

지반의 공간적 변동성을 고려한 확률론적 해석기법에 관한 연구

A Study on the Probabilistic Analysis Method Considering Spatial Variability of Soil Properties

조 성 은¹ Cho, Sung-Eun

박 형 춘² Park, Hyung-Choon

Abstract

Geotechnical engineering problems are characterized by many sources of uncertainty. Some of these sources are connected to the uncertainties of soil properties involved in the analysis. In this paper, a numerical procedure for a probabilistic analysis that considers the spatial variability of soil properties is presented to study the response of spatially random soil. The approach integrates a commercial finite difference method and random field theory into the framework of a probabilistic analysis. Two-dimensional non-Gaussian random fields are generated based on a Karhunen-Loève expansion in a fashion consistent with a specified marginal distribution function and an autocorrelation function. A Monte Carlo simulation is then used to determine the statistical response based on the random fields. A series of analyses were performed to study the effects of uncertainty due to the spatial heterogeneity on the settlement and bearing capacity of a rough strip footing. The simulations provide insight into the application of uncertainty treatment to the geotechnical problem and show the importance of the spatial variability of soil properties with regard to the outcome of a probabilistic assessment.

요 지

지반공학 문제는 많은 불확실한 요인을 내포한다. 이러한 불확실성 중 일부는 해석 수행과정에 필요한 지반 물성의 변동성과 관련이 있다. 본 연구에서는 지반물성의 공간적 변동성을 고려한 확률론적 해석을 수행할 수 있는 절차를 제시하였다. 제시된 방법은 유한차분 해석기법과 랜덤필드 이론을 확률론적 해석기법에 통합하게 된다. 지정된 입력 확률분포함수와 자기상관함수를 따르는 non-Gaussian 랜덤필드를 생성하기 위하여 Karhunen-Loève 전개법을 사용하였다. 생성된 랜덤필드를 이용하여 확률론적 응답을 얻기 위해 Monte Carlo 시뮬레이션을 수행하였다. 지반의 공간적인 변동성에 기인하는 불확실성의 효과를 연구하기 위하여 대상 기초의 침하량과 지지력에 대한 일련의 해석을 수행하였다. 해석결과는 지반공학 문제에서 불확실성을 고려할 수 있는 관점을 제시하며 확률론적 평가의 결과에 미치는 지반물성의 공간적 변동성의 중요성을 보여준다.

Keywords : Autocorrelation function, Monte Carlo simulation, Probabilistic analysis, Random field, Spatial variability

1 정회원, 한국수자원공사 수자원연구원 선임연구원 (Member, Senior Researcher, Korea Institute of Water and Environment, drsecho@hanmail.net, 교신저자)

2 정회원, 충남대학교 토목공학과 조교수 (Member, Assistant Prof., Dept. of Civil Engrg., Chungnam National Univ.)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2009년 2월 28일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

1. 서론

지반의 불확실성은 공간적인 변동성, 측정오차 및 모델의 불확실성 등 다양한 원인에 기인하나 자연재료로서 지반은 균질한 지층에서도 위치에 따라 변동성을 나타낸다. 이러한 변동성은 지반의 조성 성분, 퇴적상황, 응력이력 등의 원인으로 발생하며 지반의 불확실성을 유발하는 본질적인 원인이다(Lacasse와 Nadim, 1996; Elkateb 등, 2002). 그럼에도 불구하고 대부분의 지반공학과 관련된 해석들은 각각의 지층에 대하여 정해진 하나의 지반 변수를 사용하는 결정론적 접근법을 사용하고 있다. 따라서 최근 들어 지반에서의 불확실성을 체계적으로 고려하기 위한 확률론적 해석기법에 관한 연구가 많이 수행되어지고 있다(Li와 Lumb, 1987; Alonso, 1976; Vanmarcke, 1977).

확률론적 해석의 경우에도 모든 불확실성을 고려할 수는 없고 목표신뢰도를 어떻게 정할 것인가 하는 문제를 안고 있다. 그러나 확률론적 해석법은 불확실성을 해석과 설계에 정량적으로 반영할 수 있고 각 변수의 변동에 따른 영향을 파악할 수 있는 합리적인 접근법이다. 따라서 확률론적 모델은 기존의 결정론적 모델에서는 고려될 수 없었던 지반구조의 위험도와 신뢰성에 대한 새로운 시각을 제공할 수 있다. 특히, 요즘 지반 고유의 특성인 공간적 변동성에 의한 지반구조물의 거동 변화에 대한 연구가 주목을 받고 있다. 지반의 공간적인 불균질성(heterogeneity)은 설계와 해석에 필연적으로 불확실성을 야기하며 기존의 균질한 지반을 대상으로 했던 해석과 설계에서는 고려될 수 없었던 지반구조의 거동특성을 드러낸다. 지반의 공간적 불균질성을 고려한 확률론적 해석기법에는 여러 가지가 있지만 최근 들어 컴퓨터의 발달에 힘입어 입력 물성을 랜덤필드로 고려하고 유한요소법이나 유한차분법 같은 수치해석기법에 적용하여 Monte Carlo 시뮬레이션을 수행함으로써 대상 지반구조물 거동의 확률분포를 평가하는 기법들이 많이 적용되고 있다.

이러한 기법들을 이용하여 Griffiths와 Fenton(2001), Fenton과 Griffiths(2003), Popescu 등(2005)은 얇은 기초의 거동에 대하여 연구하였으며 Haldar와 Babu(2007)는 깊은 기초의 거동을 연구하였다. Paice 등(1996)은 탄성 지반위의 기초의 침하를 연구하였고 Griffiths와 Fenton(2000)은 사면안정에 대하여 연구하였다. 이 밖에 Popescu 등(1997)과 Koutsourelakis 등(2002)은 지반의 액상화를,

Kim 등(2007)은 지반의 변동과 관련되어 나타나는 현상들에 대한 연구를 보고하였다.

본 연구에서는 확률론적 해석에 지반 물성의 변동성을 고려하기 위한 수치적인 절차를 제시하였다. 제시된 방법은 유한차분 해석기법과 랜덤필드 이론을 확률론적 해석기법에 통합하게 된다. 공간적으로 변하는 지반물성은 랜덤필드 이론에 의해 모델링되며 물성의 공간적 변동성이 지반의 거동에 미치는 영향을 평가하기 위하여 유한차분 해석이 수행된다. 지정된 확률분포함수와 자기상관함수(autocorrelation function)를 따르는 non-Gaussian 랜덤필드를 생성하기 위하여 Karhunen-Loève 전개법을 사용하여 Gaussian 랜덤필드를 생성한 후 non-Gaussian 랜덤필드로 변환하였다.

제안된 기법을 기초의 침하량과 지지력 문제에 적용하여 지반의 공간적 변동성이 확률론적 평가에 미치는 영향을 예시하였다

2. 랜덤 필드 모델

2.1 지반의 공간적 변동성

자연재료로서 지반은 균질한 지층에서도 위치에 따라 특성에 변동성을 보인다. 이러한 공간적인 변동성은 지반의 조성 성분, 퇴적상황, 응력이력 등의 원인으로 발생하며 지반의 불확실성을 유발하는 본질적인 원인이다(Lacasse와 Nadim, 1996; Elkateb 등, 2002).

지반의 공간적인 변동성은 무작위적 특성을 가지지는 않으며 공간에서의 위치에 의해 지배된다. 평균이나 분산 같은 하나의 값으로 주어지는 통계적 정보는 지반의 공간적인 변동특성을 나타낼 수 없다. 지반물성의 공간적 변동성은 랜덤필드 모델의 이론적 틀에서 상관구조(correlation structure)에 의해 효과적으로 설명될 수 있다(Vanmarcke, 1983).

지반의 특성이 강한 상관성을 나타내는 공간적인 범위를 표현함으로써 지반의 상관성을 나타내기 위하여 변동자(scale of fluctuation, Vanmarcke, 1983)와 자기상관거리(autocorrelation distance, DeGroot과 Baecher, 1993)의 두 가지 지표가 사용되어져 왔다.

자기상관거리는 자기상관함수값이 $1/e$ 로 감소하는 거리로 정의되며 변동자 δ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta) d\eta \quad (1)$$

여기서 $\rho(\eta)$ 는 자기상관함수이며 η 는 공간상의 두 점간의 거리를 나타낸다.

지수형태의 상관함수의 경우 변동자의 크기는 자기상관거리의 2배와 같다. 큰 값의 자기상관거리는 지반의 물성이 넓은 공간적 범위에 걸쳐서 강한 상관성을 나타내어 지층내에서 점진적인 변화를 보이는 것을 의미한다. 반대로, 작은 자기상관거리는 지반의 변동폭이 크게 나타나는 것을 의미한다.

보통 방향에 관계없이 모든 방향으로 동일한 상관관계를 나타내는 등방 상관구조(isotropic correlation)가 많이 사용되어져 왔지만 대부분의 자연적으로 생성된 지반의 경우 보통 지질학적 형성 과정으로 인하여 연직방향의 상관거리가 수평방향의 상관거리에 비하여 훨씬 작은 경향이 있으며 이들 값의 비가 약 10배 이상이 되는 경우도 흔하다(Baecher와 Christian, 2003). 자기상관거리의 값은 공간적인 지반물성의 분포로부터 통계적인 처리를 통하여 구할 수 있다(Hsu와 Nelson, 2006; Baecher와 Christian, 2003).

Gaussian 랜덤필드는 평균 $\mu(x)$, 분산 $\sigma^2(x)$ 및 자기상관함수 $\rho(x, x')$ 에 의해서 완전히 정의될 수 있다. 지반공학 분야에서 널리 사용되는 자기상관함수는 Li와 Lumb(1987), Rackwitz(2000)에 의해 주어졌다. 본 연구에서는 식 (2)와 같은 지수형태의 상관함수를 사용하였으며 연직과 수평방향의 상관구조가 다른 비등방 상관구조를 적용하였다.

$$\rho(x, y) = \exp\left(-\frac{|x-x'|}{l_h} - \frac{|y-y'|}{l_v}\right) \quad (2)$$

여기서, l_h, l_v 는 각각 수평 및 연직 방향의 자기상관거리이다.

2.2 랜덤필드의 이산화

해석에서 지반 특성의 공간적 변동성은 지반 특성을 나타내는 변수를 하나의 랜덤 변수로 모델링하면 고려할 수 없으며 공간적 변동성을 정확하게 나타내기 위해서는 랜덤필드로 모델링하는 것이 바람직하다.

유한요소법이나 유한차분법 같은 수치해석법은 불연속적인 특성을 가지므로 해석을 수행하기 위해서는 변

수의 연속적인 랜덤필드 또한 유한개의 랜덤변수들로 이산화 되어야 한다. 이러한 과정을 랜덤필드의 이산화(discretization)라 한다.

랜덤필드의 이산화를 수행하기 위하여 공간 평균법(spatial averaging method), 중심점법(midpoint method), 형상함수법(shape function method) 같은 여러 방법들이 개발되어져 왔다. 이들 초기 방법들은 랜덤필드를 정확하게 근사화하기 위해서는 많은 수의 랜덤 변수들이 필요하다는 점에서 효율성이 낮은 방법이라 할 수 있다. 한편, 랜덤필드를 이산화 하는데 보다 효율적인 KLE(Karhunen-Loève expansion), OSE(orthogonal series expansion), EOLE(Expansion Optimal Linear Estimation) 방법 같은 급수전개법들이 개발되었다. 모든 급수전개법들은 랜덤 변수들과 랜덤필드의 상관구조에 의존하는 결정론적인 공간의 함수들에 의해 표현되는 Gaussian 필드로 결과가 귀결된다. 이때 랜덤필드의 근사화는 영향이 작은 항들의 생략을 통해 이루어진다. 급수전개로 표현되는 랜덤필드의 정확도는 사용되는 특정 방법의 종류와 포함되는 항의 수에 따라 결정된다. 이들 이산화 방법들에 대한 자세한 소개와 비교는 Sudret과 Der Kiureghian (2000)과 Matthies 등(1997)에 의해 주어졌다.

본 연구에서는 지반 물성의 비등방 랜덤필드를 이산화하기 위해서 다른 방법들과 비교해 소정의 정확도를 얻기 위해 요구되는 항의 수가 가장 적은 Karhunen-Loève 전개법(Ghiocel과 Ghanem, 2002)을 사용하였다.

2.3 Karhunen-Loève 전개법

랜덤 필드 $H(x, \theta)$ 의 Karhunen-Loève 전개는 자기상관함수(autocorrelation function) $\rho(x, x')$ 의 주성분 분석에 기초한다. 랜덤 필드의 실현 $H(x, \theta_o)$ 를 전개하기 위해 필요한 기저 함수들은 다음의 고유치문제(eigenvalue problem)에 의해 정의된다.

$$\int_{\Omega} \rho(x, x') \phi_i(x') d\Omega_{x'} = \lambda_i \phi_i(x) \quad (3)$$

여기서 λ_i, ϕ_i 는 식 (3)의 해인 고유치 및 고유벡터이다.

$H(x, \theta)$ 의 전개는 직교(orthogonal) 랜덤 계수 $\xi_i(\theta)$ (평균이 0이고 분산이 1인 비상관 랜덤변수들)를 사용하여 다음과 같이 주성분 분석에 의한 기저함수들의 선형조합으로 표현할 수 있다.

$$H(x, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma \sqrt{\lambda_i} \phi_i(x) \xi_i(\theta), \quad x \in \Omega \quad (4)$$

Karhunen-Loève 전개에서 가장 중요한 점은 무작위적인(random) 공간적 변동이 확정적인 공간변수의 함수들과 이들 변수들과 독립적인 랜덤 계수들로 분해된다는 것이다.

Karhunen-Loève 전개식은 자기상관함수의 대칭성으로 인하여 크기가 단조 감소하는 특성을 가지며 감소율은 자기상관거리에 반비례한다.

식 (4)를 M 항까지만 포함하도록 하면 랜덤필드의 근사값은 다음과 같다.

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{i=1}^M \sigma \sqrt{\lambda_i} \phi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (5)$$

이때 M 은 자기상관함수와 요구되는 정확도에 따라 결정되어야 한다.

식 (3)은 몇몇 제한된 자기상관함수와 해석영역에 대해서만 해석적으로 풀 수 있으며 삼각형(triangular) 및 지수 형태의 자기상관함수에 대한 일차원 영역의 해석적인 해가 Spanos와 Ghanem(1989) 및 Ghanem과 Spanos(1991)에 의해 주어졌다. 이 경우를 제외하고는 식 (3)의 고유치 문제는 수치해석 방법에 의해 풀어야 하며 Galerkin 방법에 의한 해석 절차가 Ghanem과 Spanos(1991)에 의해 제시되었다.

식 (2)와 같은 지수방정식 형태의 자기상관함수인 경우, $\Omega = [-a, a]$ 인 일차원 문제의 고유치문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{-a}^a e^{-\frac{|x-x'|}{l}} \phi_i(x') dx' = \lambda_i \phi_i(x) \quad (6)$$

여기서, l 은 자기상관거리이다.

식 (6)의 적분식은 미분방정식으로 전환함으로써 풀 수 있으며 해는 다음과 같다(Ghanem과 Spanos, 1991; Sudret과 Der Kiureghian, 2000).

(1) i 가 홀수인 경우:

$$\lambda_i = \frac{2l}{1 + \omega_i^2 l^2}, \quad \phi_i(x) = \alpha_i \cos \omega_i x, \quad \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin 2\omega_i a}{2\omega_i}}} \quad (7)$$

여기서 ω_i 는 $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a} \right]$ 의 범위에서 다음

식의 해이다.

$$\frac{1}{l} - \omega_i \tan \omega_i a = 0 \quad (8)$$

(2) i 가 짝수인 경우:

$$\lambda_i = \frac{2l}{1 + \omega_i^2 l^2}, \quad \phi_i(x) = \alpha_i \sin \omega_i x, \quad \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin 2\omega_i a}{2\omega_i}}} \quad (9)$$

여기서 ω_i 는 $\left[(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}, i\frac{\pi}{a} \right]$ 의 범위에서 다음 식의 해이다.

$$\frac{1}{l} \tan \omega_i a + \omega_i = 0 \quad (10)$$

ω 는 그래프로부터 결정되거나 수치해석 도구인 MATLAB의 *fzero*(·) 함수를 이용하여 구할 수 있다(Choi 등, 2007; Sudret과 Der Kiureghian, 2000). 해는 고유치의 값이 큰 순서대로 정리한다($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \cdots \lambda_M$).

2차원 고유치문제의 해는 다음과 같이 1차원 해의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_i = \lambda_{i_1}^{1D} \cdot \lambda_{i_2}^{1D}, \quad \phi(x) \equiv \phi(x, y) = \phi_{i_1}(x) \cdot \phi_{i_2}(y) \quad (11)$$

여기서 첨자 ID 는 1차원 해를 의미한다.

고유치문제의 영역은 목표가 되는 랜덤필드의 영역과 반드시 일치할 필요는 없으며 경계에서의 분산 오차를 제한하기 위해서 고유치문제의 영역은 랜덤필드의 영역보다 크게 정의될 수 있다(Sudret과 Der Kiureghian, 2000).

2.4 랜덤변수의 샘플링 기법

랜덤필드를 생성하기 위해서는 식 (5)의 랜덤 벡터 ξ 를 샘플링해야 한다. 본 연구에서는 ξ 를 생성하기 위하여 Latin hypercube 샘플링 기법을 사용한다. Random 샘플링은 표본들이 모집단 전체의 경향을 정확하게 나타낼 수 있도록 주어진 확률분포로부터 무작위로 추출하는 방법이다. Random 샘플링 기법은 샘플이 충분히 많은 경우에 쉽게 적용할 수 있는 장점을 가지고 있으나 모델을 평가하는데 많은 시간과 비용이 소요되는 경우에는 적용에 문제가 있다.

Latin hypercube 샘플링 기법은 누적확률분포를 동등

한 확률간격으로 나누고 각 간격에서 확률변수(random variable)를 무작위 추출하는 계층화 랜덤(stratified-random) 샘플링 기법이다. 따라서 보다 작은 수의 샘플링으로 확률분포의 넓은 영역을 망라할 수 있는 효율적인 샘플링 기법이다. M 개의 랜덤변수 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ 에 대해 규정된 확률분포함수로부터 N_{sim} 번의 샘플링을 Latin hypercube 샘플링 기법으로 수행하기 위하여 본 연구에서는 랜덤변수들 사이의 상관성을 고려한 샘플링을 수행할 수 있는 방법(Stein, 1987)을 적용하였다.

2.5 non-Gaussian 랜덤필드로의 변환

사용의 편리함과 실제 데이터의 부족 등으로 인하여 Gaussian 랜덤필드가 공간적인 변동성을 포함하는 불확실성을 모델하기 위하여 자주 사용되지만 랜덤변수가 항상 양의 값을 가질 때에는 사용할 수 없는 경우가 많다.

이때 목표로 하는 non-Gaussian 랜덤필드 \tilde{H} 로 쉽게 변환될 수 있는 Gaussian 랜덤필드 H 를 구하는 것이 편리하다. non-Gaussian 랜덤필드를 나타내는 \tilde{H} 의 누적확률분포함수를 G 라 하면 단일 Gaussian 변수의 비선형 변환은 사상(mapping) $h(\cdot)$ 이다(Vořechovský, 2008).

$$\tilde{H}(x_k) = h[H(x_k)] = G^{-1}\{\Phi[H(x_k)]\}, \quad k=1, \dots, N_d \quad (12)$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 은 표준정규누적확률함수(standard cumulative Gaussian probability function)이며, N_d 는 이산화되는 점의 수를 나타낸다.

만약 랜덤변수가 대수정규분포(lognormal distribution)를 따른다면 대수정규 랜덤필드는 다음과 같이 Gaussian 필드로부터 구할 수 있다.

$$\tilde{H}(x, \theta) = \exp\left[\mu + \sum_{i=1}^M \sigma \sqrt{\lambda_i} \phi_i(x) \xi_i(\theta)\right] \quad (13)$$

Liu와 Der Kiureghian(1986)은 non-Gaussian 다변량 분포를 표준정규분포로 변환하기 위하여 Nataf 모델을 사용하였다. Nataf 모델을 적용하기 위하여 non-Gaussian 변수들의 각 쌍들 사이의 상관계수 $\tilde{\rho}_{i,j}$ 는 Gaussian 변수들의 각 쌍들 사이의 상관계수 $\rho_{i,j}$ 를 구성하기 위하여 조정되어야 한다. Liu와 Der Kiureghian(1986)에 따르면 조정은 다음과 같이 원 상관계수의 수정으로 표현된다.

$$\rho_{i,j} = \kappa(G_i, G_j, \tilde{\rho}_{i,j}) \tilde{\rho}_{i,j}, \quad \kappa \geq 1 \quad (14)$$

여기서 κ 는 원래의 확률분포함수들과 그들 사이의 상관계수의 함수이다.

Karhunen-Loève 전개에 의하여 non-Gaussian 랜덤필드를 생성하기 위해서는 원 공간의 입력 랜덤필드의 분포를 표준 정규 공간(standardized normal distribution)으로 변환하여 자기상관 구조를 평가해서 입력값으로 사용해야 한다. 그러나 만약 원 공간(original space)에서의 자기상관함수가 바로 주어진다면 원래의 자기상관계수를 Gaussian 공간으로 변환하기 위하여 Nataf model의 수정함수가 모든 범위의 자기상관계수 $\tilde{\rho}$ 에 대하여 구해져야 한다. 이는 Karhunen-Loève 전개를 위한 자기상관 구조의 성분 분해가 Gaussian 공간에서 수행되기 때문이다.

3. 확률론적 해석

3.1 한계상태 함수(limit state function)

확률론적 해석 문제는 종종 기본 랜덤변수들로 이루어진 벡터 $\mathbf{X}=[X_1, X_2, \dots, X_n]$ 로 정식화 된다. 랜덤변수들에 의해 한계상태를 나타내는 한계상태함수 $g(\mathbf{X})$ 가 정의되며 한계상태는 설계변수의 공간에서 안전과 파괴의 경계(즉, $g(\mathbf{X})=0$)를 정의한다. 이때 파괴확률은 다음과 같이 표현되는 다차원 적분식으로 정의된다.

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1, dX_2, \dots, dX_n \quad (15)$$

여기서, $f_{\mathbf{X}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 는 기본 랜덤변수들 X_1, X_2, \dots, X_n 의 결합확률밀도함수(joint probability density function)이며, 파괴영역에 대하여 적분을 수행한다. 대부분의 실제 문제의 경우, 한계상태함수를 나타내는 기본 랜덤변수들의 결합확률밀도함수를 정의하고 물리적 거동을 나타내는 복잡한 적분영역에 대하여 n 차의 다중적분을 수행하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 식 (15)를 계산하기 위하여 Monte Carlo 시뮬레이션 같은 시뮬레이션 기법이나 FORM 혹은 SORM 같은 간략화 방법이 사용되어진다. Monte Carlo 시뮬레이션은 식 (15)를 계산하기 위하여 확률변수들의 확률분포특성이 반영된 난수를 발생시켜 표본집단을 생성한 후, 한계상태식을 계산하고 이 과정을 충분한 수만큼 반복하여 파괴확률을 추정하는 방법이다.

지반공학에서의 확률론적 접근은 지반구조물의 확률론적 거동을 결정하거나 신뢰성을 평가하기 위한 것이다. 그동안 많은 확률론적 방법이 제안되어져 왔지만 지반공학 문제의 경우 지반의 거동이 강한 비선형성을 가지며 물성의 변동성이 큰 특징을 가지고 있다. 이 경우 확률론적 문제에 대한 정확한 해를 얻을 수 있는 유일한 보편적인 방법은 Monte Carlo 시뮬레이션 방법이다. 지반의 공간적 변동성을 고려하는 Monte Carlo 시뮬레이션을 수행하기 위해서는 지반의 특성을 나타내는 통계적 정보인 확률분포와 상관구조를 만족하는 일련의 랜덤필드를 생성하고 각각의 생성된 랜덤필드에 대하여 해석을 수행함으로써 지반구조물의 거동을 계산하게 된다. 이러한 과정을 여러 번 반복하여 식 (15)의 식을 계산함으로써 파괴확률을 구할 수 있다. Monte Carlo 시뮬레이션은 파괴확률 뿐 아니라 지반구조의 거동에 대한 평균, 표준편차, 확률밀도함수 및 누적확률분포 등의

정보를 평가할 수 있으므로 주어진 시스템에 대한 보다 폭 넓은 정보를 제공할 수 있게 해준다.

제안된 랜덤필드를 고려한 확률론적 해석기법의 절차는 그림 1에 요약되어 있다.

4. 예제해석

본 연구에서는 제안된 절차를 얇은 기초의 즉시침하와 점성토 지반위의 얇은 기초의 지지력 문제에 적용하였다. 한계상태함수를 계산하기 위하여 유한차분해석 프로그램인 FLAC을 이용하여 침하와 지지력을 구하였다.

확률론적 해석은 랜덤변수의 확률분포가 대수정규분포(log-normal distribution)인 경우를 고려하였다. 입력 물성의 확률분포는 변수 X 의 평균 μ_X 와 표준편차 σ_X 로 표현된다. 무차원의 변동계수 $V_X(=\sigma_X/\mu_X)$ 를 정의하면 대수정규분포의 경우 변수의 대수값은 정규분포를 따

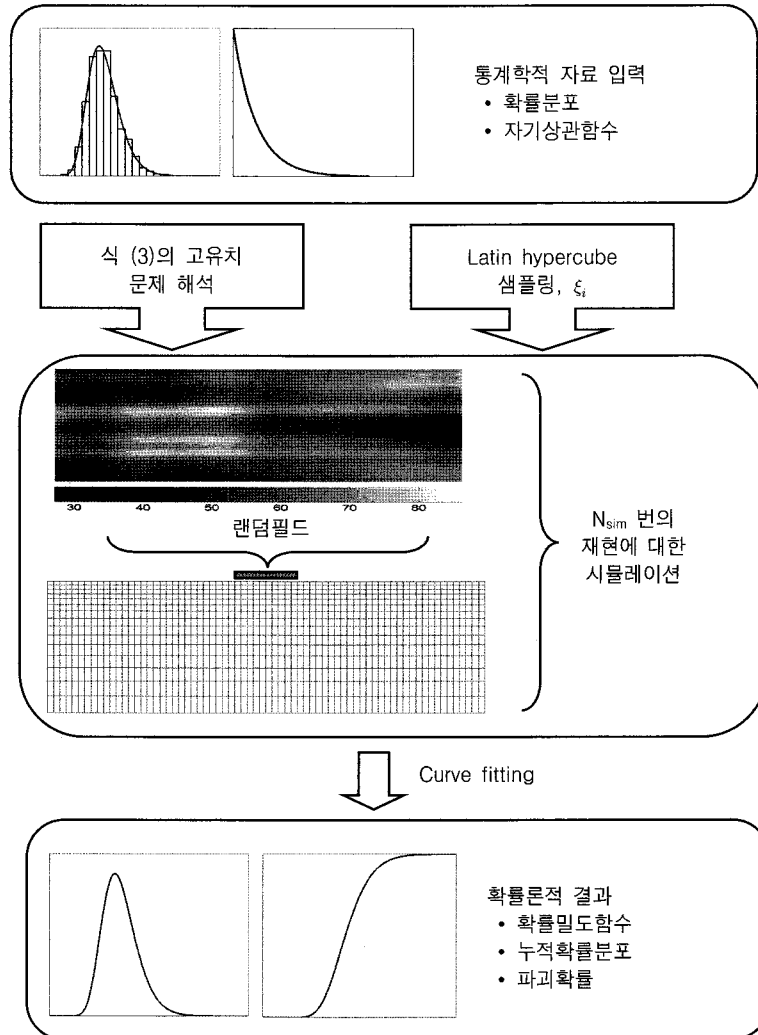


그림 1. 공간적 변동성을 고려한 제안된 확률론적 해석기법의 흐름도

르게 되며 평균과 표준편차는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln\{1 + V_X^2\}} \quad (16)$$

$$\mu_{\ln X} = \ln \mu_X - 0.5\sigma_{\ln X}^2 \quad (17)$$

4.1 예제1: 얇은 기초의 즉시침하

기초의 침하량의 경우 한계상태함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$g(\mathbf{X}) = D_{all} - D \quad (18)$$

여기서, D_{all} 은 설계기준에 따라 주어지는 기초의 최대허용침하량 값이며 대부분의 설계기준은 탄성론을 이용하여 그 값을 계산한다. D 는 랜덤변수의 함수인 주어진 점에서의 침하량이다.

그림 2는 해석에 사용된 영역을 나타내며 바닥의 수평 및 수직 변위, 양 측면의 수평변형은 구속되었다.

전개되는 랜덤필드의 공간적 변동성을 정확하게 반영하기 위해서는 전개식에 포함되는 성분 수 M 을 신

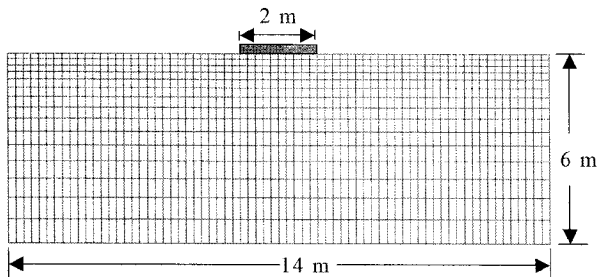


그림 2. 기초의 즉시침하와 지지력 해석을 위한 격자망

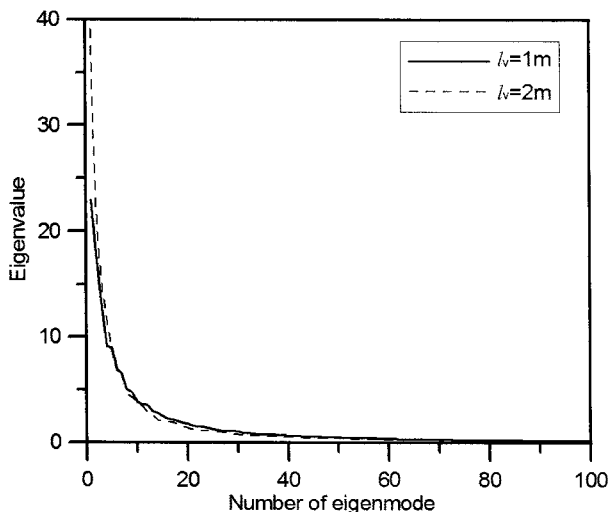


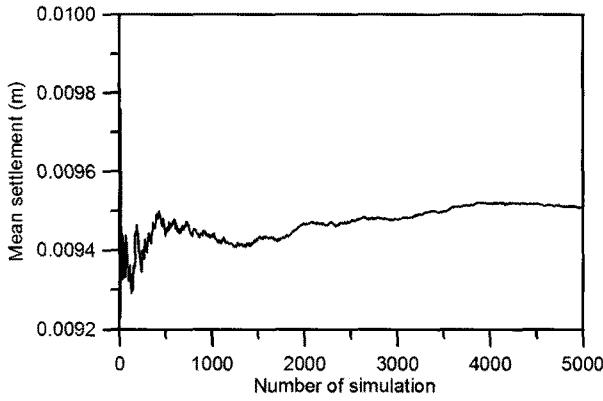
그림 3. 자기상관함수의 고유치 성분

중하게 선택해야 한다. 그림 3은 지수방정식 형태의 자기상관함수(식 (2))에 대하여 그림 2의 해석영역에 대한 식 (3)의 고유치 해석의 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 고유치는 단조 감소하는 경향을 보이며 자기상관거리가 작을수록 고유치의 감소하는 정도가 작으므로 랜덤필드를 정확하게 나타내기 위해 더 많은 항이 필요함을 알 수 있다. 본 연구에서는 랜덤필드를 나타내기 위하여 100개의 성분을 사용하였다. 지반의 자기상관거리에 대해서는 축적된 자료가 많지 않아 더 많은 연구가 필요한 실정이지만 El-Ramly 등(2003)이 수행한 문헌연구의 결과에 따르면 수평방향의 자기상관거리는 10-40m의 범위이고 연직방향의 자기상관거리는 1-3m 정도인 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 기초의 즉시침하에 대한 적용을 위하여 수평 자기상관거리 10m와 연직 자기상관거리 1m를 적용하였으며 5000회의 랜덤필드를 생성하여 이에 대한 기초 바닥 중앙에서의 즉시침하량을 유한차분 해석으로 구하였다. 각각의 생성된 랜덤필드는 해석영역에 대하여 가능한 하나의 지반물성 분포를 나타낸다. 침하량의 경우 탄성계수와 포아송비가 영향을 미치는 주요변수이지만 포아송비의 경우 침하량의 크기에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 알려져 있으므로 탄성계수만을 랜덤변수로 고려하였다(Paice 등, 1996). 해석에 사용된 지반의 물성치는 표 1에 나타내었으며 기초에 작용하는 하중은 0.2MPa/m²을 사용하였다.

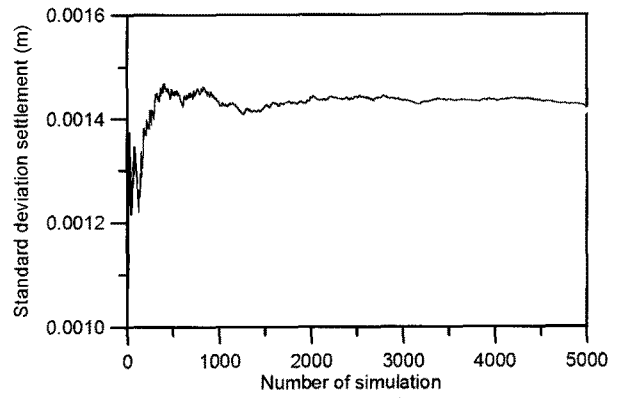
지반의 변동성을 고려하지 않고 평균 탄성계수를 이용한 결정론적 해석에 의한 침하량은 0.88cm로 계산되었다. 그림 4(a)와 그림 4(b)는 Monte Carlo 시뮬레이션의 시행횟수에 따른 즉시침하의 평균값과 표준편차의 값을 나타낸 것으로 일정 수준의 횟수 이후에 평균값과 표준편차는 수렴하고 있음을 알 수 있으며 그림 4(a)에서 지반의 변동성을 고려할 경우 침하량의 평균값은 결정론에 의한 침하량보다 크게 계산되고 있음을 알 수 있다. 그림 4(c)는 침하량의 확률밀도함수를 나타낸다. 여러 확률분포 함수에 대한 적합성 검정을 통하여 적정 확률분포 함수를 선택할 수도 있으며, 본 예제에서는 그림 4(c)와 같이 역 가우스 분포(inverse Gaussian distri-

표 1. 침하량 계산에 사용된 지반의 물성치

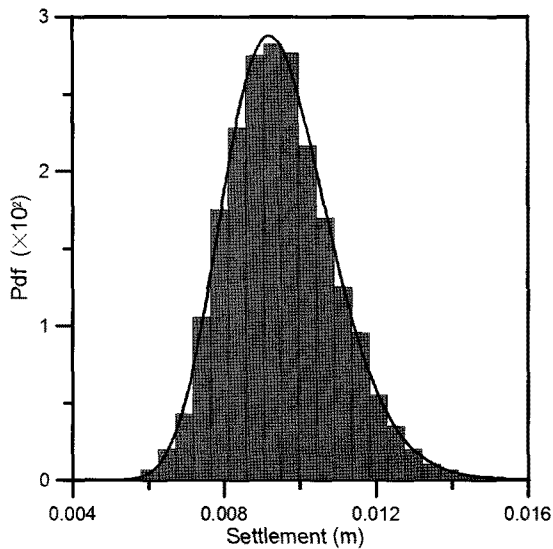
구분	평균 μ_X	변동계수 V_X
포아송비, ν	0.3	-
탄성계수, E	50MPa	0.3



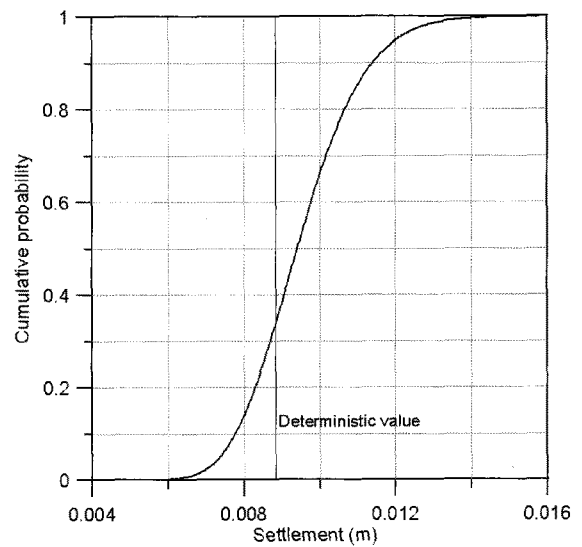
(a) 시행 횟수에 따른 즉시침하량의 평균



(b) 시행 횟수에 따른 즉시침하량의 표준편차



(c) 확률밀도함수



(d) 누적확률분포함수

그림 4. 예제 1: Monte Carlo 시뮬레이션의 결과(즉시침하)

bution)에 의해 침하량의 확률분포를 잘 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 그림 4(d)는 침하량의 누적확률분포를 나타내며 이로부터 허용 침하량에 따른 파괴확률을 쉽게 구할 수 있다. 그림 4(d)에서 기초의 즉시침하량이 균질한 지반에 대한 결정론적인 침하량 값을 초과할 확률이 약 65% 정도임을 알 수 있다.

그림 5는 생성된 5000번의 랜덤필드 중 일부와 이에 따른 해석 결과를 나타낸 것이다. 탄성계수의 분포를 나타내는 그림에서 어두운 부분은 탄성계수가 작은 영역을 나타내고 밝은 부분은 탄성계수가 큰 영역을 나타내고 있으며 연직방향의 상관거리가 수평방향의 상관거리보다 작은 값이 사용되었기 때문에 연직방향의 변동성이 더 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 변위분포를 나타내는 그림들로부터 탄성계수의 공간적인 변동으로 인하여 다양한 지반의 비대칭 변형 메카니즘이 반영되고 있음을 알 수 있다.

4.2 예제2: 점성 지반위의 얇은 기초의 지지력

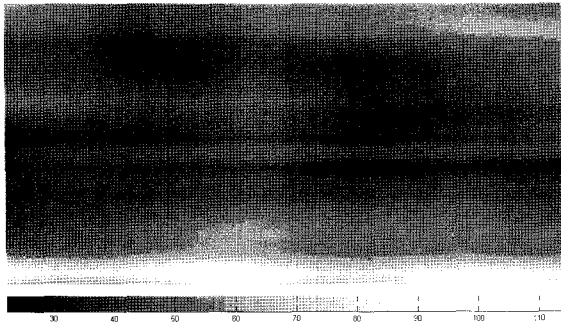
Terzaghi와 Peck(1967)에 의하면 비배수 전단강도가 c 인 점성 지반위의 대상기초(strip footing)의 지지력은 Prandtl의 해에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$q_u = cN_c = c(2 + \pi) \quad (19)$$

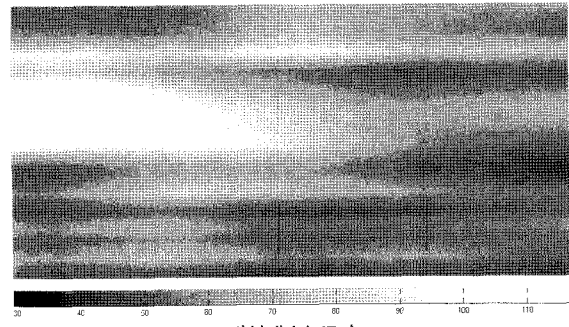
이때 기초의 지지력에 대한 한계상태함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(\mathbf{X}) = q - q_{all} \quad (20)$$

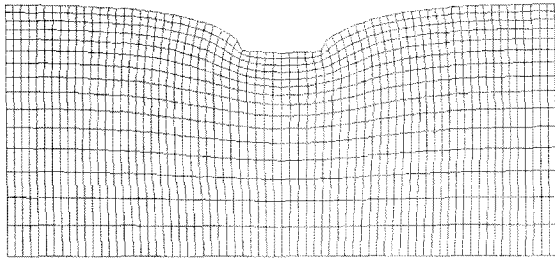
여기서, q_{all} 은 지반물성의 평균값과 안전율(FS)에 의하여 결정론적으로 계산되는 허용지지력이며 q 는 랜덤 변수의 함수인 기초의 지지력으로 유한차분해석에 의해 구해진다.



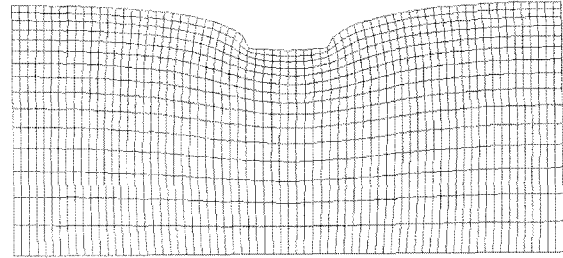
탄성계수(MPa)



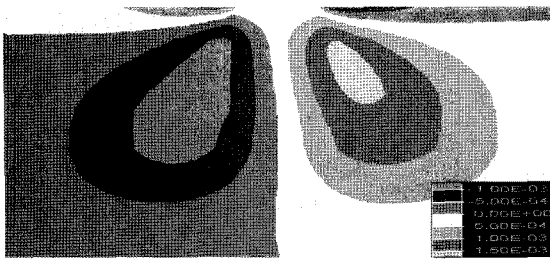
탄성계수(MPa)



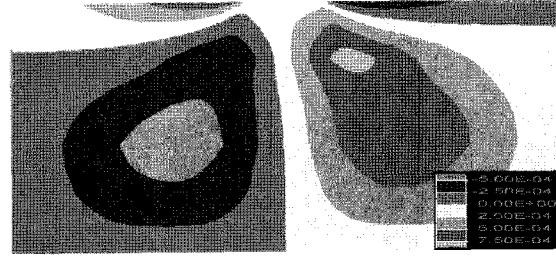
침하 형상



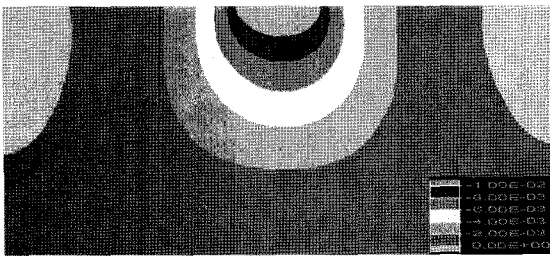
침하 형상



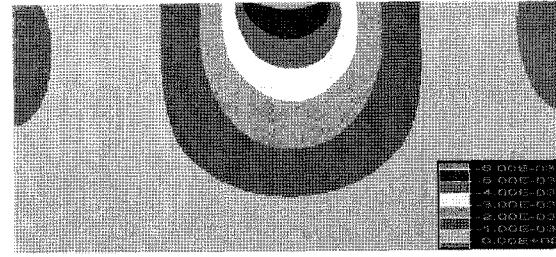
수평변위 분포(m)



수평변위 분포(m)



연직변위 분포(m)



연직변위 분포(m)

(a) Case I(침하량 1.157cm)

(b) Case II(침하량 0.623cm)

그림 5. 예제 1: 특정 랜덤필드의 재현 및 이에 따른 침하량 해석결과($l_h=10m$, $l_v=1m$)

이때 파괴확률은 식 (15)에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$P_f = P[q \leq q_{ult}] = P[q \leq q_u / FS] \quad (21)$$

해석에서 기초에 작용하는 하중은 기초가 위치하게 되는 지표면의 절점에 증가하는 연직방향의 변위를 작용시킴으로써 표현하였고(FLAC의 경우 매 단계마다 변위중분인 작은 연직 속도 성분을 작용시킴) 거친 기초를 나타내기 위해 기초를 나타내는 절점의 수평변위가

0이 되게 하였다. 이때 지반의 비선형거동을 나타내기 위해 Mohr-Coulomb 파괴규준을 사용하였다. 기초의 접촉응력은 평형상태가 얻어진 상태에서 기초의 절점에서의 합력을 기초의 폭으로 나눔으로써 구할 수 있으며 극한지지력은 정상상태의 소성흐름 조건(steady plastic flow condition)에서의 접촉응력으로 정의할 수 있다(ITASCA Consulting Group Inc., 2002). 해석에 사용된 영역은 예제 1에서 사용된 것과 같다. 예제 1과 마찬가지로

지로 랜덤필드를 나타내기 위하여 100개의 성분을 사용하였다. 본 예제에서는 수평 자기상관거리 10m와 연직 자기상관거리 2m를 적용하였으며 5000회의 랜덤필드를 생성하여 이에 대한 해석을 수행하였다. 탄성계수와 포아송비 등 변형에 관련된 변수는 지지력에 큰 영향을 미치지 않으므로 지반의 점착력만을 랜덤변수로 고려하였다. 해석에 사용된 지반의 물성치는 표 2에 나타내었다.

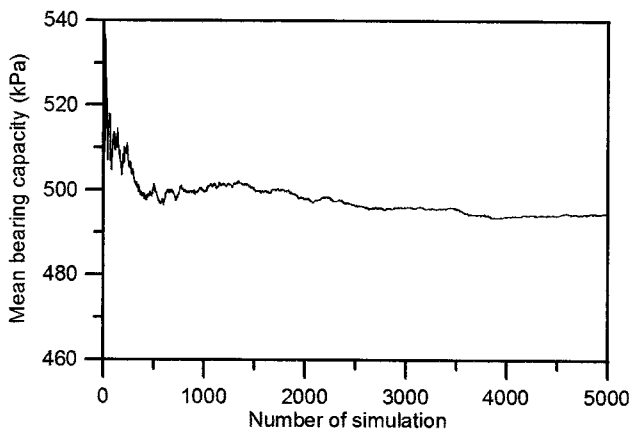
평균값을 이용한 결정론적 해석에 의한 지지력은 518kPa로 계산되어 이론값인 514kPa과 0.78%의 오차를

표 2. 지지력 계산에 사용된 지반의 물성치

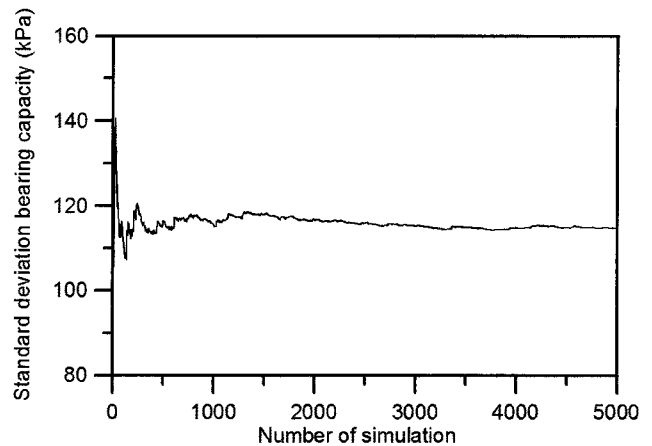
구분	평균 μ_x	변동계수 V_x
전단탄성계수, G	100MPa	-
체적탄성계수, K	200MPa	--
점착력, c	100kPa	0.3

보였다. 기초 끝부분에서의 요소망을 더 작게 구성함으로써 보다 정확한 값을 얻을 수 있으나 본 연구에서는 Monte Carlo 시뮬레이션을 수행하는데 소요되는 계산량을 고려하여 그림 2의 요소망을 유지하였다.

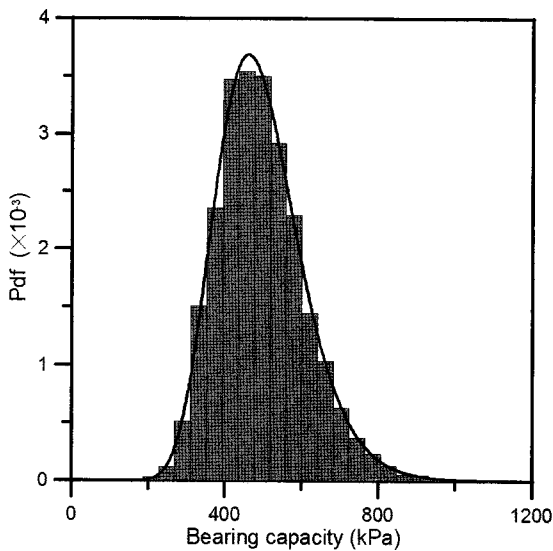
그림 6(a)와 6(b)는 Monte Carlo 시뮬레이션의 시행횟수에 따른 지지력의 평균값과 표준편차의 값을 나타낸 것으로 역시 일정 수준의 횟수 이후에 평균값과 표준편차는 수렴하였다. 흥미로운 것은 그림 6(a)에 나타난 바와 같이 전단강도의 공간적인 변동성을 고려한 시뮬레이션의 평균값이 균질한 지반에 대하여 결정론적으로 계산한 지지력보다 작다는 것이다. 그림 6(c)는 지지력의 확률밀도함수를 나타내며 대수정규분포(lognormal distribution)에 의해 지지력의 확률분포를 잘 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 그림 6(d)는 지지력의 누적확률분포를 나타내며 이로부터 식 (21)의 허용지지력에 대한 파



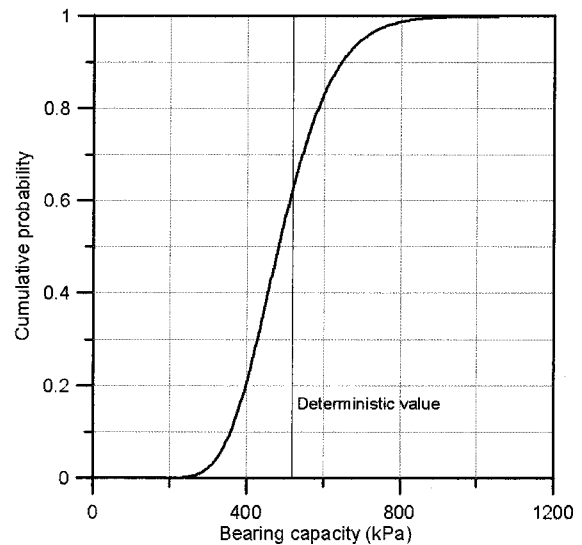
(a) 시행 횟수에 따른 지지력의 평균



(b) 시행 횟수에 따른 지지력의 표준편차



(c) 확률밀도함수



(d) 누적확률분포함수

그림 6. 예제 2: Monte Carlo 시뮬레이션의 결과(지지력)

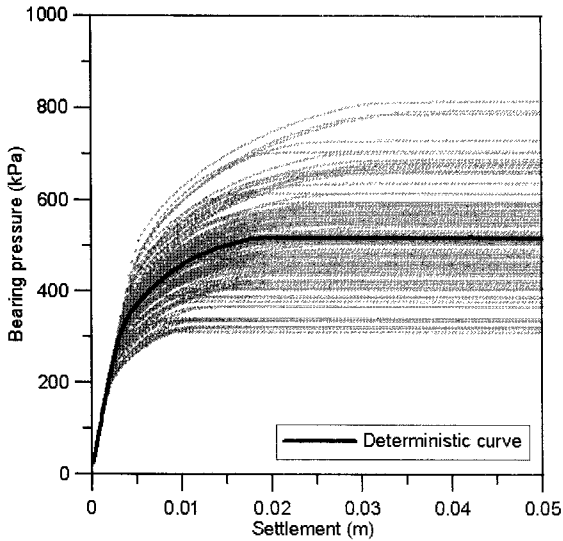
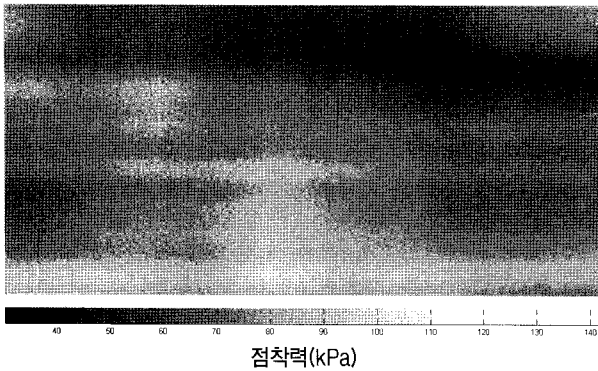


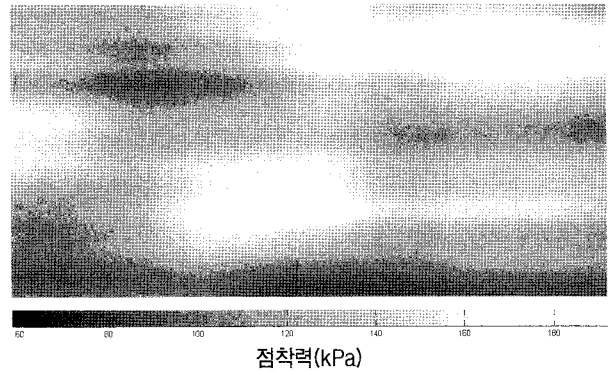
그림 7. 예제 2: 특정 100회의 해석결과에 대한 하중-변위 곡선

과확률을 쉽게 구할 수 있으며 지지력이 지반의 평균 강도로부터 구한 결정론적 지지력보다 작은 확률이 60%를 넘고 있음을 알 수 있다.

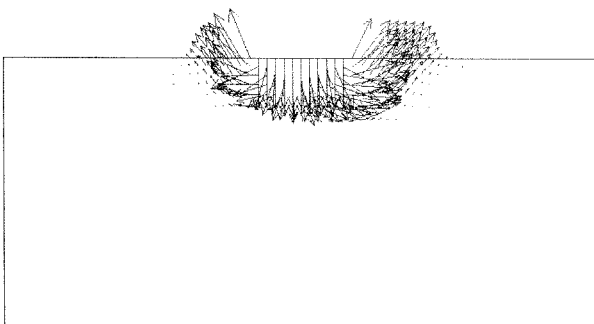
그림 7은 임의로 생성된 100회의 랜덤필드에 대한 해석 결과를 하중-변위 곡선으로 나타낸 것이다. 그림 8은 생성된 5000번의 랜덤필드 중 일부와 이에 따른 해석 결과를 나타낸 것이다. 전단강도 분포를 나타내는 그림에서 어두운 부분은 점착력이 작은 영역을 나타내고 밝은 부분은 점착력이 큰 영역을 나타내고 있다. 점착력의 공간적 분포에 따라 전단강도가 작은 영역을 통과하여 파괴면이 생성되므로 균질한 지반에서의 이론적인 파괴면과는 상당히 다른 파괴면이 생성되고 있으며 이에 따라 지지력도 다른 값을 나타내고 있음을 변위 증분 벡터 분포와 최대 전단변형을 증분 분포를 나타내는 그



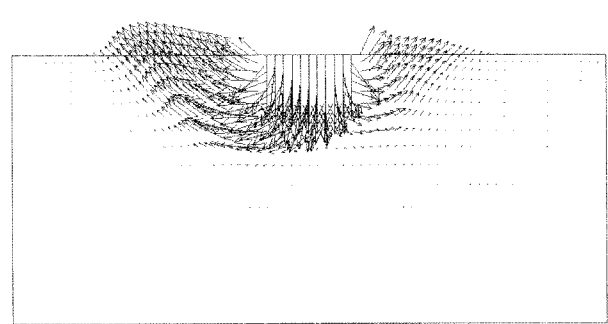
점착력(kPa)



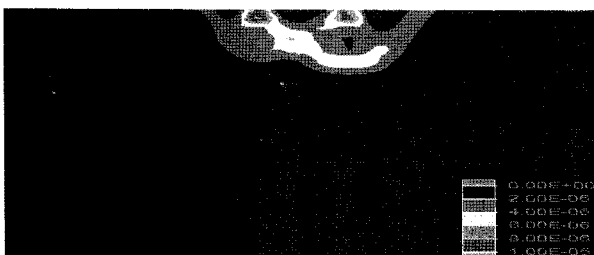
점착력(kPa)



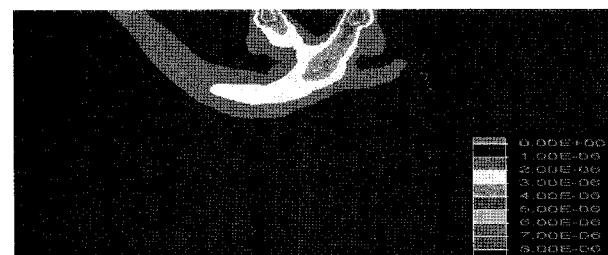
변위 증분 벡터



변위 증분 벡터



최대 전단변형을 증분



최대 전단변형을 증분

(a) Case I(지지력 211 kPa)

(b) Case II(지지력 746 kPa)

그림 8. 예제 2: 특정 랜덤필드의 재현 및 이에 따른 지지력의 해석결과($l_y=10m$, $l_x=2m$)

림에서 알 수 있다.

점착력을 확률분포를 따르는 단지 하나의 랜덤변수로 고려함으로써 지지력의 크기 분포에만 영향을 미치는 기존의 확률론적 해석법과는 달리 지반물성을 확률분포와 자기상관 구조를 만족하는 랜덤필드로 고려하여 공간적 변동을 고려하는 방법은 결정론적 해석이나 지반물성을 하나의 랜덤변수로 고려하는 경우에 나타나지 않는 다양한 지반의 파괴 메카니즘을 반영하고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 확률론적 해석에 지반의 공간적 변동을 고려하기 위한 해석 절차를 제시하였다. 제시된 방법은 유한차분 해석기법과 랜덤필드 이론을 확률론적 해석기법에 통합하게 된다. 공간적으로 변하는 지반물성은 랜덤필드 이론에 의해 모델링되며 물성의 공간적 변동성이 지반의 거동에 미치는 영향을 평가하기 위하여 유한차분 해석이 수행된다. 지정된 입력 확률분포 함수와 자기상관함수를 따르는 non-Gaussian 랜덤필드를 생성하기 위하여 Karhunen-Loève 전개법을 사용하여 Gaussian 랜덤필드를 생성한 후 non-Gaussian 랜덤필드로 변환하였다. 다수의 랜덤필드를 생성하고 생성된 랜덤필드를 이용하여 Monte Carlo 시뮬레이션을 수행함으로써 지반구조물의 거동에 대한 확률분포 및 파괴확률을 평가할 수 있었다. 본 연구에서는 제시된 기법의 지반공학 문제에서의 적용성을 검토하기 위하여 얇은 기초의 침하량 및 비배수 점성 지반에서의 지지력 문제에 적용하였다. 해석 결과에 따르면 지반물성을 나타내는 변수를 단지 하나의 랜덤변수로 고려하는 기존의 확률론적 해석법과 달리 지반물성을 확률분포와 자기상관 구조를 만족하는 랜덤필드로 모델링하여 공간적 변동을 고려하는 방법은 결정론적 해석이나 지반물성을 하나의 랜덤변수로 고려하는 경우에 나타나지 않는 다양한 지반의 파괴 메카니즘을 반영할 수 있었다.

참고 문헌

1. Alonso, E. E. (1976), "Risk Analysis of Slopes and Its Application to Slopes in Canadian Sensitive Clays", *Geotechnique*, Vol.26, pp.453-472.
2. Baecher, G. B., and Christian, J. T. (2003), *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*, John Wiley & Sons.

3. Choi, S., Grandhi, R. V., and Canfield, R. A. (2007), *Reliability-based Structural Design*, Springer-Verlag, London.
4. DeGroot, D. J., and Baecher, G. B. (1993), "Estimating Autocovariance of In-situ Soil Properties", *Journal of the Geotechnical Engineering*, Vol.119, pp.147-166.
5. Elkateb, T., Chalaturnyk, R., and Robertson P. K. (2002), "An Overview of Soil Heterogeneity: Quantification and Implications on Geotechnical Field Problems", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.40, pp.1-15.
6. El-Ramly, H., Morgenstern, N. R., and Cruden, D. M. (2003), "Probabilistic Stability Analysis of a Tailings Dyke on Presheared Clay-shale", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.40, pp.192-208.
7. Fenton, G. A., and Griffiths, D. V. (2003), "Bearing Capacity Prediction of Spatially Random $c-\phi$ Soils", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.40, pp.54-65.
8. Ghanem, R. G., and Spanos, P. D. (1991), *Stochastic Finite Element-A Spectral Approach*, Springer Verlag, New York.
9. Ghiocel, D. M., and Ghanem, R. G. (2002), "Stochastic Finite-element Analysis of Seismic Soil-structure Interaction", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.128, pp.66-77.
10. Griffiths, D. V., and Fenton, G. A. (2000), "Influence of Soil Strength Spatial Variability on the Stability of an Undrained Clay Slope by Finite Elements", *Slope stability 2000, Geotechnical Special Publications No.101*, ASCE, pp.184-193.
11. Griffiths, D. V., and Fenton, G. A. (2001), "Bearing Capacity of Spatially Random Soil: The Undrained Clay Prandtl Problem Revisited", *Géotechnique*, Vol.51, pp.351-359.
12. Haldar, S., and Babu, G. L. S. (2007), "Effect of Soil Variability on the Response of Laterally Loaded Pile in Undrained Clay", *Computers and Geotechnics*, doi:10.1016/j.compgeo.2007.10.004.
13. Hsu, S. C., and Nelson, P. P. (2006), "Material Spatial Variability and Slope Stability for Weak Rock Masses", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.132, No.2, pp. 183-193.
14. ITASCA Consulting Group Inc. (2002), *FLAC fast Lagrangian analysis of continua*, Minneapolis, Minnesota, USA.
15. Kim, H. K., Narsilio, G. A., and Santamarina, J. C. (2007), "Emergent Phenomena in Spatially Varying Soils", *Probabilistic Applications in Geotechnical Engineering*, ASCE Geotechnical Special Publication No.170, doi:10.1061/40914(233)10.
16. Koutsourelakis, S., Prevost, J. H., and Deodatis, G. (2002), "Risk Assessment of an Interacting Structure-soil System due to Liquefaction", *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, Vol.31, pp.851-79.
17. Lacasse, S., and Nadim, F. (1996), "Uncertainties in Characterizing Soil Properties", *Uncertainty in the Geologic Environment: From theory to practice*, (eds Shackelford, CD, Nelson, PP and Roth, MJS.), ASCE Geotechnical Special Publication No.58, pp.49-75.
18. Li, K. S., and Lumb, P. (1987), "Probabilistic Design of Slopes", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.24, pp.520-535.
19. Liu, P. L., and Der Kiureghian, A. (1986), "Multivariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.1, pp.105-112.
20. Matthies, G., Brenner, C., Bucher, C., and Soares, C. (1997), "Uncertainties in Probabilistic Numerical Analysis of Structures and Solids-stochastic Finite Elements", *Structural Safety*, Vol.19, pp.283-336.

21. Paice, G. M., Griffiths, G. V., and Fenton, G. A. (1996), "Finite Element Modeling of Settlement on Spatially Random Soil", *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol.122, pp.777-779.
22. Popescu, R., Deodatis, G., and Nobahar, A. (2005), "Effects of Random Heterogeneity of Soil Properties on Bearing Capacity", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.20, pp.324-341.
23. Popescu, R., Prevost, J. H., and Deodatis, G. (1997), "Effects of Spatial Variability on Soil Liquefaction: Some Design Recommendations", *Géotechnique*, Vol.47, pp.1019-36.
24. Rackwitz, R. (2000), "Reviewing Probabilistic Soils Modeling", *Computers and Geotechnics*, Vol.26, pp.199-223.
25. Spanos, P. D., and Ghanem, R. G. (1989), "Stochastic Finite Element Expansion for Random Media", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.115, pp.1035-1053.
26. Stein, M. L. (1987), "Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling", *Technometrics*, Vol.29, pp.143-151.
27. Sudret, B., and Der Kiureghian, A. (2000), *Stochastic Finite Element Methods and Reliability: a State-of-the-art Report*, Tech. Rep. Report No. UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley, Institute of Structural Engineering, Mechanics and Materials.
28. Terzaghi, K., and Peck, R. B. (1967), *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2nd Ed. New York: John Wiley and Sons.
29. Vanmarcke, E. H. (1977), "Probabilistic Modeling of Soil Profiles", *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)*, Vol.103, pp.1227-1246.
30. Vanmarcke, E. H. (1983), *Random fields: Analysis and Synthesis*, The MIT Press, Cambridge, MA.
31. Vořechovský, M. (2008), "Simulation of Simply Cross Correlated Random Fields by Series Expansion Methods", *Structural Safety*, Vol.30, pp.337-363.

(접수일자 2008. 5. 13, 심사완료일 2008. 8. 8)