

등가 링의 유한요소해석을 이용한 맥놀이 조절법

Beat Control Method Using the Finite Element Analysis of an Equivalent Ring

김 석 현*, 최 승 훈**
(Seockhyun Kim*, Chengxun Cui**)

*강원대학교 기계메카트로닉스공학부, **강원대학교 기계메카트로닉스 대학원
(접수일자: 2008년 8월 4일; 채택일자: 2008년 9월 11일)

본 연구에서는 미소 비대칭 링을 대상으로, 맥놀이의 주기를 조절하는 실험적 기법을 제시한다. 미세한 비대칭성은 하나의 링 모드를 근접한 주파수를 갖는 모드 쌍으로 분리시키는데, 이 모드 쌍이 동시에 가산되면 근접한 주파수 성분이 간섭함으로써 진동과 음향의 맥놀이가 발생한다. 단순화된 종형상의 링 시편을 대상으로 모드 쌍 데이터를 정밀 측정하고, 측정된 모드 쌍 조건을 만족하는 등가 링 모델을 만든다. 등가 링에 대한 유한요소해석을 통하여, 질량을 부착시키거나 두께를 감소시킬 때, 모드 쌍의 조건 변화를 예측하고 맥놀이 주기를 조절하는 방법을 제시한다. 구조변형에 따른 맥놀이 주기 변화의 예측치와 측정치를 비교하여 제시된 맥놀이 조절기법의 타당성을 검증한다.

핵심용어: 등가링, 미소 비대칭성, 모드 쌍, 맥놀이
투고분야: 구조음향 및 진동 분야 (11)

In this study, beat control method using an equivalent ring model is proposed to control beat period of a slightly asymmetric ring. Slight asymmetry in a ring generates mode pair and the interaction of the mode pair makes beat in vibration and sound. In a ring, as a simplified bell type structure, mode data are measured and an equivalent ring is determined so that the measured mode condition is satisfied. By the finite element analysis on the equivalent ring, changes of mode pair condition are predicted when local mass is attached or the local thickness is decreased. The predicted results are compared with the experimental result and the validity of the proposed method is verified.

Keywords: Equivalent ring, Slight asymmetry, Mode pair, Beat

ASK subject classification: Structural Acoustics and Vibration (11)

I. 서론

맥놀이는, 종, 타이어, 자이로 링이나 고속 회전 디스크 등과 같이, 축대칭 구조물이 재료의 불균일성이나 제작과정에서 불가피하게 발생하는 미세한 비대칭성 때문에 진동이 주기적으로 커졌다 작아지는 현상이다 [1,2]. 미세한 비대칭성은 하나의 링 모드를 매우 근접한 주파수를 갖는 모드 쌍으로 분리시키는데, 이 모드 쌍이 동시에 가산되면 근접한 두 주파수 성분의 간섭에 의하여 맥놀이가 발생한다. 종형 구조물에서는 진동의 맥놀이 음향의 맥놀이를 만들어 소리에도 큰 변화를 준다 [3].

특히, 한국 종의 소리에서 맥놀이는 매우 독특하여, 나치 종이 살아 숨을 쉬는 듯, 종소리가 역동성을 갖게 하는 중요한 요인이 된다 [4]. 한국 종에서 맥놀이의 원인은 구조과정에서 불가피하게 발생하는 비대칭성과, 종 표면의 각종 문양, 종 내부의 덩치 등이 그 원인으로 알려져 있다 [5,6,7]. 맥놀이는 종의 크기와 음조에 따라 적당한 주기와 선명성이 요구되므로, 구조 후 교정 작업이 필요하게 된다 [8]. 본 연구에서는 등가 링 이론에 근거하여, 맥놀이 특성을 조절하는 실험적 방법을 제시한다. 등가 링이란 주어진 모드 쌍 조건을 만족시키도록 축대칭 링에 한 개 이상의 집중 질량을 부가해서 만든 링이다. 이에 관련하여 Fox 등은 Rayleigh-Ritz 해석법으로 다 질점 미소 비대칭 링의 모드 쌍과 주파수 쌍을 구하고, 이를 이용하여 비대칭성을 제거하는 방안을 제시한 바 있다

책임저자: 김 석 현 (seock@kangwon.ac.kr)
200-701 강원도 춘천시 강원대학교길 1.
강원대학교 기계메카트로닉스공학부
(전화: 033-250-6372; 팩스: 033-257-4190)

[9,10]. 박한길 등은 수치 시뮬레이션을 통하여 질량 변화에 따른 맥놀이 특성의 변화를 검토하였고, 동일한 모드 조건을 만족시키는 여러 등가 링에 질량을 추가할 때, 모드 쌍의 변화는 동일하다는 것을 이론적으로 증명하였다 [11,12]. 그러나 이제까지 수행된 연구는 다수의 불균일 절점을 갖는 가상적인 비대칭 링에 대한 이론적 검토에 국한된 관계로, 아직은 그 결과를 실제 종의 맥놀이 조건에 응용하는 데에는 한계가 있다. 실제 상황에서는 종 재질의 불균일한 분포로 질량이나 강성이 비대칭적으로 분포한다는 사실만 알 뿐, 어느 위치에 어느 정도의 비대칭 요소가 존재하는지는 알 수가 없다. 다만, 측정된 모드 쌍의 조건으로부터 모드별로 등가적인 비대칭성을 고려하여 종체의 특정 부분을 연삭함으로써 맥놀이를 조절하였다. 그러나 이 경우에도 연삭의 두께는 경험과 반복적인 실험을 통하여 정할 수밖에 없었다 [8]. 이러한 실제 상황을 감안하여 본 연구에서는 미소 비대칭 링을 대상으로, 연삭 두께에 따른 모드 쌍의 변화 및 맥놀이 조건을 예측하는 해석 및 실험적 방법을 제시한다. 이를 위하여 모드 쌍의 측정 조건을 만족시키는 등가 링의 이론적 모델과 함께 등가 링의 유한요소해석 모델을 만든다. 등가 링의 유한요소해석 모델의 정당성을 검증하고, 이를 이용하여 국부적 두께 감소가 맥놀이 조건에 미치는 효과를 정량적으로 예측한다. 해석 결과로부터 요구되는 맥놀이 조건을 위한 두께 감소치와 위치를 구할 수 있음을 보인다. 본 연구에서 검토하는 링은 종체의 원주를 구성하는 기본 구조물로, 종형 구조물의 맥놀이 현상을 가장 근접하게 구현할 수 있으므로, 연구 결과는 한국종의 맥놀이 조건에 매우 유용하게 이용될 수 있을 것이다.

II. 등가링 이론

Flügge의 얇은 쉘 이론에 근거하면, 축대칭 링의 n차 굽힘 지배 모드의 고유진동수는 다음과 같다 [13].

$$\omega_n^2 = (1/R) \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} [(n-\alpha_n)^2 + \beta\alpha_n^2(1-n^2)^2]/(1+\alpha_n^2)^{1/2} \quad (1)$$

여기서, R은 링의 평균반경, E는 재료의 탄성계수, ρ는 밀도, ν는 프와송 비이다.

n은 링 모드의 차수이며, α_n은 반경방향 변위와 수직 방향 변위의 진폭비로 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha_n = \{(n^2 - 1)/2n\} \{1 + \beta(1 - n^2)\} + \{[(1 - n^2)^2/4n^2] \{1 + \beta(1 - n^2)\}^2 + 1\}^{1/2} \quad (2)$$

$$\beta = h^2/(12R^2) \quad (3)$$

h는 링의 두께이다.

이제 질량 M₀의 축대칭 링에 n개의 집중 질량 m_i가 부착된 미소 비대칭링을 검토한다. Fox는 Rayleigh-Ritz 해석법을 사용하여 고유진동수와 절점 위상을 다음과 같이 결정하였다 [9].

$$\omega_{nL,H}^2 = \omega_n^2 \left[\frac{1 + \alpha_n^2}{(1 + \alpha_n^2) + \sum_i m_i P_{i,n}} \right] \quad (4)$$

$$\tan 2n\psi_n = \frac{\sum_i m_i \sin 2n\phi_i}{\sum_i m_i \cos 2n\phi_i} \quad (5)$$

$$P_{i,n} = [(1 + \alpha_n^2) + (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_i - \psi_n)]/M_0 \quad (6)$$

식 (4)에서 고유진동수의 하첨자 L, H는 미소 비대칭성 때문에 발생하는 고유진동수 쌍에서, 미세하게 낮은 진동수와 높은 진동수를 구분하기 위하여 사용한다. 즉, 식 (6)의 1 부호에 의하여 미세하게 낮게 나오는 진동수를 ω_{nL}, 높은 진동수를 ω_{nH}로 표기한다. 이후 이러한 고유진동수 쌍에 해당하는 모드 쌍을 L-모드, H-모드로 표기한다. n차 모드는 원주상에서 2n개의 절점 (또는 배점)을 가지며, 모드쌍인 L, H-모드는 서로 π/2n의 위상차를 보인다. 식 (5)에서 ψ_n는 n차 L-모드의 절점 위상이고, φ_i는 i번째 집중 질량의 부착 위치이다. 삼각함수 변환식을 이용하면 식 (4)와 식 (5)는 다음 식 (7)과 식 (8)로 대체할 수 있다.

$$\sum m_i \sin 2n(\phi_i - \psi_n) = 0 \quad (7)$$

$$\sum m_i \cos 2n(\phi_i - \psi_n) = M\lambda_n \quad (8)$$

$$\lambda_n = \frac{(\omega_{nL}^2 - \omega_{nH}^2)(1 + \alpha_n^2)}{(\omega_{nL}^2 + \omega_{nH}^2)(1 - \alpha_n^2)} \quad (9)$$

여기서, M = M₀ + ∑m_i으로 비대칭 링의 총질량을 의미한다.

식 (7)~식 (9)를 사용하면, 측정된 n차 모드 쌍 조건을 만족시키는 등가 링을 구성할 수 있다. 즉, 링 시편의 총 질량이 M이고, L-모드의 절점 위치가 ψ_n로, 또한 고유진동수 쌍이 ω_{nL}, ω_{nH}로 측정되었다고 하자. 이러한 n차 모드 쌍 조건을 만족시키는 가장 단순한 n차 등가 링은

축대칭 링과 $\phi_{e,q}$ 위치에 부착된 하나의 집중 질량 $m_{e,q}$ 로 구성된다. $m_{e,q}$ 와 $\phi_{e,q}$ 는 식 (7)~식 (9)로부터 다음과 같이 결정된다.

$$m_{e,q} \sin 2n(\phi_{e,q} - \psi_n) = 0 \rightarrow \phi_{e,q} = \psi_n + \frac{\pi}{2n} \quad (10)$$

$$m_{e,q} \cos 2n(\phi_{e,q} - \psi_n) = M\lambda_n \rightarrow m_{e,q} = 3M\lambda_n \quad (11)$$

여러 개의 질량을 갖는 등가 링이 있을 수 있으나, 박한 길 등 [12]은 임의의 n차 등가 링에 동일한 2차 질량을 부착 또는 제거할 때, 모드 쌍 변화는 모두 동일함을 이론적으로 증명하였다. 식 (4)와 식 (5)에서, 등가 링에 두 번째 질량 m_2 를 부착할 때, 변화된 고유진동수 쌍 ω_{2L}, ω_{2H} 와, L-모드의 전점 위상 ψ_n 은 다음과 같이 결정된다.

$$\tan 2n\psi_n = \frac{m_{e,q} \sin 2n\phi_{e,q} + m_2 \sin 2n\phi_2}{m_{e,q} \cos 2n\phi_{e,q} + m_2 \cos 2n\phi_2} \quad (12)$$

$$\omega_{nL} \omega_{nH}^2 - \omega_n^2 \left[\frac{1 + \alpha_n^2}{(1 + \alpha_n^2) + m_{e,q} P_{e,q,n} + m_2 P_{2,n}} \right] \quad (13)$$

여기서,

$$P_{e,q,n} = [(1 + \alpha_n^2) + (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_{e,q} - \psi_n)] / M_o \quad (14)$$

$$P_{2,n} = [(1 + \alpha_n^2) + (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_2 - \psi_n)] / M_o \quad (15)$$

식 (12)와 식 (13)에서 질량 m_2 의 크기와 부착 위치 ϕ_2 를 조절함으로써, 링의 고유진동수 쌍과 전점 위치를 변화시킬 수 있으며, 결과적으로 맥놀이 주기와 선명도를 조정할 수 있다.

III. 등가 링 이론의 실험적 검증

3.1. 등가 링의 결정

n=2 모드를 대상으로 등가 링 이론을 유한요소해석과 실험으로 검증하고, 비대칭 요소의 변화에 따른 모드쌍의 변화를 검토한다. 실험에 사용한 3개의 링 시편은 KS 규격의 일반 구조용 강관을 얇게 잘라 제작하였다. 링 시편의 제원은 Table 1과 같으며, Fig. 1은 실험 장면이다. Fig. 2에서와 같이, 정밀 측정된 주파수응답함수로부터 구한 링 시편 1의 고유진동수 쌍은 $\omega_{2L} = 112.39 \text{ Hz}$, $\omega_{2H} = 112.71 \text{ Hz}$ 이고, 그 차이의 역수인 맥놀이 주기는 3.125초로 확인되었다. 모드 쌍의 배치에 관해서는, Fig.

3과 같이 링을 32등분 했을 때, L-모드의 배 ($\phi_2 = \pi/2$, H-모드의 전점)은 32번 점을 기준으로 37.1° (3과 4 사이)에 위치하고, H-모드 배 (L-모드 전점)는 82.1° 에 위치하는 것으로 확인되었다.

n=2의 모드 쌍 조건을 만족시키기 위해 2차 모드 등가 링의 등가적인 비대칭 질량은 식 (11)로부터 다음과 같이 결정된다.

$$m_{e,q} = M \frac{(\omega_{2L}^2 - \omega_{2H}^2)(1 - \alpha_2^2)}{(\omega_{2L}^2 + \omega_{2H}^2)(1 + \alpha_2^2)} = 0.0134 \text{ kg} \quad (16)$$

표 1. 링 시편의 제원

Table 1. Dimensions and frequencies of ring specimens.

No of ring	Ring 1	Ring 2	Ring 3
Average radius R	0.199 m	0.199 m	0.199 m
Average thickness h	0.007 m	0.007 m	0.007 m
Average width d	0.04 m	0.007 m	0.007 m
Mass M	2.8166 kg	0.4999 kg	0.5031 kg
n=2 mode frequency	ω_{2L}	112.39 Hz	110.56 Hz
	ω_{2H}	112.71 Hz	111.34 Hz

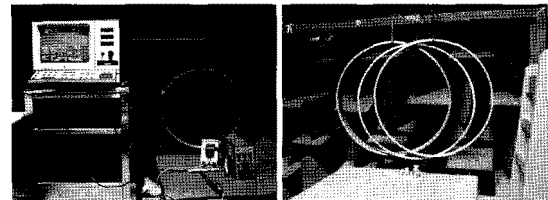


그림 1. 실험장비와 링

Fig. 1. Experimental set up and ring specimens.

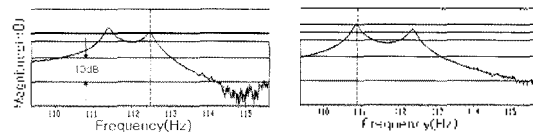


그림 2. 링의 주파수응답함수

Fig. 2. Frequency response functions of the ring 1.

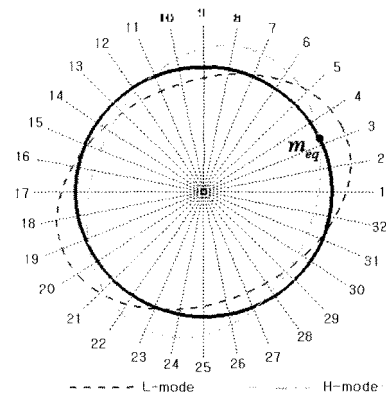


그림 3. n=2 등가 링

Fig. 3. n=2 equivalent ring.

대칭 링에 대한 비대칭 질량의 비는 다음과 같다.

$$M_v = M - m_{eq} = 2.8032 \text{ kg} \quad (17)$$

$$m_{eq}/M_v = 0.0048 \quad (18)$$

등가 링의 고유진동수와 측정치를 일치시키는 과정에서 미세하게 조정된 탄성계수는 $E=195.3 \text{ Gpa}$ 로 나왔고, 축대칭 링만의 고유진동수는 $\omega_2 = 112.82 \text{ Hz}$ 로 계산되었다. 결과적으로 링 시편과 동일한 $n=2$ 모드 쌍 조건을 갖는 등가 링은 Fig. 3과 같이, 2.8032 kg의 축대칭 링과 그 원주상 37.1° 에 위치한 0.0134 kg의 등가 비대칭 질량 m_{eq} 로 구성된다. 이 등가 링을 이용하여 구조 변경에 따른 모드 쌍 조건의 변화를 검토한다. 종래의 이론적 연구에서는 집중 질량이나 집중 스프링 효과에 국한되었으나, 본 연구에서는 질량이나 강성의 분포적 변화 효과를 보기 위하여, 등가 링의 유한요소해석 모델을 이용한다. 유한요소해석에 사용된 ANSYS 9.0은 링 수준의 단순한 구조물 해석에서 충분히 신뢰할 수 있는 모드 쌍 조건을 준다 [14]. 먼저 축대칭 링의 원주상을 360개의 선형 요소로 모델링하였을 때, 고유진동수는 $\omega_2 = 107.59 \text{ Hz}$ 로, 이론 모델에서보다 약간 낮게 계산되었다. 그러나 L-모드 배의 위치는 등가 비대칭 질량이 부착된 37.1° 로 이론 모델에서와 일치하였다.

3.2. 추가 질량 효과

먼저 비대칭 질량을 현재 값 ($m_{eq}/M_v = 0.00478$)으로 부터 가감시키면서 고유진동수의 변화를 보았다. 측정을 위하여 작은 추를 여러 개 가공하여 단계적으로 부착시켰다. Fig. 4는 이론, 유한요소 해석 및 측정에 의한 고유진동수를 비교한다. 대칭 링에 대한 이론치와 유한요소 해석치 사이의 초기 차이를 고려하여 고유진동수 값을 좌우

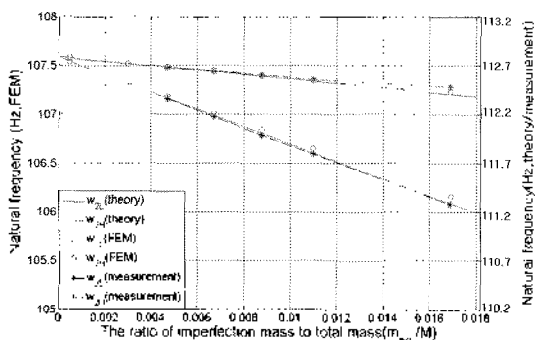


그림 4. 비대칭 질량비 대비 고유진동수 쌍
Fig. 4. Frequency pair vs. the ratio of the asymmetric mass to the total mass.

두 개의 축으로 구분하여 표시하였다. Fig. 4에서 초기 고유진동수의 차이에도 불구하고, 유한 요소 해석, 이론 해석 및 측정 결과는 거의 일치한다. L,H 주파수 곡선의 차이의 역수가 맥놀이 주기가 되므로, 초기 등가 링부터 비대칭 질량의 변화에 따른 맥놀이 주기는 이론, 유한요소해석 및 실험에서 거의 동일하게 나온다. 또한, 세 경우 모두에서 비대칭 질량의 크기에 무관하게 L-모드의 배는 비대칭 질량의 부착 지점에 일치하였다. 이러한 결과는 등가 링 이론 모델뿐 아니라, 유한요소해석 모델의 타당성을 입증한다.

다음으로 제2의 추가 질량을 부착시킬 때, 부착 위치에 따라 모드 및 진동수 쌍이 어떻게 변하는지를 등가 링을 이용하여 예측하였다. Fig. 5에서 등가 링에 추가하는 2차 질량 m_2 의 위치를 원주상 위상 ϕ_2 로 표기한다. 먼저 m_2 를 초기의 비대칭 질량 m_{eq} 와 같게 했을 때, 부착위치의 효과를 Fig. 6에 보인다. 여기서 고유진동수 쌍과 L-모드 절점 위치는 식 (12), (13)에서 결정된다. Fig. 6 a)에서 m_2 의 위치가 m_{eq} 의 위치 (37.1°)와 동일할 때, L, H 모드의 주파수 차이는 최대가 된다. 그 이유는 두 비대칭 질량의 부착 효과가 정확하게 서로 보강되기 때문이다. 즉, 두 질량이 모두 L-모드의 배에 위치함으로써, $\omega_{n,L}$ 은 더욱 낮아지고 $\omega_{n,H}$ 은 거의 변하지 않아 그 차이는 최대가 된다. L 모드의 배는 90° 간격으로 위치하므로, 고유진동수 차이는 90° 간격으로 주기적으로 최대가 된다. 반대로 m_2 가 H-모드의 배점(82.1°)에 위치할 때, 초기의 등가 질량과 추가된 비대칭 질량의 부착 효과가 정확하게 상쇄되므로, 비대칭성은 사라지고 L,H 모드 쌍의 주파수는 같아진다. 초기 대칭 링의 주파수 차이에도 불구하고 등가 링의 이론 해석과 유한요소 해석에 대한 고유진동수의 변화 추세는 완전히 일치한다. Fig. 7 b)는 L-모드 배점의 위치 변화를 보이는데, 역시 이론과 유한요소해석 결과는 완전히 일치한다. 이러한 결과로부터 추가 질량에 따른 모드 쌍 조건의 변화는 이론해석과 유한요소해석이 거의 동일한 결과를 주는 것을 알 수 있다.

위의 결과를 실험적으로 확인하기 위하여, 부착 질량의 위치와 크기를 모두 변화시키면서 맥놀이 주기가 어떻게 변하는지를 측정하였다. 미세한 비대칭성을 감안하여, 정밀 측정을 통하여 추가 질량을 $m_2 = \frac{1}{4} m_{eq}, m_{eq}, 4m_{eq}$ 의 세 가지 경우로 맞추었다. 각 질량의 부착 위치를 $0^\circ \sim 360^\circ$ 사이에서 변화시키면서 맥놀이 주기를 측정하였다. Fig. 7에서 m_2 의 크기에 관계없이 $\phi_2 = 82.1^\circ$ 또는 이로부터 90° 간격으로 부착할 때 맥놀이 주기가 최대

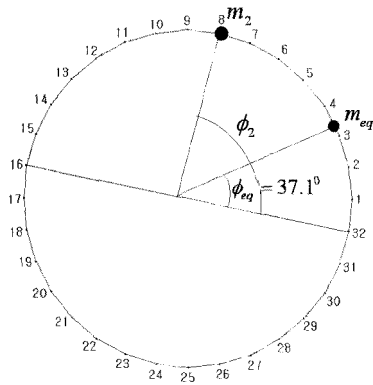


그림 5. 2차 집중질량의 위치
Fig. 5. Position of the 2nd point mass.

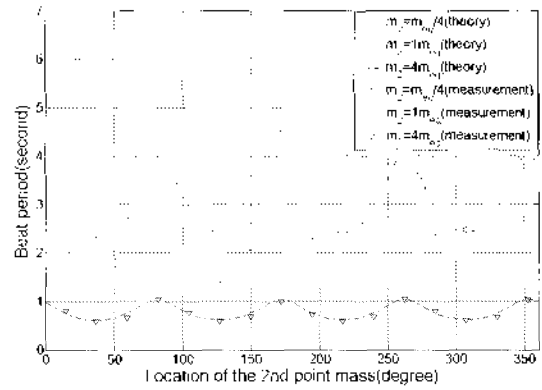
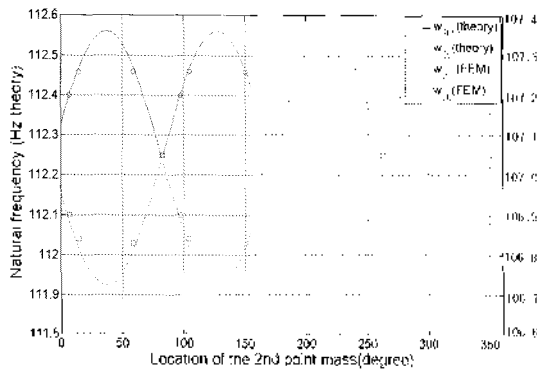
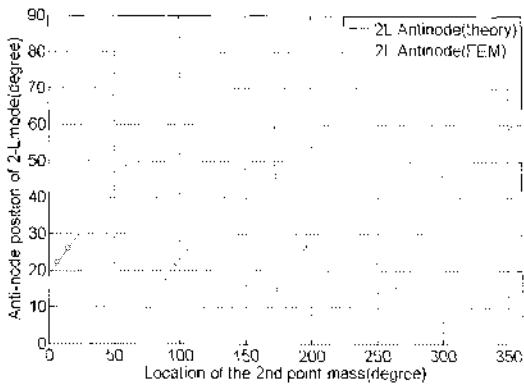


그림 7. 2차 질량 위치에 따른 맥놀이 주기
Fig. 7. Beat period vs. 2nd mass position.



(a) Natural frequency



(b) Anti-node position of L-mode

그림 6. 2차 질량의 부착에 따른 모드 데이터의 변화 (a) 고유진동수 (b) L-모드의 배점 위치

Fig. 6. Change of mode data by attaching the 2nd point mass. (a) Natural frequency, (b) Anti-node position of L-mode

즉 주파수 쌍의 차이가 최소로 된다. 이는 비대칭성이 최소화됨을 의미하는데, 37.1°에 위치한 초기 비대칭 질량 m_{eq} 와, 추가되는 m_2 의 질량 효과가 서로 상쇄되는 데에 기인한다. 반대로 m_2 가 37.1° 및 이로부터 90°의 정수배가 되는 위치에 부착될 때, 맥놀이 주기는 가장 짧아져, 비대칭성이 최대로 된다. 그 이유는 두 질량 모두 L-모드의 배에 위치함으로써 비대칭 효과가 중첩되는 데에 기인

한다. 이 결과는 Fig. 6에서도 동일하게 나타났었다. Fig. 7에서 맥놀이 주기의 변화추세는 이론 해석 및 측정 결과가 전반적으로 잘 일치한다. 한편, m_2 의 부착위치에 따른 L-모드 배의 위치를 확인한 결과, m_2 가 37.1°에 위치할 때, 추가 질량의 크기에 무관하게 L-모드의 배는 37.1°를 유지하였다. m_2 가 37.1°로부터 90° 간격으로 위치할 때도 L, H 모드의 절점 위치는 변하지 않았다. 그 이유는 전술한 m_1 와 m_2 의 보강효과 때문이다. 그러나 m_2 가 H-모드의 배 (82.1° 및 이와 90° 간격)에 부착될 때에는 초기 비대칭 질량 m_{eq} 와 추가되는 비대칭 질량 m_2 의 질량효과가 서로 상쇄되면서, L, H 모드의 절점이 이동하는 결과가 확인되었다. 특히 추가 질량이 초기 비대칭 질량보다 큰 $m_2 = 4m_{eq}$ 의 경우, L, H 모드 배치는 서로 바뀌는 상황이 발생하였다. 이와 같은 배 (또는 절점)의 배치 상태는 타격 위치와 함께 강하고, 선명한 맥놀이 만들는데 매우 중요하다.

결과적으로 등가 링 모델을 이용하면, 비대칭 질량의 변화에 따른 고유진동수 쌍이나 모드 쌍의 변화를 예측할 수 있으며, 요구되는 맥놀이 조건을 충족시키기 위한 추가 질량의 재원을 결정할 수도 있다.

IV. 두께 감소를 통한 맥놀이 조절

한국 종의 구조현장에서는 종체의 가장 두꺼운 부분인 하대의 특정 부분을 인식해냄으로써 모드 쌍의 배치조건과 고유진동수 쌍을 조절한다. 하대는 링 형상의 구조로, 하대상에서의 진동 모드는 링 모드와 거의 동일하다. 이와 같이 종체의 두께를 국부적으로 감소시키는 것은 해당 요소의 질량과 감쇠 강성을 동시에 낮추는 효과를 가져온

다. 분포 요소에 의한 효과를 정량적으로 예측하기 위하여 등가 링의 유한요소해석 모델을 사용한다. 보 구조에 대한 기초 이론에 근거하면, 보 요소의 질량은 두께에 비례하고 굽힘 강성은 두께의 3승에 비례한다. 따라서 링 구조물의 두께를 국부적으로 감소시키면, 강성 감소 효과가 더 우세하여 두께가 감소된 부분이 L-모드의 배가 된다. 이는 같은 지점에 질량을 부착시킬 때와 유사한 결과이다. 이를 정량적으로 확인하기 위하여, Fig. 3의 등가 링에서 L-모드의 배점 (m_{eq} 지점) 부근의 요소 두께를 감소시키면서 고유진동수 쌍의 변화를 검토하였다. 두께 감소 효과를 보기 위하여, 앞에서 사용한 링과 동일한 강관에서 잘라낸 링 시편 2를 사용하였다. Table 1에서와 같이 시편 1과 동일한 반경 및 두께를 가지나, 연삭의 용이성을 위하여 폭이 작은 점만 다르다. 그러나 미세한 비대칭성의 차이로, 초기 고유진동수는 $\omega_{2L} = 110.56 \text{ Hz}$, $\omega_{2H} = 111.34 \text{ Hz}$ 로 시편 1과 약간 다르게 측정되었다. L-모드의 배점을 중심으로 원주상 4° 길이의 두께를 단계적으로 연삭하여 감소시켜 가면서 고유진동수 쌍과 절점 위치를 확인하였다. 이와 동시에 각 단계별로 등가 링에 대한 유한요소해석을 통하여 두께 감소 효과를 관찰한 결과를 Fig. 8에서 비교한다. L-모드의 배점에서 질량 감소보다 강성의 감소가 훨씬 크므로 L-모드의 진동수가 감소한다. 반대로, 두께가 감소한 부분은 H-모드의 절점 부근이므로, H-모드의 고유진동수의 변화는 매우 작다. 그 결과 두께 감소에 따라 모드 쌍의 주파수 차이는 증가하고 맥놀이 주기는 감소한다. 이러한 결과는 앞에서 2차 질량을 추가할 때와 비슷한 양상이며, 유한요소해석으로 예측한 맥놀이 주기의 변화추세는 실험결과에 거의 근접한다. 따라서 맥놀이의 주기를 감소시키려면, L-모드의 배점 부분을 연삭함으로써 가능하다. 이때, 요구되는 주기를 만족시키기는 연삭량은 Fig. 8에서와 같이, 등가 링

의 유한요소해석 모델을 이용하여 예측이 가능하며, 연삭량을 조금씩 늘려가면서 요구되는 맥놀이 주기를 맞출 수 있다.

다음으로, 맥놀이 주기를 증가시킬 목적으로, 비대칭성을 약화시키는 구조 변경을 수행하였다. 즉, H-모드의 배점 (L-모드 절점)부근의 두께를 감소시키면서 고유진동수 변화를 보았다. 이 실험에 사용한 링 시편 3은 시편 2와 유사하나, 초기 고유진동수는 앞에서의 두 시편과 약간의 차이를 보여, $\omega_{2L} = 110.25 \text{ Hz}$, $\omega_{2H} = 111.53 \text{ Hz}$ 로 측정되었다. 전술한 바와 같이 원주상 4° 길이의 요소의 두께를 단계적으로 감소시키면서 고유진동수 쌍의 변화를 관찰하였다. Fig. 9에서 H-모드의 배점의 두께가 20%정도 감소될 때까지는 H-모드는 강성이 저하되면서 고유진동수가 감소하나 L-모드는 고유진동수의 변화를 보이지 않는다. 그 결과 L, H-모드의 고유진동수 차이는 작아져서, 초기로부터 22% 정도의 두께 감소시, L, H-모드 고유진동수는 거의 같아진다. 이는 비대칭성이 제거되어 맥놀이가 없어짐을 의미한다. 계속 두께를 감소시키면 L, H-모드의 배치가 반대로 되는 상황이 발생한다. 즉, 당초 H-모드의 배점이 L-모드의 배점으로 변화하면서, 링 시편 2의 실험결과에서 분석된 원인 때문에 고유진동수의 차이는 다시 벌어지게 된다. 이러한 결과는 맥놀이 주기를 조절할 때, 두께를 감소시키는 부분의 위치가 적절 하더라도 두께 감소량이 적당하지 않으면 당초의 목표와 반대되는 결과가 나올 수 있음을 의미한다. 이 경우에도 실험과 유한요소해석은 비슷한 고유진동수 쌍의 변화 양상을 보인다.

결론적으로, 주어진 비대칭 링의 등가 링을 구하여 유한요소해석을 수행한다면, 두께 감소에 따른 맥놀이 주기 및 절점 위치의 변화를 예측할 수가 있다. 실제로는, 해석을 통하여 두께 감소에 따른 고유진동수 쌍의 변화추

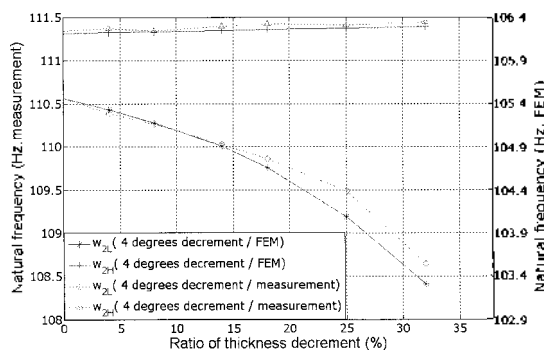


그림 8. L-모드 배 두께 감소에 따른 고유진동수 쌍
Fig. 8. Natural frequency vs. thickness decrement at L-mode anti-node.

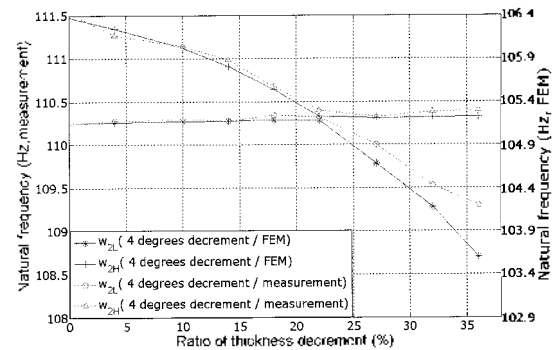


그림 9. H-모드 배 두께 감소에 따른 고유진동수 쌍
Fig. 9. Natural frequency vs. thickness decrement at H-mode anti-node.

체를 예측하고, 조금씩 단계적으로 두께를 감소시키면서 맥놀이 변화를 측정함으로써, 요구되는 맥놀이 조건을 만족시키는 링을 만들 수가 있다.

V. 결론

주어진 미소 비대칭 링과 동일한 모드 쌍 측정 조건을 만족시키는 등가 링의 이론 모델과 유한요소해석 모델을 구성하였다. 구해진 등가 링에 비대칭 질량을 추가했을 때 발생하는 모드 쌍 조건의 변화는, 이론해석, 유한요소 해석 및 실험에서 매우 유사한 변화추세를 보이는 것으로 확인되었다. 등가 링의 유한요소해석 모델을 이용하여, 국부적인 두께 감소에 따른 진동수 쌍과 모드 쌍의 변화를 예측할 수 있었다. 이 경우, 특정 부분의 두께를 감소시키는 것은 해당 위치에 2차 질량을 부착시키는 것과 유사한 효과를 보였다. L-모드의 배점 부근의 두께를 감소시킴으로써 맥놀이 주기를 감소시킬 수 있었으며, H-모드의 배 부분의 두께를 감소시킴으로써 맥놀이 주기를 증가시킬 수가 있었다. 이때, 등가 링의 유한요소해석 모델을 이용함으로써, 요구되는 맥놀이 주기를 얻기 위한 두께 감소량을 예측할 수 있었다. 한국종은 링 구조물과 매우 유사한 맥놀이 특성을 보이므로, 제시된 방법은 한국종의 맥놀이 교정에 매우 유용하게 사용될 수 있다.

참고 문헌

1. D.Allaei, W.Soedel and T.Y.Yang, "Vibration analysis of non-axisymmetric tires", *Journal of Sound and Vibration*, **122**, 11-29, 1988.
2. J.S.Hong, J.M.Lee, "Vibration of circular rings with local deviation", *Journal of Applied Mechanics*, **61**, 317-322, 1994.
3. 안성중, 강연준, 김석현, 박성용, "미소 비대칭 원통형의 음향 맥놀이 해석", *한국음향학회지*, **27(4)**, 183-190, 2008.
4. S.H.Kim, C.W.Lee, J.M.Lee, "Beat characteristics and beat maps of the King Seong-deok Divine Bell", *Journal of Sound and Vibration*, **281**, 21-44, 2005.
5. T. Charnley and R. Perrin, "Studies with an eccentric bell", *Journal of Sound and Vibration*, **58**, 517-525, 1978.
6. 전성하, 이장무, 김석현, 염영하 "한국종의 진동특성에 관한 연구(I)", *대한기계학회 논문집*, **13(3)**, 397-403, 1989.
7. S.H.Kim, W. Soedel, J.M.Lee, "Analysis of the beating response of bell type structures", *Journal of Sound Vibration*, **174(4)**, 517-536, 1994.
8. J.M.Lee, S.H.Kim, S.J.Lee, J.D.Jeong and H.G.Choi, "A study on the vibration and sound characteristics of a large size Korean bell", *Journal of Sound and Vibration*, **257**, 779-

- 790, 2002.
9. C.H.J.Fox, "A simple theory for the analysis and correction of frequency splitting in slightly imperfect rings", *Journal of Sound and Vibration*, **142(2)**, 227-243, 1990.
10. A.K.Rourke, S.McWilliam, C.H.J.Fox, "Multi-mode trimming of imperfect rings", *Journal of Sound and Vibration*, **248(4)**, 695-724, 2001.
11. H.G.Park, S.H.Kim, Y.J.Kang, "Analytical method of beat tuning in a slightly asymmetric ring", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **21**, 2007.
12. H.G.Park, Y.J.Kang, and S.H.Kim, "Dual mode tuning strategy of a slightly asymmetric ring", *Journal of Acoustical Society of America*, **123(3)**, 1383-1391, 2008.
13. W.Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, New York: Marcel Dekker, Inc, 1993.
14. ANSYS Release 9.0 Documentation, ANSYS Inc.

저자 약력

• 김 석 현 (Seockhyun Kim)



1980년, 서울대학교 (공학사-기계설계)
 1982년, 서울대학교 (공학석사-기계설계)
 1987년, 서울대학교 (공학박사-소음진동)
 1988년~현재, 강원대학교 기계메카트로닉스공학부 교수
 연구분야: 수송기계, 동력발전기의 진동 및 소음, 변종의 진동/음향

• 최 승 훈 (Chengxun Cui)



1987년, 중국 길림대학교 (공학사-공학전공)
 1987년~2000년, 중국 연변대학교 기계과전임강사
 2002년, 서울신입대 (공학석사-기계설계)
 2002년~현재, 강원대학교 대학원 기계메카트로닉스 박사과정