

## 비원형 기어의 와이어 방전가공을 위한 설계

이 성 철\*

인하공업전문대학, 기계과

### Design of Noncircular Gears for Wire EDM

Sungchul Lee\*

Dept. of Mechanical Engineering, Inha Technical College  
(Received September 1, 2008; Accepted September 25, 2008)

**Abstract** – This paper presents a step-by-step design of noncircular gears. From the diagram of angular velocity ratio of a noncircular gear pair, the pitch curves of the two mating gears are determined, and the perimeter of the pitch curve has been divided into equal-length segments by the number of teeth. A master tooth profile, which is a composite curve of circular arcs that represents involute, has been introduced. A noncircular gear pair has been designed by imposing the master tooth on the divided points of the pitch curve, and a full fillet has been achieved between neighbour teeth. Thus, the whole profile of the noncircular gear is a composite curve of arcs only, and consequently NC codes for wire EDM can be easily generated.

**Key words** – noncircular gear, elliptical gear, pitch curve, involute, circular interpolation, wire EDM.

#### 1. 서 론

비원형 기어는 기어의 회전 운동과 캠의 부등속 운동을 동시에 구현할 수 있는 부등속 회전 전달 기구로 이에 대한 초기 아이디어는 레오나르도 다빈치의 스케치에서도 볼 수 있으며, 비원형 기어의 편심회전을 이용한 기구 설계 등의 자료가 남아 있다. 기어에 대한 설계 및 가공 기술이 충분히 발달하지 못했던 초창기에도 비원형 기어는 시계작동, 무대장치, 자동 완구 등 여러 분야에 사용되어 왔다[1-3].

비원형 기어를 사용하는 목적은 크게 두 가지로 대별된다. 첫째는 구동부의 각속도 특성을 전반적으로 변화시키기 위한 용도, 둘째는 비선형 기능을 구현하기 위해 정밀한 각운동 변화를 필요로 하는 경우 등에 사용된다. 전자의 경우는 셰이퍼나 이송기구 등에 사용되는 급속 귀환장치 및 간헐 회전기구 등이 있으며, 후자는 기계적 계산기구나 삼각함수나 대수나선함수의 기구

적 운동 구현 등이 그 예이다[4,5]. 비원형 기어의 속도비 변화는 캠이나 링크기구에 의해서도 구현될 수 있다. 일반적으로 캠이나 링크기구의 제작비가 비원형 기어의 가공비용보다 저렴하나 캠은 회전속도가 빨라지면 캠과 피동절 간에 점프가 발생할 수 있으며, 링크기구는 드웰이나 역회전 등에 제약이 있다. 비원형 기어는 컴팩트하고 균형있게 기구가 구성되며, 큰 동력을 전달할 수 있고 속도비가 정확한 장점이 있다[6,7].

비원형 기어의 피치곡선은 구름운동을 만족하면 되기 때문에 비교적 쉽게 설계 되나 피치곡선에 치형을 설계하고 가공하는 것은 매우 복잡하다. 비원형 기어의 가공에는 CNC 밀링, 피니언 커터에 의해 인벌류트 곡선을 창성 절삭하는 CNC 치차형 선반 및 와이어커팅 등이 사용되고 있으며[1], 셰이퍼커터나 래크커터에 의한 가공에 따른 설계 기술이 발표되어 있다[8,9]. 국내에서는 최상훈이 타원계 비원형 기어의 설계에 대한 논문을 발표했으며[10,11], 이성철이 와이어커팅 가공을 위한 타원형 기어 설계방법을 발표하였다[12].

이 논문에서는 이성철에 의해 제안된 타원형 기어의

\*주저자 · 책임저자 : sclee@inhatc.ac.kr

피치곡선을 잇수로 등분하고 등분점에 마스터 치형을 태핑하여 기어의 형상을 원호의 조합곡선으로 설계하는 방법을 일반적인 비원형 기어의 설계에 확장하고자 한다.

### 2. 비원형 기어의 설계

비원형 기어는 회전속도가 변동되며, 피니언의 회전 각  $\theta$ 에 대해 기어의 회전각  $\phi$ 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi = f(\theta) \tag{1}$$

기어와 피니언의 각속도비는 식 (1)의 미분이 되며, 각속도비 선도는 비원형 기어의 회전 특성을 대표적으로 나타내는 것으로 이 논문에서는 각속도비 선도로부터 비원형 기어를 설계하는 방법을 확립한다.

Fig. 1에 예시되어 있는 바와 같이 각속도비 선도에서 각속도비는 일정, 증가 및 감소되는 구간으로 나누며, 총 구간의 개수를  $J$ 라 한다. 구간  $k$ 에서의 각속도비는 다음과 같다.

$$\frac{d\phi_k}{d\theta} = f'_k(\theta), \theta = [\theta_{k-1}, \theta_k] \tag{2}$$

여기서

$$k = 1, 2, \dots, J$$

구간  $k$ 에서 기어의 회전각은 식 (2)를 적분하고 구간  $(k-1)$ 까지의 기어 회전각을 더하면 구해진다.

$$\phi_k(\theta) = f_k(\theta) - f_k(\theta_{k-1}) + \hat{\phi}_{k-1} \tag{3}$$

여기서

$$\hat{\phi}_{k-1} = \phi_{k-1}(\theta_{k-1})$$

비원형 기어의 경우에도 피니언과 기어의 회전 중심축 사이의 거리  $c$ 는 일정하여야 한다. 그리고 피치곡선은 구름접촉을 하므로 다음의 두 식이 만족되어야 한다.

$$r_1(\theta) + r_2(\theta) = c \tag{4}$$

$$r_1 d\theta = r_2 d\phi \tag{5}$$

여기서  $r_1$ 과  $r_2$ 는 피치곡선의 동경으로 각각 피치점에서 피니언과 기어의 회전 중심까지의 거리이며, 피니언은 CCW를, 기어는 CW를 (+)방향 회전으로 한다.

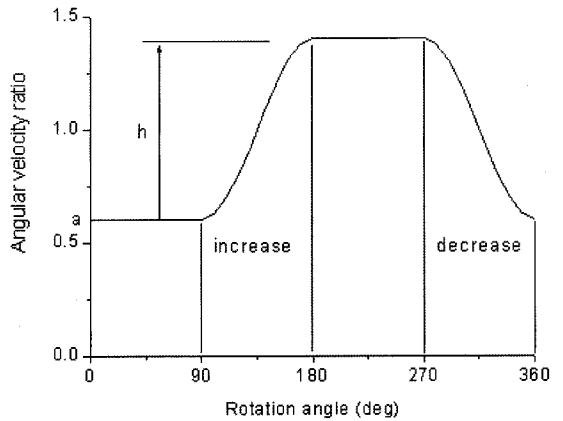


Fig. 1. Angular velocity ratio of a noncircular gear pair.

식 (4)와 (5)에서 각 피치곡선의 동경은 다음과 같이 계산된다.

$$r_1(\theta) = \frac{f'(\theta)}{1+f'(\theta)}c \tag{6}$$

$$r_2(\theta) = \frac{1}{1+f'(\theta)}c \tag{7}$$

따라서 피치곡선은 다음의 식으로 구해진다.

$$\vec{r}_1 = r_1 \cos \theta \vec{i} - r_1 \sin \theta \vec{j} \tag{8}$$

$$\vec{r}_2 = -r_2 \cos \phi \vec{i} - r_2 \sin \phi \vec{j} \tag{9}$$

비원형 기어의 물림시 피치곡선은 구름운동을 하며, 피니언이  $\theta$ 회전 하였을 때 피치곡선이 접촉한 길이는 다음과 같이 계산된다[13].

$$S = \sum_{j=1}^{k-1} \hat{S}_j + \int_{\theta_{k-1}}^{\theta} \sqrt{(r_1')^2 + (r_1)^2} d\theta, \theta_{k-1} < \theta \leq \theta_k \tag{10}$$

여기서

$$\hat{S}_j = \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \sqrt{(r_1')^2 + (r_1)^2} d\theta$$

구간  $j$ 의 피치곡선 길이를 나타낸다.

피치곡선의 전체 길이는 다음과 같이 계산된다.

$$S_p = \sum_{j=1}^J \hat{S}_j \tag{11}$$

일반 원형 기어에서 모듈( $m$ ), 잇수( $z$ ), 원주피치( $c_p$ )의 관계식을 비원형 기어에 적용하면 다음과 같다.

$$c_p = \pi m = \frac{S_z}{z} \quad (12)$$

비원형 기어에서 치의 설계에는 여러 가지 방법이 있지만 이 논문에서는 와이어방전가공을 위한 설계가 목적이므로 피치곡선의 길이를 잇수로 등분한 점, 즉 원주피치만큼 떨어진 등분점을 기준으로 치형을 설계한다.

피니언의 피치곡선을 잇수로 등분할 때  $k$ 번째 등분되는 점의 각  $\zeta_k$ 는  $k$ 번째의 등분점이 속하는 각속도비 구간을  $j$ 라 하면 다음 식을 만족해야 한다.

$$g(\zeta) = \sum_{i=1}^{j-1} S_i + \int_{\theta_{i-1}}^{\zeta} \sqrt{(r_1')^2 + (r_2')^2} d\theta - kc_p = 0 \quad (13)$$

이 식의 수치해는 Newton-Raphson method를 이용하여  $10^{-6}$ 의 오차 이내로 다음과 같이 구하였으며, 계산시 초기값은  $2\pi$ 를 등분한 각을 사용하였다.

$$\zeta_{i-1} = \zeta_i - \frac{g(\zeta_i)}{g'(\zeta_i)}, \quad i=0,1,2,\dots \quad (14)$$

여기서

$$g'(\zeta) = \sqrt{(r_1')^2 + (r_2')^2}, \quad \zeta_0 = \frac{2\pi}{z}k$$

피니언과 기어의 피치곡선은 구름운동을 하기 때문에 피니언 피치곡선을 등분하는 각  $\theta = \zeta_k$ 는 기어의 피치곡선도 등분하는 각이 된다.

피치곡선 등분점을 기준으로 치형을 설계하기 위해서는 이 점에서의 접선벡터가 필요하며, 피니언의 접선벡터는 다음 식으로 구해진다.

$$\vec{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{(x_1')^2 + (y_1')^2}} (x_1' \vec{i} + y_1' \vec{j}) \quad (15)$$

여기서

$$x_1' = r_1' \cos \theta - r_1 \sin \theta$$

$$y_1' = -r_1' \sin \theta - r_1 \cos \theta$$

피니언에서 피치곡선은 변수  $\theta$ 의 증가에 따라 반시계방향으로 곡선이 생성되도록 좌표를 잡았다. 그리고 피치곡선에서 접선벡터는 치형곡선을 매핑하기 위하여 변수의 증분에 대한 반대방향으로 (+)로 잡았다. 기어에서의 접선벡터도 피니언의 경우와 마찬가지로 구하면 된다.

피치곡선의 등분점은 피니언과 기어의 회전시 서로 접촉을 하므로 이 점을 피치점으로 치형을 설계하면

된다. 설계에 사용한 치형은 Fig. 2에 도시한 바와 같이 원호 조합곡선으로 설계한 것으로 이를 마스터 치형이라 부르기로 한다. 그림에서 CD의 치형구간은 인벌류트 곡선과  $1 \mu\text{m}$  이내의 형상오차를 만족한다[14]. 그리고 치형 설계시 모듈, 압력각, 잇수, 전위계수와 백래시가 설계변수로 마스터 치형은 다양한 설계가 가능하다.

피니언이  $\theta = \zeta_k$  회전하면 이에 해당하는 피니언과 기어의 등분점은 Fig. 3에서와 같이 축 중심선을 연결한 선상에서 서로 만나며, 이 점에 Fig. 2의 마스터 치형을 접선벡터가 일치하도록 피니언과 기어의 피치곡선에 매핑하면 Fig. 3과 같은 물림이 이루어진다. Fig. 3에 표시한 접선과 법선벡터는 피니언에 대한 것이며 기어의 경우는 방향이 반대로 벡터가 형성된다. 원형 기어의 경우는 Fig. 3에서 접선벡터가 항상 중심선에 수직방향이 되나, 비원형 기어에서는 접선벡터의 방향이 변하며 이에 따라 물림 압력각이 달라진다. 피치곡선을 원주피치로 등분하는 피치점에 치형을 설계하고 인접한 치형의 이빨리 부분은 원호로 접합시키면 비원형 기어의 전체 치형 형상이 원호의 조합곡선으로 설계된다.

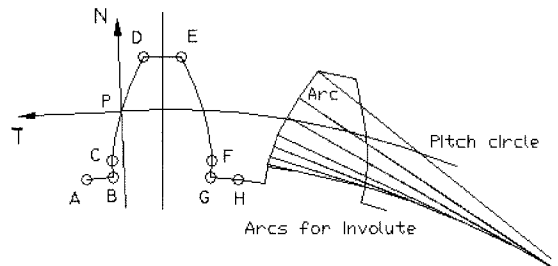


Fig. 2. Master tooth profile.

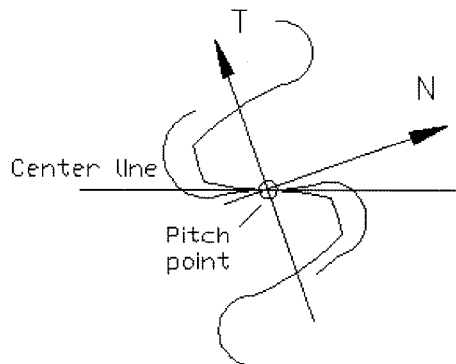


Fig. 3. Tooth mapping on the pitch point.

**Table 1. Design of a noncircular gear pair.**

구 간	S1	S2	S3	S4
피니언 회전각	0°~90°	90°~180°	180°~270°	270°~360°
기어 회전각	0°~54°	54°~144°	144°~270°	270°~360°
피니언 동경	30	증가	46.667	감소
기어 동경	50	감소	33.333	증가
피치곡선 길이	47.124	64.396	73.304	64.396
피치곡선 총길이	249.220			
치형설계	A		B	
모듈	3.173		1.0	
잇수	25		79	
압력각	20°		20°	
백래시	0.3		0.1	
원주피치	9.969		3.155	

**3. 비원형 기어의 설계예**

각속도비가 Fig. 1과 같이 일정, 증가, 일정, 감소로 변동되며, 각 구간의 피니언 회전각 범위가 90도인 비원형 기어를 설계 대상으로 한다. Fig. 1의 각속도비 선도는 캠의 변위 선도와 유사하며, 각속도비가 변동되는 구간은 캠의 변위 곡선 설계 기법을 적용할 수 있다. 일정한 각속도비  $a$ 로 회전하다가  $h$ 만큼 변동되는 경우 각속도비 증가나 감소 구간을 단순조화함수를 사용하여 부드럽게 연결하면 각 구간에서 각속도비는 다음과 같이 나타내 진다[15].

$$\begin{aligned}
 f_1'(\theta) &= a, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
 f_2'(\theta) &= a + \frac{h}{2}[1 + \cos 2\theta], \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\
 f_3'(\theta) &= a + h, \quad \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\
 f_4'(\theta) &= a + \frac{h}{2}[1 - \cos 2\theta], \quad \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

각 구간의 종료 위치에서 기어의 회전각은 식 (3)에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_1 &= a\frac{\pi}{2} \\
 \hat{\phi}_2 &= \left(a + \frac{h}{4}\right)\pi \\
 \hat{\phi}_3 &= \left(a + \frac{h}{2}\right)\frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

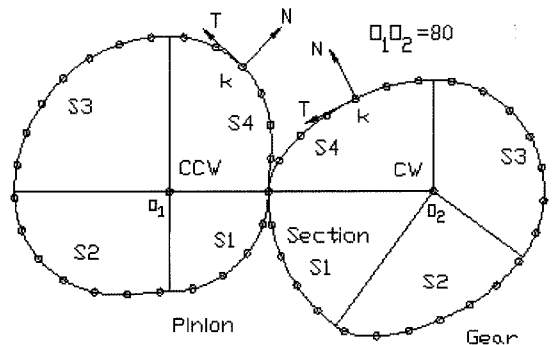
$$\hat{\phi}_4 = \left(a + \frac{h}{2}\right)2\pi \tag{17}$$

피니언의 1회전에 대해 기어의 회전이 반복되기 위해서는 다음의  $I$ 값이 정수가 되어야 한다.

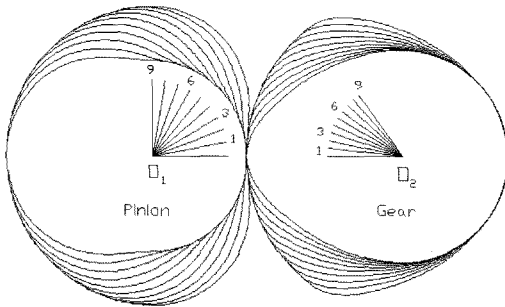
$$I = \frac{2\pi}{\hat{\phi}_4} \tag{18}$$

이 논문에서는  $I=1$  즉, 피니언과 기어의 잇수가 같은 경우를 대상으로 한다. 식 (18)의 조건을 만족시키기 위해 각속도비 데이터로  $a=0.6, h=0.8$ 을 사용하였으며, 피니언과 기어의 회전 중심축 사이의 거리는  $c=80$ 으로 하였다.

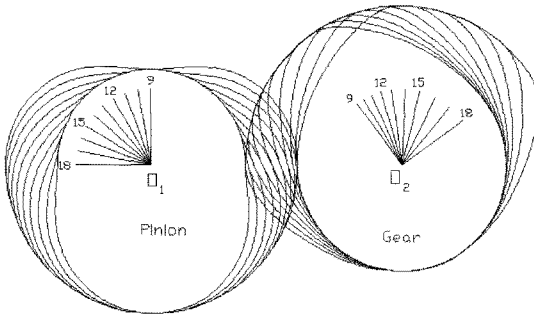
비원형 기어의 설계 결과는 Table 1과 같다. 각속도비가 변동되는 구간의 피치곡선 길이는 식 (10)을 수치적분하여 구하였으며, 피치곡선의 등분각은 식 (13)을 수치해석 하여 구했다. 각속도비 선도의 운동을 만족시키는 피치곡선의 형상 설계 결과는 Fig. 4와 같다.



**Fig. 4. Pitch curves of the noncircular gear pair.**



(a) Rotation angle [0, 90 deg]



(b) Rotation angle [90, 180 deg]

Fig. 5. Rolling motion of pitch curves.

설계한 비원형 기어의 피치곡선 구름운동을 피니언이 10도 회전한 간격으로 시뮬레이션 하여 살펴본 결과는 Fig. 5와 같다. Fig. 5의 (a)에서와 같이 각속도비가 일정한 구간에서는 피치점이 일정한 위치에 있으며, 기어도 일정한 회전을 하지만, (b)와 같이 각속도비가 증가하는 구간에서는 피치점이 기어 중심방향으로 이동되며 기어 회전각의 증가 폭이 커지는 것이 확인된다. 그리고 피치곡선에서 각속도비가 일정한 구간 1과 구간 3은 원호로 설계되어 있음을 알 수 있다.

피치곡선의 등분점에서 접선과 법선벡터는 Fig. 4에 도시한 바와 같으며, 여기에 Fig. 2의 마스터 치형의 접선과 법선벡터에 일치시켜 마스터 치형을 매핑하면 접촉점에서 Fig. 3과 같은 물림이 이루어지게 설계된다.

치형 설계는 두 가지를 대상으로 하였는데 Table 1에서 A는 잇수를 기준으로 한 설계이며, B는 모듈을 기준으로 한 설계이다.

설계 A에서는 잇수 25개의 비원형 기어를 설계하였다. Table 1의 A의 설계변수로 마스터 치형을 설계하고 이를 Fig. 4에 표시되어 있는 25개 등분점에 매핑

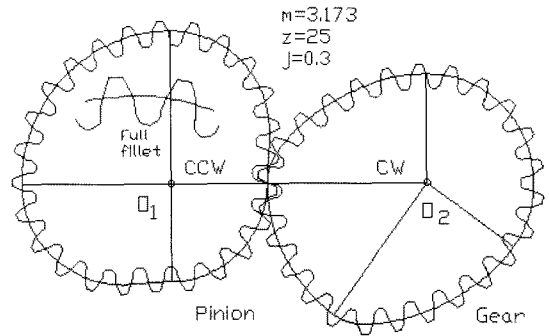


Fig. 6. Noncircular gear;  $m=3.173$ ,  $z=25$ .

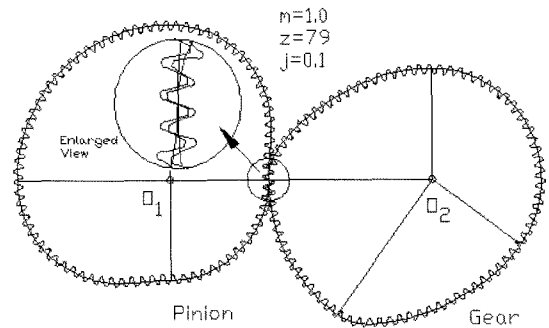


Fig. 7. Noncircular gear;  $m=1.0$ ,  $z=79$ .

하여 치형을 설계한 결과는 Fig. 6과 같다. 여기서 치형의 이뿌리 구간은 두 인접 치형을 완전 원호로 접합시켜 설계한 것이다. 치형 하나가 16개의 원호를 조합한 것으로 잇수 25개의 비원형 기어는 총 400개의 원호로 구성된 것이다.

설계 B에서는 치의 크기가 모듈 1인 기어를 설계하였다. 모듈 1인 경우 원형 기어의 원주피치는 3.142로 이를 사용해서 피치곡선을 등분하면 잇수는 79.3개로 계산된다. 그러나 잇수는 정수이어야 하므로 79개를 잇수로 선정하고 원주피치는 3.155로 피치곡선을 79등분 하였다. Fig. 7은 치형의 크기를 모듈 1로 설계한 결과이며, 치의 크기가 모듈 3.173인 설계 A의 경우 보다 작아 치형 하나가 8개의 원호조합으로 총 632개의 원호로 구성된 것이다.

Fig. 8은 모듈 1로 설계한 비원형 기어에서 피니언이 90도 회전하였을때의 물림형상이며, Fig. 9는 설계한 비원형 기어를 3D 모델로 구현하고 소프트웨어의 어셈블리 기능에서 물림을 시뮬레이션한 것이다. 마스터 치형 설계시에는 백래시를 설계변수로 이두께를 감소시킬 수 있는데 비원형 기어에서는 원형 기어의 경우보다 충분한 백래시를 확보해야 곡률반경의 변화가

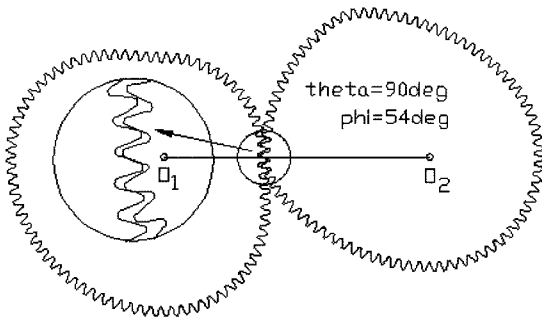


Fig. 8. Rotation of the noncircular gear.

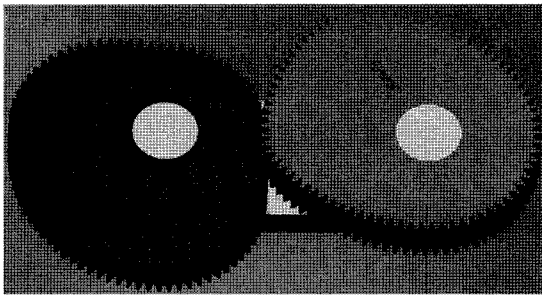


Fig. 9. 3D model of the noncircular gear.

큰 구간에서 치가 끼이는 문제를 방지할 수 있다. 모듈 1의 비원형 기어 설계시 백래시는  $j=0.1\text{ mm}$ 로 하여 치두께를 감소시켜 설계하였기 때문에 Figs. 7과 8의 확대부분에서 볼 수 있듯이 충분한 백래시가 확보되어 있어 원활한 물림이 예상된다.

### 5. 결 론

와이어 방전가공으로 비원형 기어를 가공하는 경우를 대상으로 비원형 기어의 설계 방법을 확립하였다. 각속도비 선도로부터 피치곡선의 형상을 구한 후 피치곡선을 등분하고 이 등분점에 치형을 설계하는 방법으로 비원형 기어를 설계하였다.

와이어 방전가공에서는 표준 모듈이 큰 의미가 없으므로 피치곡선의 길이를 잇수로 나누어 이 등분 길이를 원주피치로 하는 모듈을 계산하여 제안한 설계방법은 마스터 치형을 구하였다. 또 모듈을 기준으로 할 경우에는 피치곡선 길이를 원주피치로 나누어 계산한 수에 근접한 정수를 잇수로 설계하였다. 모듈과 잇수가 결정되면 기어의 일반 설계 식으로부터 마스터 치형을 설계하고, 마스터 치형의 피치점에서 접선벡터와 법선벡터를 구하고 이 벡터들이 피치곡선의 등분점에서

접선벡터와 법선벡터가 되도록 치형을 매핑하여 비원형 기어를 설계하였다. 마스터 치형은 인벌류트 곡선과 1m 이내의 오차를 갖는 원호의 조합곡선으로 설계하였고 마스터 치형의 매핑시 인접한 치의 이뿌리는 완전 필릿이 되도록 접합시켜 비원형 기어의 형상은 원호의 조합곡선만으로 구성하였다.

피치곡선을 잇수로 등분한 점에 피니언과 기어의 피치점을 일치시켜 맞물리는 치형을 설계하였기 때문에 비원형 기어의 피치점 근처에서의 물림 특성은 원형 기어와 유사하나 접선벡터가 중심선 직각방향과 일치하지 않아 물림 압력각은 달라지게 된다. 그리고 치접축이 진행됨에 따라 피치점의 위치와 물림 압력각은 변하게 된다. 비원형기어에서 곡률반경의 변화가 큰 구간은 치의 크기가 상대적으로 커진 결과를 초래하여 치가 서로 강제로 끼워지면서 맞물릴 가능성이 있는데, 제안한 설계방법은 마스터 치형 설계에서 백래시를 설계변수로 하여 표준 이두께에서 백래시만큼 이두께를 감소시켜 설계하기 때문에 충분한 백래시를 확보할 수 있다.

설계예로 각속도비가 일정, 증가, 일정, 감소로 변화되는 비원형 기어를 설계하였다. 기어의 잇수는 25개와 79개인 경우 두 가지를 대상으로 설계하였으며, 물림과정의 시뮬레이션을 통하여 원활히 작동함을 확인하였다.

이 논문에서 제안한 피치곡선을 등분하고 이 등분점에 접선벡터를 일치시켜 마스터 치형을 매핑하여 설계하는 방법은 피치곡선이 결정되면 잇수나 모듈을 기준으로 다양하게 치형을 설계할 수 있다. 더욱이 비원형 기어의 전체 형상을 원호의 조합곡선으로 설계하였기 때문에 이는 와이어 방전가공용 NC코드로 쉽게 변환시켜 비원형 기어를 가공할 수 있다.

### 후 기

이 논문은 2007년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의하여 수행한 “비원형 기어의 와이어 방전가공을 위한 설계”의 결과이며, 연구지원에 감사드립니다.

### 참고 문헌

1. 香取英男, 非円形齒車, 日刊工業新聞社, 2001.
2. Townsend Dennis P., Gear handbook, McGraw-Hill, 1991.

3. Laczik, B., "Involute profile of noncircular gears", <http://www.manuf.bme.hu/Laczik/Noncircular.pdf>
4. Chironis N. P., *Mechanisms and mechanical devices sourcebook*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1996.
5. Maitra G. M., *Handbook of Gear Design*, McGraw-Hill, New Delhi, 1985.
6. Litvin F. L., *Gear geometry and applied theory*, Prentice Hall, 1994.
7. Bair B., "Computer aided design of elliptical gears", *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 124, pp.787-793, 2002.
8. Figliolini G. and Angeles J., "The synthesis of elliptical gears generated by shaper-cutters", *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 125, pp. 793-801, 2003.
9. Wu L., "Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 31, No. 7, pp. 879-890, 1996.
10. 고운호, 최상훈, "타원계 비원형기어(엽형)의 설계에 관한 연구", 한국정밀공학회 '94년도 추계학술대회 논문집, pp. 622-626.
11. 최상훈, "인벌류우트-트로코이드 치형을 갖는 타원계 엽형기어의 최소잇수에 관한 연구", 한국정밀공학회지, 제15권, 제5호, 1998.
12. 이성철, "타원형 기어의 와이어커팅을 위한 설계", 한국윤활학회지, 제23권, 제4호, pp. 149-155, 2007.
13. Rutter J., *Geometry of curves*, Chapman & Hall/CRC, 2000.
14. 이성철, 권오관, "NC가공을 위한 인벌류트 곡선의 원호 근사화에 대한 연구", 대한기계학회논문집, 제19권, 제10호, pp. 2475-2483, 1995.
15. Angeles J. and Lopez-Cajun C. S., *Optimization of cam mechanism*, Kluwer Academic Publishers, 1991.