. Grosholtz, E. R. (1987). Some uses of proportion in Newton's Principia Book 1 : A Case Study in applied mathematics, *Studies in History and Philosophy of Sciences,* 18, 209-220.
10. Gullberg, J. (1997). *Mathematics from the birth of numbers,* Nortan & Co.
11. Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary* vol.2. New York: Dover Publications.
12. Katz, V. J (1998). *A history of mathematics*: An introduction second edition. Addition-Wesley Educational Publishers.
13. Roche, J. (1998). *The mathematics of measurement*: A critical history. London :

The Athlone Press.
14. Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*, Dover.
15. Smith, E. & Confrey, J. (1994). Multiplicative structures and the development of logarithms : What was lost by the invention of function?, In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp.237-287), State University of New York Press.
16. Sylla, E. (2002). Compouding ratios :Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton's Principia. In E. Mendelsohn, (Ed.). *Transformation and tradition in the sciences, First paperback edition* (pp11-43). Cambridge : Cambridge University Press.
17. Szabó, Á. (1978). *The beginnings of greek mathematics*. Dordrecht and Boston : D. Reidel Publishing Company.

The historical developments process of the representations and meanings for ratio and proportion

Cheongdam middle school **Jung Sook Park**

The concepts of ratio and proportion are familiar with students but have difficulties in use. The purpose of this paper is to identify the meanings of the concepts of ratio and proportion through investigating the historical development process of the meanings and representations of them. The early meanings of ratio and proportion were arithmetical meanings, however, geometrical meanings had taken the place of them because of the discovery of incommensurability. After the development of algebraic representation, the meanings of ratio and proportion have been growing into algebraic meanings including arithmetical and geometrical meanings. Through the historical development process of ratio and proportion, it is observable that the meanings of mathematical concepts affect development of symbols, and the development of symbols also affect the meanings of mathematical concepts.

Key words: ratio, proportion, incommensurability

2000 Mathematics Subject Classification: A33

ZDM Subject Classification: 97-04

접수일 : 2008년 6월 13일 수정일 : 2008년 7월 10일 게재확정일 : 2008년 7월 15일