한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 31 - 52

무한 개념의 진화 : Bolzano를 중심으로[1)]

덕성여자대학교 불문학과 정계섭
kseopcheong@hanmail.net

무한(infinity)의 개념은 다른 과학적 개념들과 마찬가지로 진화의 역사를 지닌 개념이다. 우리는 여기에서 볼짜노(Bolzano)를 중심으로 논의를 전개하고자 하는데, 그는 형이상학적 관점에서가 아니라 수학적으로 실무한(actual infinity)을 수용한 최초의 인물로 여겨지기 때문이다.

볼짜노는 현대의 플라톤주의자들처럼 구성(construction)과정과는 무관하게 무한집합(infinite set)을 그 자체로 옹호하였는데, 이는 내포(comprehension)의 원리와 모든 개념에 대한 외연의 유일성(unicity)에 근거한다.

또한 그는 무한집합과 그 부분 사이에 1:1 대응(one-to-one correspondence)이 성립한다는 사실을 역설로 보지 않고 무한집합의 특징으로 인식했다.

그리스 시대에는 단 하나의 무한의 존재만 인정한 데 반해 그는 여러 종류의 무한의 존재를 인정했으며, 무한에 대한 논리적 정의를 수립하였다.

무한의 문제는 수학에서 점증하는 중요성을 지닌 구성적 방법(constructive method)의 시금석이 된다. 여기에서는 이에 대한 운을 떼는 것으로 그치고 본격적인 연구는 차후의 과제로 남겨두겠다.

주제어 : 실무한, 1:1 대응, 등농도, 초한수, 구성주의

Ⅰ. 들어가면서

우리는 전에 칸토어(Cantor)의 초한수 이론을 검토한 바 있다.[2)] 그 후 연구를 계속하면서 무한의 개념이 역사를 지니고 있다는 사실을 새삼 실감하고, 뉴턴처럼 칸토어도 아리스토텔레스를 비롯하여 곧 언급하게 될 쿠라(Qurra), 그리고 쿠자누스[3)], 브루

1) 이 연구는 2008년도 덕성여자대학교 교내연구비 지원으로 수행되었다. 유익하고 소중한 논평을 해주신 익명의 심사위원들에게 심심한 감사의 뜻을 전한다.
2) "초한수의 형성과 연속체 가설", 과학철학, 한국과학철학회, 2003/봄, pp.89-106.

노[4] 등 거인의 어깨 위에 서 있지 않았나 하는 생각이 들었다. 이 논문에서는 그 중에서 체코의 수학자 볼짜노(Bolzano)의 무한에 대한 관점을 검토하고자 하는데, 그는 무한 개념을 형이상학적이 아니라 수학적으로 파악한 최초의 학자로 여겨지기 때문이다.

우리의 논의는 주로 다음과 같은 문제들을 의식의 지평에 두고 이루어진다.

여러 가지 종류의 무한이 있는가?
그렇다면 어떻게 그들을 비교하고 구분하는가?
하나의 무한이 다른 무한보다 더 클 수 있는가?
언제 두 무한이 같다고 할 수 있는가?

칸토어에 대해서는 논의의 전개에 필요한 경우에만 언급하고, 그 대신 순서수이론을 별첨하고자 한다.
왜 여전히 무한 개념이 수학에서 중요한가?
수학에서 구성주의(constructivism)는 그 중요성이 갈수록 더해가고 있는데, 무한의 문제와 긴밀하게 결부되어 있다. 그래서 이 글의 주제와 직접적인 관계는 없지만 일종의 일탈(digression)을 허용하여 이에 대한 관심을 제고하고자 한다. 끝으로 결론에서는 우리 자신의 무한에 대한 입장을 밝히도록 하겠다.

Ⅱ. 그리스 시대의 무한

만물의 근원이 수(數)라고 파악한 피타고라스학파에게 크기(magnitude)[5]와 수(number)의 상호성은 매우 친숙한 사실이었다. 즉 어떠한 길이라도 언제나 하나의 수에 대응해야 한다. 그런데 한 변이 1인 정사각형의 변과 그 대각선은 통약불가능(incommensurable), 즉 공통되는 척도의 단위가 없다. $\sqrt{2}$는 두 정수의 비(比)로 나타낼 수 없는 비순환 무한소수, 즉 무비수(無比數)[6]이다. 무한과의 첫 만남은 이렇게 이루어졌다.

그리스 인들에게서 무한에 대한 반감은 진공에 대한 반감만큼이나 컸다.[7] 만일 만

3) Cusanus(1401~1464)에 대해서는 우리의 "쿠자누스의 인식세계" (한국과학사학회지, 제 20권, 제 2호, 한국과학사학회, 1998년 12월, pp.225~237)를 참고할 것.
4) Bruno(1548~1600)는 무수히 많은 태양계들이 존재한다고 주장했다.
5) 그리스 기하학의 기본적 개념으로서 도형의 척도, 즉 직선의 길이, 다각형이나 원의 면적, 다면체의 부피 그리고 평면에서의 각 등이다.
6) 물론 수학계에서 정립된 용어는 무리수(irrational number)이다.
7) 아리스토텔레스의 유명한 말 "natura abhorret vacuum" (자연은 진공을 싫어한다).

물이 수라면 무리수의 존재는 무엇을 의미하는가? 이렇게 기하학적 연속과 산술적 수리 관계 설정이 어렵게 되자, 수를 통하여 세계를 파악하고자 했던 그들의 철학은 위협을 받게 되었으니 그 불편한 심기는 이해할 만도 하다. 그래서 무한은 긍정적인 개념적 위상을 갖지 못하고 부정적인 방식으로 'απειρου' (무제한)으로 불리게 된다.

BC 5세기경, 엘레아학파의 제논(Zenon)이 나중에 인구에 회자될 역설을 내놓았다. 가장 빠른 발의 상징인 아킬레스(이하 A) 느림보의 상징인 거북이(이하 T)의 경주가 그것이다. [0, 1] 구간에서[8], 아킬레스는 출발점에서, 거북은 1/2되는 지점에서 출발한다. 논의를 위해 전자가 후자보다 2배 더 빨리 달린다고 가정하자. 그러면 A가 1/2 되는 지점에 도달하면 T는 1/2+1/4 지점에, A가 (1/2 + 1/4) 지점에 이르면 T는 1/2+1/4+1/8의 지점에 있게 된다. 이와 같이 A가 $1/2+1/4+\cdots+1/2^n$의 지점에 도달하는 순간, T는 1/2+1/4+…+1/2n+1/2n+1의 지점에 있게 되어, 결국 A는 T를 따라잡을 수 없게 된다. 다른 말로 하자면, A가 T 있는 지점에 이를 때 마다 T는 조금 더 멀리 전진해서 결국 A는 다음의 거리를 달려야 한다.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{1024}+\cdots$$

여기에서 마지막 "…" 이 무한으로의 이행을 의미한다. 그리스인들은 수학적 정확성이라는 관념에 의해 완벽한 것은 유한한 것, 측정 가능한 것에 두었기 때문에 극한의 개념을 받아들이지 않았다. 또는 무한하게 점점 작아지는 양들을 더할 수 있는 방법을 몰랐다고 볼 수 있다. 아무튼 이렇게 공간을 무한하게 분할할 수 있다면 A는 결코 T를 따라잡을 수 없게 되는 것이다.[9] 오늘날 이 수열이 유한한 크기 1로 수렴된다는 사실은 누구나 알고 있다.

여기에서 벌써부터 완성된 전체로서의 실무한(actual infinity)과 유한에 대립하고 실현될 수 없는 가능적 무한(potential infinity)[10]간의 긴장을 보게 된다. 여기에서의 무한분할은 개념적 즉 가무한의 관점에서 보아야지 무한하게 실현되는 실무한적 관점에서 보게 되면 거북이가 항상 앞서 간다는 역설이 발생하는 것이다. 즉 이러한 분할은 생각으로만 가능한 것이지 실제로 실현될 수 있는 게 아니다.

그리스 시대에는 무한에 대한 수학적 구상을 가로막는 두 가지 원리가 있었는데 그

8) 거리를 어떻게 잡든 상관없다. 거리를 d로 잡으면, $\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\cdots+\frac{d}{2^n}+\cdots$

9) 시간의 관점에서 보더라도 마찬가지여서 A가 T를 따라잡기 위해서는 무한히 많은 순간들이 필요하다.

10) 앞으로 가무한(假無限)이라는 용어와 구분 없이 쓰겠다.

첫 번째는 “전체는 부분보다 크다” 는 직관적으로 자명하게 보이는 유클리드의 공리이다. 두 번째 원리는 여러 종류의 무한이 있을 수 없다는 것이다. 유클리드 기하학에서는 같은 종류의 두 개의 크기를 비교할 수 있어야 하고 더하고 뺄 수도 있어야 하는데 무한에 관한 한 당시로서는 비교하거나 구분할 수 없었기 때문이다.

수학사가들에 의하면, 아리스토텔레스가 처음으로 실무한과 가무한을 구분하였다고 한다. 자연수열 1, 2, 3, …, n, …과 같이 시간상에서 한없이 전개되지만 최종적인 무한의 상태에 도달할 수 없는 무한을 가무한 이라고 한다. 가령 내가 “무한한 수의 소수(素數)가 있다.”라고 할 때, 이 말은 어떤 정수도 가장 큰 솟수가 아니라는 의미로서 나는 가무한에 대해 말하고 있는 것이다. 반면에, 자연수를 집합으로서 생각하면 ‘자연수의 집합’처럼 단 하나의 실체(entity)가 있는데 이는 동시에 무한한 원소로 이루어진 하나의 완결된 집합으로서 현실적으로 존재한다고 보게 되므로 실무한이다.[11] 이 무한관은 나중에 기독교의 교리와 만나 신의 무한성, 즉 전지전능한 절대자를 의미하게 된다.

Ⅲ. 9세기경의 무한 : 사빗 이븐 쿠라 (Thâbit ibn Qurra, 831~901)[12]

9세기에 아랍의 수학자가 그리스 시대의 무한에 대한 인식과는 다른 독창적인 견해를 제시한다. 그는 제자의 철학적, 신학적 질문에 대한 답변을 통해 무한에 존재론적 근거를 제시한다.

> 질문 : 신은 보편개념 (일반원리, 수 개념, 크기 개념, 영혼의 불변성)만 알고 개별적인 특성(각각의 수, 각각의 크기, 개개의 영혼)은 모른다고 가정하는 것이 옳지 않겠는가?
>
> 답변 : 신이 개별자들을 모르고 보편(universality)만 안다고 말하는 사람이 나에게는 놀랍다. 그런 사람에게 만일 예컨대 일식에 대한 신의 지식에 대해 묻는다면 그가 무슨 말을 할런지 모르겠다. 신은 일식의 존재와 성질에 대해서만 아는가? 아니면 과거에 일어났고 앞으로도 일어날 각각의 일식을 정확한 시간과

11) N, Z, Q, R, C 는 모두 실무한이다. $\sqrt{2}$, π, e 역시 실무한이고, 0.999… = 1 이라고 할 때, 우리는 실무한과 대면하고 있다. 정적분을 할 때 또는 소실점을 말할 때 우리는 실무한을 사용하고 있는 것이다.

12) 그의 사후 1100년 (11번째 100주년)을 기념하기 위해 2001년 12월 14, 15 양일간 파리의 「아랍권연구소」 에서 “9세기 학자, Thâbit ibn Qurra” 라는 제목으로 심포지엄이 개최되었다. 이 학자의 비중을 짐작하게 해준다.

> 더불어 아는지? 만일 신이 일식의 일반적인 성질 외에 다른 것을 모른다면 신의 지식은 천문학자의 지식보다 못할 것이다.13)

여기에서 우리의 주목을 끄는 것은 무한한 개별자들에 대한 신의 지식이다. 그는 이처럼 신학적 논쟁을 통해 대담하게 실무한을 도입한 셈이다. 왜냐하면 신에 의해 알려진 진리들의 집합은 무한히 많은 원소를 가진 무한집합으로서, 이는 현대적 의미의 실무한으로 파악될 수 있기 때문이다.

이 학자의 두 번째 독창적인 점은 다양한 무한의 가능성을 고찰하면서 최초로 무한에 대한 산수를 시도한 데에 있다. 그는 홀수의 집합과 짝수의 집합을 비교하면서 두 집합이 동일하다고 말한다. 그 자신 스스로도 인식하지 못하면서 오늘날의 용어로 말하자면 두 집합의 원소들 사이에 1:1 대응을 설정한 것이다. 나아가서 그는 이 두 무한 집합이 자연수 집합의 반이라고 한다.

이런 식으로 나가면 하나의 무한 집합이 다른 집합의 1/3 , 1/4 , 1/5 , … 이 될 수 있다. 즉 3의 배수의 집합은 정수 집합의 1/3 이 된다. 더 나아가서 그는 $3n$ 형태의 정수 집합과, $3n+1$ 그리고 $3n+2$ 형태의 집합은 같은 무한성을 갖고 있다고 말한다. 오늘날의 용어로 농도가 같은 집합이라는 말이다.

쿠라는 이처럼 무한에 대한 연산을 했을 뿐만 아니라 그리스적 전통이 거부한 실무한의 위상을 회복한 공로가 있다. 그의 한계는 홀수의 집합이나 짝수의 집합이 자연수 집합의 반이라고 봄으로써 유클리드의 공리를 뛰어넘지 못한 점이다. 쿠라가 후학에 실질적인 영향을 주었는지는 확실하지 않다. 아마도 한동안 잊혀졌다가 나중에 가서야 그의 위상이 밝혀졌을 개연성이 크다.

Ⅳ. 미적분학과 17세기의 무한

무한의 개념이 제기하는 어려움으로 인해 사람들은 이중적인 관점을 갖게 되었는데 그 첫째는 완벽하고 전지전능한 존재방식으로서의 신의 무한성, 즉 '정성적'인 무한이다.

> 나는 전적으로 실무한을 지지하기 때문에 자연이 그것을 기피한다고 말하는 대신 자연은 조물주의 완벽성을 드러내기 위해 도처에서 무한을 모방한다고 강조하는 바이다. … 따라서 자연의 가장 작은 파편이라도 서로 다른 무한한 피조물로 가득 찬 세

13) Pour la science (과학을 위하여), N° 27. pp.48-52, 2000.

계로 인식되어야 한다.[14]

두 번째는, '정량적'인 즉 수학적 무한이다. 이렇게 형이상학과 수학 사이에 분리가 설정되었다. 라이프니츠의 경우 형이상학자로서는 정성적 무한의 지지자이나, 수학자로서는 그렇지 않다는 사실을 곧 보게 될 것이다.

갈릴레이(Galilei, 1564~1610)에 의해 시작된 수리물리학의 탄생이 무한에 대한 성찰을 갱신한다. 그는 물체의 운동법칙을 찾기 위해 시간을 매개변수로 도입하면서 순간속도와 가속도의 개념을 정의한다. 아주 짧은 시간 Δt 동안에 달린 거리를 Δx라 할 때, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$에 어떤 값을 부여할 것인가? 극한의 개념이 나오기 전에 사람들은 여기에 $\frac{0}{0}$, 즉 0을 부여했다.

라이프니츠(Leibniz, 1646~1716)와 더불어 이제 우리는 다음과 같은 사실에 친숙하다.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

여기에서 문제는 무한소(infinitesimal)[15]의 개념이다. 무한소는 0보다 크지만, 다른 모든 수보다 작다! 한없이 작아질 수 있는 이 "수"는 0이 할 수 없는 일을 한다.

우리의 주제와 관련해서 갈릴레이는 그의 역설로도 유명하다.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & \cdots \end{array}$$

갈릴레이는 유한량에 적용되는 '크다, 작다, 같다'라는 관계는 무한에서는 유효하지 않다고 말하는 것으로 만족한다.

14) 라이프니츠의 이 문장은 볼짜노의 「무한의 역설」 첫머리에 인용된 구절이다.

15) 초한수와는 달리 무한소는 진정한 수가 아니라 하나의 픽션(fiction)이라는 점을 유념해야겠다. 라이프니츠와 쌍벽을 이루는 뉴턴의 경우 곡선을 동체의 연속적인 운동에 의해 생성되는 것으로 생각했다. 그래서 가로 좌표와 세로 좌표를 모두 변하는 양인데, 뉴턴은 이를 유량(流量)이라 부르고 알파벳의 마지막 문자 x, y, z 등으로 나타냈다. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$는 유량이 증가하는 속도를 나타내고 유율(流率)이라 불린다. 가령 세로 좌표의 유량을 y로 표현하면, 유율은 $\dot{y}$가 되고 이는 dy/dt를 의미한다.

> "보다 큰 / 보다 작은 / 같은" 과 같은 수식어는 무한한 크기에는 적용되지 않는다고 생각한다. 여기에서는 하나의 무한이 다른 무한보다 더 크거나, 더 작거나 또는 같다고 말할 수 없기 때문이다.16)

라이프니츠는 '갈릴레이의 역설'을 재론하는데 유클리드의 공리를 명시적으로 언급하면서 무한의 존재를 부정한다.

> 모든 수들의 수가 제곱수의 수를 포함한다는 사실을 누가 부정할 수 있겠는가? 부분이 전체보다 작다는 명제는 유한에서와 마찬가지로 무한에서도 참이다. 전체가 부분과 동시에 같으면서 같지 않다는 것은 불가능하다.17)

라이프니츠가 1698년 베르누이(Bernouilli, 1667~1748)에게 보낸 편지에서도 그는 무한 개념에 실재성을 부여하지 않는 그의 입장을 재확인한다.

> 무한은 실상 전체가 아니거나 또는 만일 무한이 전체라면 그리고 만일 무한이 그 부분 중의 하나보다 더 크지 않다면 무한이란 무언가 모순적인 것이다.

그의 말마따나 무한소는 '사라지는'(evanescent)것이고, 무한대의 경우에는 결코 무한에 도달하지 못하는 점근값(asymptoic value)일 뿐이어서 고정된 정체성이 없다. 결국 크거나 작거나 간에 그 자체적으로는 정합성을 갖지 않는 무한의 개념에 이르게 되는데, 이런 무한은 유한량으로 나타나는 결과에 이르게 하는 단순한 보조 장치일 따름이다.

V. 볼짜노(Bolzano, 1781~1848)에 의한 무한

커다란 도약이 볼짜노에 의해 이루어졌다. 그는 무한에 대한 수학적 개념을 확립해서 그 위에 물리학이나 철학을 구축해야 한다고 생각했다. 무한 개념의 진정한 역사는 그의 「무한의 역설」(1851)과 더불어 시작한다고 볼 수 있겠다. 칸토어도 그를 가리켜 "실무한의 가장 단호한 방어자"로 꼽을 정도이다. 곧 보게 되겠지만 그는 라이프니츠도 시도하지 못한 실무한에 대한 수학적 계산을 체계적으로 시도한 첫 번째 인물이다.

그러나 볼짜노에게 있어서도 무한 개념은 형이상학에서 출발한다. 실무한은 도처에

16) J. Sebestik, 볼짜노에게서 논리와 수학, p.454
17) 라이프니츠, Pacidius Philalethi, Opuscules et fragment inédits (소논문들과 유고들), Paris, 1903(1976), pp. 612-613.

서 실현되는데 신에게서는 물론이려니와 신의 피조물에서도 실현된다.

> 우리는 신을 무한이라고 부르는데 왜냐하면 신에게서 다양한 종(種)의 능력을 인정해야 하기 때문이다. 우리는 신에게 전지전능과 같은 진정으로 인식할 수 있는 능력을 부여해야 하는데, 이런 능력으로 신은 진리의 무한집합, 즉 모든 진리들을 포용하기 때문이다.[18]

실무한은 무엇보다 신(神)의 무한성(infinitude)이다. 볼짜노에게는 신학과 수학의 구분이 없다.[19] 볼짜노는 완성된 집합으로서 실무한의 집합의 존재를 확신한다. 예컨대 정수의 집합은 실무한이다.

> 모든 수들의 집합은 무한히 큰 크기의 반박할 수 없는 사례이다.[20]

체코인인 볼짜노는 프라하 주민들의 집합을 예로 들면서 이 집합의 존재를 증명하기 위해 각각의 주민을 찾으러 갈 필요는 없다고 말한다.

> 나는 프라하나 북경 주민의 집합 또는 전체를 각각의 주민을 떠올리지 않고도, 다시 말해 주민 각각에 관계되는 표상 없이도 상정할 수 있다. 이것이 바로 내가 프라하 주민의 수가 10만과 12만 사이라고 말할 때 실제로 하는 일이다.[21]

무한 집합의 경우에서도 마찬가지이다. 이 집합을 정의하기 위해 이 집합의 모든 원소들을 일일이 열거할 필요는 없다. 수학적 존재들의 세계를 양분하는 변별적 속성을 부여하는 것으로 충분하다. 그래서 이 속성을 만족시키는 집합과 그렇지 않은 존재들을 구분하면 된다는 것이다. 다시 말해서, 무한집합의 특성에 대해 말해주는 내포(comprehension) 언어로 충분하고 외연을 따로 생각하지 않아도 된다는 것이다. 이렇게 되면 실무한은 이제 유한과 동일한 존재론적, 논리적 위상을 갖는다고 볼 수 있다.

볼짜노 이전의 관점에서 보면, 예컨대 정수의 집합은 결코 고갈되는 법이 없어서 일종의 부정적인 성격의 추상화로 취급되었다. 그런데 볼짜노는 현동적(現動的), 즉 현재 실현되는 무한집합의 존재를 적어도 이상적인 수학의 세계에서 인정한 것이다.

직선의 한 선분조차 그에게는 실무한이다. 볼짜노는 최초로 유한한 선분 [0, 1]과 이 선분이 포함하고 있는 점들의 무한집합을 구분한다. 그래서 [0, 5]와 [0, 12] 사이에

18) 볼짜노, 무한의 역설, p.66
19) 이 문제에 대해 보다 자세한 사항은 박창균의 「무한과 논리-수학의 신학적 함축」 (기독교학문연구소, 신앙과 학문, 1996)을 참조할 것
20) 전게서, p.80
21) 전게서, p.74

는 대등(equipotency)관계가 성립한다.

> 임의의 두 크기 가령 5와 12를 취하자. 0과 5사이에 포함된 크기들의 집합이 무한이라는 것은 자명하다. 0과 12 사이도 마찬가지이다. 그러나 후자가 전자보다 더 크다는 것 역시 확실하다.[22)]

우리는 이 대목에서 볼짜노가 유클리드 공리를 따르고 있음을 보게 되고, 그 점이 바로 그의 한계이기도 하다. 이어서 그는 [0, 12]와 그의 부분인 [0, 5] 사이에 1:1 대응이 존재한다는 사실을 적시한다.

> x가 0과 5사이에 포함된 크기라고 하자. y를 $5y=12x$에 의해 결정되는 값이라고 하자. 이 방정식으로부터 각각의 x에 유일한 하나의 값 y가 대응하고 그 역도 성립한다. 0과 5사이에 포함된 각 x에 대해 두 집합의 어떤 원소도 혼자만 남아 있거나 동시에 하나의 쌍 이상에 나타날 수는 없다.[23)]

무한집합과 그 부분 사이에 1:1 대응이 성립한다는 사실은 이미 '갈릴레이의 역설'에서 살펴 본 바 있다. 그러나 이제까지 역설로서 부정적으로 고려되던 이 대응관계는 볼짜노에 이르러서는 무한집합의 긍정적 특성으로 인식된다. 진정한 진보는 칸토어-데데킨트(Dedekind, 1831~1916)에 의해 이루어진다.

> 어떤 체계 S는 그것의 진부분집합들 중 하나에 유사할 때 무한이라고 하고, 반대의 경우에 S는 유한한 체계이다.[24)]

무한의 특성을 무한의 정의로 변형시킨 공적은 볼짜노가 아니라 칸토어-데데킨트에게 돌아간다. 이 정의의 중요성은 첫째, 부분과 전체의 공리를 유한의 세계에 한정한 점, 둘째, 무한이 우선이고 유한은 무한의 정의에 의해 정해진다는 사실에 있다. 이제 유한집합은 이 집합과 그 부분 사이에 1:1 대응이 성립하지 않는 집합으로 정의된다.

볼짜노는 여러 종류의 무한에 대해 간단한 사례를 주면서 수학적 무한에서 여러 종류의 무한을 구상하는 것은 필연적이라고 한다.

> ∞가 무한집합을 나타내면, $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8}, \cdots$등도 역시 무한집합들이다. 이것이 무한개념에 내재하는 속성이다.[25)]

22) 전게서, pp.86-87.
23) 전게서, p.114.
24) Dedekind, Les nombres, Que sont-ils et à quoi servant-ils? (수란 무엇이고 어디에 쓰이는가?), Paris, 1978, p.93.

무한에 대한 볼짜노의 계산은 다음의 정의에 기초한다.

> 임의의 수보다 더 큰 크기를 무한대라 하고, 무한소란 어떤 수를 거기에 곱해도 1보다 작은 경우이다.[26]

현대의 표기법으로 써보면 무한소 a는 임의의 n에 대해 $an<1$이다.

$$\exists a \forall n \quad a<\frac{1}{n}$$

볼짜노의 무한대(無限大)를 논리학의 기호로 표현하면 다음과 같다.

$$\exists m \forall n \quad (m>n)$$

즉, 어떤 m이 있어서 이 m은 모든 수보다 크다.

우리가 보기에 볼짜노의 무한에 대한 인식을 종합적으로 평가하기 위해 칸토어(Cantor, 1845~1918)의 비판보다 더 나은 것은 없다. 칸토어는 볼짜노의 실무한 개념을 적극 환영한다. 그러나 볼짜노는 무한기수(ℵ)나 무한서수(ω)등 초한수(transfinite number)의 개념에까지는 이르지 못했고, 등농도(equipotent)관계를 정확하게 제안하지 못했으며 순서수이론을 세우지 못했다.

> 그는 초한수에 대한 일반적인 개념을 구성하지 못했고, 농도에 대한 일반적 개념이나 순서수라는 특수한 개념도 보이지 않는다.[27]

볼짜노에게 있어서 정수의 집합은 하나의 완성된 전체, 즉 실무한이었지만 그것은 무한하게 큰 복수성(Vielheit)이지 수(數)가 아니다. 왜냐하면 그에게 있어 수란 항상 유한한 크기일 뿐인 것이다.

칸토어가 실무한 집합의 이론을 제안했을 때 그 당시에 그것은 일종의 신앙고백에 가까운 것이었다. 정수의 집합이 실수의 집합보다 작다는 그의 단언 역시 충격적인 것이었다. 여기에 그치지 않고 그는 연속(실수)의 농도보다 더 큰 세 번째 농도를 갖

---

25) 전게서, p.134.
26) 전게서, p.65.
27) 칸토어, 일반 집합론의 토대 in Cahiers Pour l'Analyse 10, La fomalisation, pp. 46~47, Seuil, Paris, 1969(1883)

는 집합의 존재를 증명한다. 구간 [0, 1]에 대해 정의된 실함수 집합이 바로 그것이다.[28)]

또한 칸토어는 무한집합 사이에서 등농도(等濃度) 관계를 확립하였다. 등농도관계를 유한집합에 적용하면 우리는 다시 친숙한 동등(equality)관계를 만나게 된다. 즉 유한으로부터 무한에로의 확장은 동등의 개념을 등농도의 개념으로 변형하는 데에 있다고 볼 수 있는 것이다.

$\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}^2$이 동일한 기수를 갖는다는 증명을 해놓고도 칸토어는 데데킨트에게 "나는 그것을 본다. 그러나 믿을 수가 없다!"라고 쓰고 있다. 무한집합의 크기의 관점에서 볼 때 직선(1차원)과 평면(2차원) 그리고 부피(3차원)는 동일한 것이다!

Ⅵ. 무한 : 구성주의 수학의 시금석

수학이 발명이냐 발견이냐 하는 문제는 진리는 인간과 독립적으로 이데아의 세계에 존재한다는 플라톤에까지 거슬러 올라간다. 이렇게 되면 수학자가 하는 일은 그 진리를 '발견'하는 작업이 된다. 선험적으로 존재하는 수학적 진리에 대한 이런 믿음은 19세기에 와서 독일의 수학자 크로네커(Kronecker, 1823~1891)에 의해 정면으로 반박당하기에 이른다. 그에 의하면 신이 정수를 만들고 나머지는 모두 인간의 작품이라는 것이다. 이 관점에서 보면 수학자는 '발명가'이다.

이 두 관점의 차이는 수학적 증명에서 중요한 역할을 하는 배중률을 수용하느냐 또는 거부하느냐의 문제와 직결되기 때문에 단순히 형이상학적 차원에 머무는 문제가 아니다.

수학자가 '발명'한다는 관점에서 이른바 구성주의 수학이라는 학파가 나왔다. 이들에 의하면 하나의 수학적 대상은 그것을 어떻게 만들 수 있는지 보여줄 수 있을 때에만 그 존재가 확립된다는 것이다. 여기에 긴밀하게 개입하는 것이 모든 명제는 참이거나

---

28) $\#(A) < \#(P(A)) = 2^{\#(A)}$

$$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0 < c = 2^{\aleph_0} = \#(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{N} : \{1, 2, 3, \cdots\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$2^{\#(\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0} = c$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$2^{\#(\mathbb{R})} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

$$2^{c} > c$$

거짓이외의 다른 것이 될 수 없다는 아리스토텔레스의 배중율(law of the excluded middle)이다.

여기에 사과 한 자루가 있다고 하자. 그 안에 노란 사과가 들어있는지 없는지 자루를 열어보지 않고도 우리는 단언할 수 있다. 그러나 무한개의 사과가 들어있는 자루를 앞에 놓고도 동일한 단언을 할 수 있을까? 무한개의 사과를 전부 조사할 수는 없는 노릇이므로 무한집합에는 배중율을 적용할 수는 없다.

"모든 짝수는 모두 소수의 합이다." 라는 골드바하(Goldbach)의 추측은 어떠한가? 모든 수에 대해 이 속성이 참인지에 대한 증명은 없으며, 그 반대증명도 없다. 그래서 "골드바하의 추측은 참이거나 또는 거짓이다." 라고 말할 수 없는 것이다.

칸토어는 초월수에 대한 증명에서 고전적인 귀류법을 쓰고 있는데 귀류법은 배중율에 근거하고 있다. 실수는 가산적인(denumerable) 대수적 수(algebraic number)와 초월수(transcendental number)로 구성되어 있다. 초월수가 가산적이라고 가정해보자. 두가산집합의 합이 가산적이라는 것은 기지의 사실이다. 만일 위의 가정이 옳다면 실수의 집합은 가산적이어야 하는데 우리는 이미 대각선법에 의해 실수가 비가산적이라는 사실을 알기에 이 가정은 틀린 것이다.

크로네커는 칸토어의 이런 증명에 강하게 반발한다. 초월수를 어떻게 구성하는지 전혀 보여주지 못하기 때문이다. 거기에 무한개의 초월수라니![29]

이처럼 칸토어의 이론은 수학자 사회를 두 진영으로 갈라놓았다. 첫 번째 그룹은 크로네커와 뿌엥까레(Poincaré, 1854~1912) 그리고 직관주의의 원조 격인 브라우어(Brouwer, 1881~1966)와 바일(Weyl, 1885~1955) 등인데, 이들은 실무한의 존재를 거부한다. 뿌엥까레는 잠재적 상태에서의 무한, 즉 가무한만을 받아들이면서, 실무한을 포함하는 집합론을 강하게 비판한다.

> 그(Zermelo)는 유한집합에 대해 참인 공리들을 취했는데, 이들을 무한집합에까지 확장할 수는 없다. […]
>
> 내 생각으로는 무한집합에 관한 어떠한 명제도 정의상 자명할 수 없다. 나로서는 다음과 같은 규칙에 준할 것을 제안한다.
>
> 1. 유한한 수의 단어로 정의될 수 있는 대상만을 고려하자.
> 2. 무한에 대한 모든 명제는 유한에 대한 명제들의 번역이거나 생략된 진술임을 잊지 말자.
> 3. 비술어적(non-predicate) 정의나 분류를 피하자.[30]

29) 이런 대목에서 수학과 논리학의 차이가 분명하게 드러나 보인다. 논리적 관점에서는, "당신이 만일 'p'는 믿고, 그래서 'p이면 q'를 믿는다면, 당신은 q를 믿어야 한다." 이 논리규칙은 p나 q가 무엇인지 지시할 필요가 없다.

30) La logique de l'infini(무한의 논리), in Dernières Pensées (마지막 생각들), Flammarion, pp. 30-31, 1913.

뿌앵까레의 논리는 요컨대 수학에서 유일하게 수용할 수 있는 대상은 유한개의 단어로 정의될 수 있거나, 정수로부터 정해진 단계를 거쳐 구축될 수 있는 대상들 뿐이라는 것이다.

특히 브라우어는 논리학과 수학을 별개의 차원에 두고 수학적 대상의 자율성을 주장하면서 배중율을 거부하고 오직 구성적 증명만을 받아들인다.

이렇게 되면 선택공리의 위상도 흔들리게 된다. 어떤 성질을 만족하는 대상의 존재성을 논할 때 그 대상을 어떻게 구성하는지 꼭 밝힐 필요 없이도 존재성을 주장할 수 있다는 것이 선택공리이다. 유한개의 자루가 있을 때에는 각 자루에서 물건 하나씩을 꺼내 새로운 집합을 만들 수 있다. 그러나 무한개의 자루가 있을 때에는? 직관주의자들에게 있어서 대답은 물론 부정적이다.

또 다른 진영은 논리주의와 형식주의로 불리는 학파로서 프레게(Frege, 1848~1925), 럿셀(Russell, 1872~1970), 데데킨트, 그리고 힐버트(Hilbert, 1862~1943) 등이 여기에 해당한다.

힐베트는 「수학의 기초」에서 이렇게 역설한다.

> 수학자에게서 배중율을 빼앗는 것은 천문학자에게서 망원경을, 권투선수에게서 주먹을 빼앗는 것과 마찬가지이다.[31]

이처럼 그는 '칸토어가 만든 낙원'에서 축출되기를 거절하면서 실무한을 허수(imaginary number)처럼 수용할 것을 권고한다. 그리고 수학적 존재의 기준으로서 무모순이면 충분하다고 생각한다. 그의 형식주의란 초기 '순진한' 집합론이 야기한 역설을 엄격한 공리화작업으로 제거할 수 있다는 믿음에서 나온 것이다.

두 진영의 논쟁은 수학적인 문제라기보다는 철학적 내지 가치관의 차이에서 비롯되기에 결론을 내기가 지난한 일이다. 우리가 새로운 칸토어의 출현을 기대하는 소이가 여기에 있다.

Ⅶ. 나오면서

볼짜노의 공적을 요약하자면, 첫째, '프라하의 주민'이라는 속성의 예에서 보듯이 한 집합의 결정은 내포(comprehension)의 원리에 기초하는데, 이 원리는 모든 개념은 하나의 유일한 외연(extension)을 결정한다는 것이다.

그의 두 번째 기여는, 무한 개념이 다양한 정도(degree), 즉 무한집합의 크기가 같지 않다는 점을 명백히 밝혔다는 점이다. 그래서 시대적 한계에 따른 '결함'에도 불구

31) 모리스 클라인, 수학의 확실성, p.293.

하고 그의 「무한의 역설」은 나중에 데데킨트나 칸토어에게 길을 열어준 기념비적인 저서라고 말하는데 우리는 인색하지 않을 것이다.

우리는 앞에서 무한 개념이 수학자 사회를 양분했다고 지적했는데, 끝으로 우리의 입장을 밝히기 위해 역사를 좀 더 거슬러 올라가 보자. 근대 합리론의 시조인 데카르트(Descartes, 1596~1650)는 유한한 인간이 어떻게 무한을 결정하려고 하는지 반문한다.

> 그래서 우리는 무한에 관한 논쟁에 개입하지 않을 것이다. 유한한 존재인 우리가 무한에 대해 무언가를 결정하고자 하는 것은 더더우기 웃기는 일이다. 무한을 이해하고자 하면서 실은 무한을 유한으로 여기게 된다. 그래서 우리는 무한직선의 반이 무한인지 무한수가 짝수인지 홀수인지 따위의 질문에 개의치 않을 것이다. 그러한 문제를 검토할 수 있다고 믿는 자들은 그들의 정신이 무한하다고 망상하는 자들뿐이기 때문이다.32)

'수학의 황제'라는 별명을 지닌 가우스(Gauss, 1777~1855)는 어떠한가.

> 나는 무한을 완전한 전체로서 사용하는 것에 반대한다. 수학에서 이런 연산은 허용되지 않는다. 무한이란 하나의 말하는 방식일 뿐이다. 왜냐하면 그것은 사실인즉 극한에 관한 일이기 때문이다.33)

앞에서도 언급된 브라우어의 비판은 통렬하다.

> 칸토어는 생각될 수 없는, 즉 수학적으로 구성될 수 없는 무언가를 언급한다. 왜냐하면 'etc'로 만들어진 하나의 전체는 이 'etc'가 ω유형을 가리킬 때에만 생각될 수 있다. 그러나 이 'etc'는 ω순서유형을 가리키지 않는다. 여기에서 칸토어는 수학이라는 단단한 땅과의 접촉을 잃어버린다.34)

실무한은 나열(enumeration)과정의 끝에 가서 도달되는 것이 아니므로 우리는 이 세 수학자의 관점에 공감하는 경향을 지니고 있다. 이 과정은 정의상 끝이 없기 때문이다. 새로운 칸토어의 출현을 기대하면서 몇 가지 의문으로 결론을 대신하고자 한다.

첫째, 물리 세계에 적용될 수 있는 수학에서 과연 실무한의 도입이 필요한가?

둘째, 설령 그러하다고 해도, 정수집합의 기수, 즉 가산무한집합이면 충분하지 않은가? 실수집합의 기수, 비가산무한집합의 도입이 꼭 필요한가?

---

32) Principes de la philosophie. in Oeuvres et lettres de Descartes, Gallimard, 1953(1644), pp. 582-583.

33) Lettre à schumacher, 12 juillet 1831.

34) M. Bourdeau, Brouwer 의 논문(1907)에서 집합률에 대한 비판, p.38, 「인문사회수학」 N°164, EHESS, 2003, p.38.

실무한은 수학자의 연산(operation)이나 인간의 경험세계 밖에 있으며, 다만 우리의 '의지'에 의해서만 제기될 수 있는 것이 아닌지 자문하지 않을 수 없다. 이것이 아마도 칸토어가 자신의 초한수 이론을 자연과학 특히 물리학에 적용하는데 실패한 사실을 설명하는데 어떤 단서를 제공할 수 있지 않을까?

참고문헌

1. Badiou Alein, *Le Nombre et les nombres*, Seuil, 1990.
2. Belna J-P., *La notion de nombre chez Dedekind*, Cantor, Frege. Vrin, (1996).
3. ___________ , *Cantor*, Belles lettres, (2000).
4. Bolzano B., *Les paradoxes de l'infini*, trad., notes H. Sinaceur, Paris, Le Seuil, 1993(1851).
5. Cantor G., *Fondements d'une théorie générale des ensembles*. Leibzig, Teubner. Trad. Milner in Cahiers pour l'Analyse 10. La formalisation, pp. 35-52, Le Seuil, Paris 1969(1883).
6. ___________, Correspondance Cantor-Dedekind, Trad. J. Cavaillès. in Cavailles J., *Philosophie des mathématiques*. Paris, Hermann, 1962, p. 179-250
7. Cavailles J., *Philosophie des mathématiques*, Herman, (1962).
8. Charraud N., *Infini et Inconscient*, Essai sur G. Cantor, Anthropos, 1994.
9. Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg. Trad. *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils?* Publié avec Continuité et nombres irrationnels. Trad. J. Milner & H. Sinacoeur., Paris 1978(1888)
10. Delahaye J.P., *L'infini est-il paradoxal en mathématiques? In Pour la science* n°278, décembre 2000, p. 30-38, (2000).
11. Descartes R., *Principes de la philosophie*, in Œuvres et lettres de Descartes, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1953(1644).
12. Gilbert Thérèse & ROUCHE Nicolas, *La notion d'infini*, ellipses, 2001
13. Guillen M., *Bridges to infinity*, Jeremy P. Tarcher, Inc, 1983.
14. Hilbert D., Sur *l'infini*, dans J. Largeault (dir.), *Logique mathématique. Textes*, A. Colin 1972, (1929).
15. Kaufmann Felix, *The infinite in mathematics*, D. Reidel, 1978.
16. Lauria Philippe, *Cantor et le transfini*, L'Harmattan, 2004.
17. Leibniz G.W.F, Lettre à Jean Bernoulli. in *Mathematische Schriften*, éd.

Gerhardt, Ⅲ, 535, (1698).
18. Levy T., *Thābit ibn Qurra et l'infini numérique. In Pour la science* n°278, décembre 2000(2000).
19. Monnoyeur F., (éd.), *Infini des mathématiciens et infini des philosophes*, Belin, 1992.
20. Poincare H., *La logique de l'infini, in Logique et fondements des mathématiques*, p. 393-415, (1909).
21. Sierpinski Waclaw, *Leçons sur les nombres transfinis*, Jacques Gabay, 1928.

별첨 1

볼짜노의 「무한의 역설」 §32에 다음과 같은 무한수열이 나온다.

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

문제를 푸는 방식에 따라 세 가지 상이한 답이 나온다.

1) $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$

$\quad = \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \cdots$

$\quad = \ 0$

2) $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)$

$\quad = 1 - \ 0$

$\quad = 1$

3) $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)$
우변의 괄호 안은 S와 같기 때문에
$S = 1 - S$

$2S = 1$

$\therefore S = \frac{1}{2}$

볼짜노는 S에 대해 "대상이 없는 표상"이라고 한다.

다음과 같은 수열은 어떠한가.

$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \cdots$

여기에서는 네 가지 상이한 답이 나온다.

1) $S = 1 + (-2+4) + (-8+16) + (-32+64) + \cdots$

$= 1 + 2 + 8 + 32 + \cdots$

$= \infty$

2) $S = (1-2) + (4-8) + (16-32) + (64-128) + \cdots$

$= (-1) + (-4) + (-16) + (-64) + \cdots$

$= -\infty$

3) $S = 1 + (-2+4) + (-8+16) + (-32+64) + \cdots$

$= 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots)$

$= 1 - 2S$

$\therefore\ 3S = 1 \qquad S = \dfrac{1}{3}$

4) $S = (1 + 4 + 16 + 64 + \cdots) - (2 + 8 + 32 + \cdots)$

$= \infty - \infty$

$= 0$

도대체 어떻게 해서 이런 일이 발생하는가? 짐작하는 바와 같이 1), 2), 3)은 덧셈의 결합법칙, 4)는 덧셈의 교환법칙을 적용한 것이다. 이런 법칙들은 유한 합에 대해서는 적용되지만 무한 합에 대해서는 유효하지 않다.

별첨 2. 칸토어의 초한서수 이론

유한의 세계에서는 기수(cardinal)와 서수(ordinal)는 같다. 유한 집합에서는 원소들을 열거하는 방식과는 무관하게 마지막으로 열거된 원소, 예컨대 i 번째 원소가 이 집합의 기수가 된다. 무한집합의 경우 사정은 달라진다. 아래와 같은 집합을 고려해보자.

$E=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$F=\{2, 3, 4, \cdots, 1\}$

$G=\{1, 3, 5, \cdots, 2, 4, 6, \cdots\}$

E, F, G는 똑같은 기수, 즉 자연수의 기수를 갖는다. 그러나 서수는 각각 ω, $\omega+1$, $\omega+\omega$가 된다. 이를 일반화하면 하나의 기수에 무한대의 순서수가 대응한다고 볼 수 있겠다.
이제 정렬집합(well-ordered set)의 정의를 내려 보자. 정렬집합 S의 부분집합 S'에는 최소원소 s가 존재한다.
정렬순서(well-order)는 모든 부분이 최대원소와 최소원소를 갖는 유한한 유형의 특징 중 최소원소만을 요구한다. 그리고 위의 정의는 다른 원소가 남아있지 않는 한, 각각의 원소가 단 하나의 계승자(successor)를 가질 것을 함축한다.
이 정의에 의해 다음은 정렬순서가 아닌 사례들이다.[35)]

(i). $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
(ii). $\left\{0, \cdots, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2}, \cdots, 1, \frac{1}{2}, \cdots, 2, \cdots\right\}$
(iii). $\{0, 1, 2, 3, \cdots, -3, -2, -1\}$

다음은 정렬집합의 사례들이다.[36)]

(i). $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
(ii). $\{1, 2, 3, \cdots, 0\}$
(iii). $\{0, 2, 4, 6, \cdots, 1, 3, 5 \cdots\}$

서수의 집합은 정렬집합이다. 먼저 자연수 집합 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$을 만들어 이 집합을

35) (i)에는 최소원소가 없고, (ii)에서는 0의 계승자가 없으며, (iii)에서는 $\mathbb{N}$의 계승자가 없다.
36) (i)에는 다른 원소들이 남아있지 않기 때문에 계승자를 지정할 필요가 없으며, (ii)에서는 모든 자연수의 계승자로서 0이 지정되어 있고, (iii)에서는 1이 모든 짝수의 계승자이다.

ω라 명명한다. 이 순서수 ω는 자연수 전체 집합(IN)의 크기(length)이다.
ω 다음의 순서수는 "$\omega+1$"인데, 여기에서 "+"는 합(合)의 기호가 아니라 ω 다음의 위치를 가리키는 것이다. 예컨대, $\{1, 2, 3, 4, \cdots, 0\}$과 같은 집합이다. 모든 "$\omega+$__"를 계승하는 서수가 "$\omega+\omega$" 또는 "$\omega\times 2$"가 되고, 2 다음 서수는 "$(\omega\times 2)+1$". 모든 "$(\omega\times 2)+$__"를 계승하는 서수는 "$\omega\times 3$"이 되고, 이어서 ω^2, ω^2+1, ω^2+2, $\cdots$ 로 계속되다가 w^3에 이르게 되고, 결국 ω^ω, $\omega^\omega+1$, $\omega^\omega+2$, $\cdots$ 로 나가다가 ω^{ω^ω}, $\cdots$, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, $\cdots$ 로 끝없이 이어진다. 자연수 이외의 서수는 모두 초한순서수(transfinite ordinal number)이다.
이상의 설명을 일목요연하게 정리하면 다음과 같다.

1

2

3

$\vdots$

ω

$\omega+1$

$\omega+2$

$\vdots$

$\omega+\omega=\omega\times 2$

$\omega\times 2+1$

$\vdots$

$\omega\times 2+\omega=\omega\times 3$

$\vdots$

$\omega\times\omega=\omega^2$

ω^2+1

$\vdots$

$\omega^2+\omega$

$\vdots$

$\omega^2+\omega\times\omega=\omega^2\times 2$

$\vdots$

$\omega^2\times\omega=\omega^3$

$\vdots$

ω^ω

$\vdots$

$\omega^{\omega+\omega}=\omega^{\omega\times 2}$

$\vdots$

$\omega^{\omega \times \omega} = \omega^{\omega^2}$

$\vdots$

ω^{ω^ω}

$\vdots$

$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$

ω는 단지 최초의 무한 서수에 지나지 않는다. 그래서 무한개의 무한서수가 존재하게 되는 것이다. ω는 모든 유한정수 다음에 오는 진정한 수, 달리 말해서 모든 정수의 극한으로서 최초의 (또는 가장 작은) 무한서수가 된다. 그래서 무한개의 무한서수가 존재하게 되는 것이다. 이것은 신(神)의 절대적 무한성이라는 유일성과는 대비된다.

Bolzano and the Evolution of the Concept of Infinity

Department of french language and literature Duksung Women's University **Kye Seop Cheong**

The concept of infinity, as with other scientific concepts, has a history of evolution. In the present work we intend to discuss the subject matter with regard to Bolzano since he is considered to be the first to accept the idea of actual infinity not just from a metaphysical perspective but from a mathematical one.

Like modern platonists, Bolzano defended the infinite set itself regardless of the construction process; this is based on the principal of comprehension and unicity of denotation regarding all concepts.

In addition, instead of considering as paradoxical the fact that a one-to-one correspondence existed between an infinite set and its parts, he regarded it in a positive way as a special characteristic.

While the Greek era recognized the existence of only one infinity, Bolzano acknowledged the existence of various types of infinity and formulated a logical definition for it.

The question of infinity is a touchstone of constructive method which holds an increasingly important role in mathematics. The present study stops with just a brief reference to the subject matter and we will leave further in-depth investigation for later.

Key words : actual infinity, one-to-one correspondence, equipotent, transfinite number, constructivism

2000 Mathematics Subject Classification : 97-03

ZDM Subject Classification : E25

접수일 : 2008년 7월 15일 수정일 : 2008년 8월 4일 게재확정일 : 2008년 8월 10일