논문 2007-44IE-3-7

입력-상태, 입력-출력 변환을 이용한 선형 시변 시스템의 가제어성, 가관측성 해석

(The Interpreter Controllability and Observability for a Class of Time-varying Linear System via I/S and I/O Transformation)

원 영 진*, 이 상 훈**, 이 종 용**

(Young-Jin Won, Sang-Hun Lee, and Jong-Yong Lee)

요 약

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대하여 입력-상태, 입력-출력 변환을 적용하여 선형 시변 시스템의 가제어성과 가관측성을 해석하고자 한다. 또한 입력-상태, 입력-출력 변환을 통하여 얻어진, 변환된 시스템은 다중 적분기를 갖는 시스템으로 표현되며, 예제를 통하여 제안된 알고리즘을 확인하고, 검토하였다.

Abstract

In this paper, we consider the controllability and observability for the time-varying linear system using the input-state(I/O), input-output(I/O) transformation and get the time-invarying linear system.. The transformed system represent the system with the multiple integral. We verify the proposal algorithm via the example and examine.

Keywords: Linear Time-Varying Systems, Controllability, Observability, I/S and I/O Transformation

I. 서 론

제어 이론이 발달하면서, 시변 선형 시스템에 대한 해석이 꾸준히 제시되어왔다. 매개변수 종속 제어 문제에 대한 전통적인 해석은 대표적으로 매개변수가 천천히 변동되는 경우를 고려하여 왔다. 그러나 선형 시변 시스템에 대한 해석이 기본적으로 매개변수가 변한다는 조건의 제한을 가지고 있다[1,2].

선형 시변 시스템의 제어기 설계를 위한 시스템의 해석에서 가장 중요한 역할을 하는 것이 시스템의 가제어성과 가관측성을 해석하는 문제이다.

더군다나 시스템이 시변인 경우에는 시스템의 행렬이 시간의 함수이므로 선형 시불변 시스템의 가제어성과 가관측성 해석과 달리 복잡성을 가지고 있다[3].

그래서 본 논문에서는 기존의 선형 시변 시스템에 대한 입력-상태 변환과 입력-출력 변환을 이용하여 선형 시변 시스템의 가제어성과 가관측성을 판단하는 도구로 사용하고자 한다[4].

Ⅱ장에서는 선형 시변 시스템의 입력-상태, 입력-출력 변환에 대하여 살펴보고 시스템의 가제어성과 가관측성의 관계를 기술한다. Ⅲ장에서는 Ⅱ장에서 언급된 내용에 대하여 예제를 통하여 확인하고, Ⅳ장에서는 결론을 서술하였다.

Ⅱ. 선형 시변 시스템의 입력-상태, 입력-출력 변환

먼저 단일 입출력 선형 시변 시스템(LTV)의 다음과 같이 고려하자.

* 평생회원, 부천대학 전자과
(Dept. of Electronics, Bucheon College)
** 정회원, 광운대학교 교양학부
(Division of General Education, Kwangwoon Univ.)
※ 이 논문은 2002년도 광운대학교 교내연구비로 조성되었습니다.
접수일자: 2007년8월7일, 수정완료일: 2007년9월7일

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x \tag{1}$$

여기서, 상태 x 는 $x \in R^n$이며,

행렬 $A(t) \in R^{n \times n}, B(t) \in R^{n \times 1}$및 $C(t) \in R^{1 \times n}$는 시간 t에 유계된 함수이다.

식(1)로 표현된 선형 시변 시스템의 상태 방정식이 입력-상태의 선형 시불변 시스템으로 변환되기 위한 $n+1$ 개의 변환(transformation)이 존재한다고 하고, 다음과 같이 정의하자.

$$z_i = T_i(x,t),$$
$$T_i \; : \; R^n \times R \;\rightarrow\; R \quad ,(i = 1,\cdots,n)$$
$$T_{j+1}(x,t) = \dot{T}_j(x,t),\; j = 1,2,3,\cdots,n-1$$
$$v = T_{n+1}(x,u,t), T_{n+1} : R^n \times R \times R \rightarrow R \tag{2}$$

이와 같은 변환T 를 사용하면, 선형 시변 시스템 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z} = A_B z + B_B v \tag{3}$$

그러면, 식(1)에 시간종속 상태변환 식(2)을 사용하여 얻어진 식(3)은 선형 시불변 시스템 이 되며, 시스템의 행렬 A_B, B_B 는 원점에 n개의 다중 극점을 갖는 Brunovsky 표준형을 가지기 때문에, 식(3)의 시스템은 제어 가능하다.

이러한 변환을 얻기 위한 식(2)의 시간종속 상태 변환은 다음의 정리 1과 같이 요약된다.

정리 1 : 선형 시변 시스템 식(1)이 Brunovsky 표준형 식(3)으로 상태-입력 변환되기 위한, 시간종속 변환 $T_i(i = 1,\cdots,n,n+1)$는 다음의 조건을 만족해야 한다[5].

$$< dT_{ix}, B(t) \geq 0$$
$$T_{i+1} =< dT_{ix}, A(t)x >+< dT, 1 >,\; i = 1 \cdots n-1$$
$$T_{n+1} =< dT_{nx}, A(t)x + B(t)u >+< dT_{nt}, 1 > \tag{4}$$

여기서, $< f,g \geq \sum_i^n f_i g_i$와

$$dT_{ix} = \left[\frac{\partial T_i}{\partial x_1}, \frac{\partial T_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial T_i}{\partial x_n}\right]$$ 을 의미한다.

정리 2 : 정리 1의 시간 종속 변환 T_i가 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다[6,7].

벡터 집합 $[W_0, W_1, \cdots, W_{n-1}]$은 선형 독립이다.

벡터집합 $[W_0, W_1, \cdots, W_{n-2}]$은 포함적(involve)이다.

여기서, $W_0 = B(t)$ 이고,

$W_{k+1} = -A(t)W_k + \frac{d}{dt}(W_k), (k = 0,1,\cdots,n-2)$를 의미한다.

그러므로 정리 2로부터 선형 시변 시스템 식(1)이 선형 시불변 시스템 식(3)으로 변환되기 위한 필요충분조건은 먼저 시스템의 완전 가제어성이 성립하여야함을 의미한다. 즉, 입력-상태 변환에 의하여 시스템의 완전 가제어성은 불변이며, 변환된 선형 시불변 시스템의 안정화를 통하여, 선형 시변 시스템의 안정화를 얻을 수 있다.

즉, 선형 시변 시스템 식(1) 선형 시불변 시스템 식(3)으로 변환되기 위한 입력-상태 변환이 존재한다면, 식(1)의 시스템의 완전 가제어성이 성립함을 보여준다. 그러므로 식(1)의 시스템에 대한 가제어성을 판단하기 위하여 정리 2의 가제어성 행렬의 선형 독립을 조사하는 것을 식(2)의 $n+1$ 개의 변환 T(transformation)이 계산하는 것과 같다.

다음으로 식(1)로 표현된 선형 시변 시스템의 입력-출력 변환을 고려하자.

입력-출력을 사용하여, 선형 시변 시스템 식(1)이 다음과 같이 다중 적분기를 갖는 시스템으로 표현된다고 하자.

$$y^{(n)} = v \tag{5}$$

그리고 입력 u를 아래와 같이 표현된다.

$$u = \frac{1}{L_{\overline{B}} L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma}(-L_{\overline{A}}^{r}\gamma + v) \tag{6}$$

이러한 변환을 얻기 위한 입력-출력 변환은 다음의 정리 3과 같이 요약된다.

여기서, $A(t)x = [A_1^T, A_2^T, \cdots A_n^T]^T x$ 라 하면,

$\alpha_i(x,t) \triangleq A_i x = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j$이고, $\overline{A}(x,t) = [\alpha(x,t)^T, 1]^T$

이며, $\overline{B_2}(x,t) = [\beta_2(t), 0]^T$이라, 기호 L가 Lie 도함수를 의미한다.

그리고 $C_2(t)x = [C_{21}(t), C_{22}(t), \cdots, C_{2n}(t)]^T$이면, $\gamma_2(x,t) \triangleq \sum_{j=1}^{n} C_{2j}(t)x_j$ 이다. 또한 표현의 간략화를 위하여 시간 t 를 생략한다.

정리 3 : 선형 시변 시스템 식(1)이 입력-출력 선형 시불변으로 변환하기 위한 필요충분조건은, 다음의 식 (7)과 식(8)을 만족하는 양의 정수 r 이 존재하는 것이다.

$$L_{\overline{B}} L^{i}_{\overline{A}} \gamma = 0 \, , \; \forall \; i = 0, 1, 2, \cdots, r-2 \tag{7}$$

$$< d\gamma, ad_{\overline{A}}^{r-1}(\overline{B}) > \; = \; L_{\overline{B}} L_{\overline{A}}^{r-1} \gamma \neq 0 \tag{8}$$

정리 4 : 정리 3의 입출력 변환이 존재하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다[7].

벡터집합 $[Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1}]$ 은 선형 독립이다.

벡터집합 $[Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-2}]$ 은 포함적(involve) 이다.

여기서, $W_0 = C(t)^T$ 이고,

$Q_{k+1} = A(t)^T Q_k + \frac{d}{dt}(Q_k)$, $(k = 0, 1, \cdots, n-2)$를 의미한다.

그러므로 정리 4로부터 선형 시변 시스템 식(1)이 선형 시불변 시스템 식(5)로 변환되기 위한 필요충분조건은 먼저 시스템의 완전 가관측성이 성립하여야함을 의미한다. 즉, 입출력 변환에 의하여 시스템의 가제어성은 불변이며, 변환된 선형 시불변 시스템의 안정화를 통하여, 선형 시변 시스템의 안정화를 얻을 수 있다.

즉, 선형 시변 시스템 식(1) 선형 시불변 시스템 식 (5)으로 변환되기 위한 입력-출력 변환이 존재한다면, 식(1)의 시스템의 완전 가관측성이 성립함을 보여준다. 그러므로 식(1)의 시스템에 대한 가관축성을 판단하기 위하여 정리 4의 가관측성 행렬의 선형 독립을 조사하는 것을 식(7)을 조사하는 것과 같다.

III. 예 제

1. 예제 1[5]

먼저 입력-상태 변환에 의하여, 선형 시변 시스템이 선형 시불변 시스템으로 변환되는 과정을 통하여, 시스템의 가제어성을 살펴보자

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

먼저 시스템의 가제어성에 대하여 검토하기 위하여, 첫 번째 시간 종속 상태 변환 T_1을 얻기 위한 방법은 편미분 방정식 $\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = t\frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$으로부터, 시간 종속 상태 변환 T_1, T_2는 다음과 같이 선택된다.

$$T_1 = tx_1 + x_2$$
$$T_2 = (t^2+2)x_1 + (t + t^{-1})x_2$$

그러므로 식(9)로 표현된 선형 시변 시스템은 가제어성이 성립한다. 또한 정리 2의 조건에 따라, $B(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \end{bmatrix}, (A(t) - \frac{d}{dt})B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2t \end{bmatrix}$가 되므로, 시스템의 가제어성이 성립함을 보여준다.

또한 가제어성을 검토하기 위하여, 출력 y를 시간 t에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = tx_1 + x_2 - tu$$

입력 u에 대하여 종속이므로, 가관측성의 상대 차수는 1이다.

또한 정리 4의 조건에 따라,

$C(t)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(A(t)^T + \frac{d}{dt})C(t)^T = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ 이 되므로, 선형 종속이므로 완전 관측성이 성립하지 않는다.

2. 예제 2[7]

다음과 같은 시변 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t^2 + 1 \, , & 2 \\ 0 \, , & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

먼저 시스템의 가제어성에 대하여 검토하기 위하여, 첫 번째 시간 종속 상태 변환 T_1 을 얻기 위한 방법

은 편미분 방정식 $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}=0, \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\neq 0$으로부터, 시간 종속 상태 변환 T_1, T_2를 선택할 수 있다.

그러므로 식(10)로 표현된 선형 시변 시스템은 가제어성이 성립한다. 또한 정리 2의 조건에 따라, $B(t) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $(A(t)-\frac{d}{dt})B(t) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$가 되므로, 시스템의 가제어성이 성립함을 보여준다.

또한 가제어성을 검토하기 위하여, 식(10)의 출력 y를 시간 t에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = (\sin t^2 + 1)x_1 + 2x_2 \tag{11}$$

식 (11)이 입력 u에 대하여 독립이므로, 식(11)을 시간 t에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\ddot{y}=\{2t\cos t^2+(\sin t^2+1)^2\}x_1+2(\sin t^2+1)x_2+2u \tag{12}$$

식(12)는 입력 u에 대하여 종속이므로 식(10)으로 표현된 선형 시변 시스템의 가제어성이 성립한다.

또한 정리 4의 조건에 따라,

$$C(t)^T=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},(A(t)^T+\frac{d}{dt})C(t)^T=\begin{bmatrix}\sin^2 t+1\\2\end{bmatrix}$$이

되어, 선형 독립이므로 완전 관측성이 성립한다.

이상으로 선형 시변 시스템의 가제어성과 가관측성에 대한 해석을 입력-상태 변환과 입력-출력 변환을 이용한 방법에 대하여 살펴보았다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대한 가제어성과 가관측성을 해결하기 위한 방법으로 시스템을 시불변 선형 시스템을 얻기 위한 입력-상태 변환과 입력-출력 변환을 고려하였으며, 예제를 통하여 검증하였습니다. 즉, 시변 시스템을 시불변 시스템으로 변환하기 위한 입력-상태와 입력-출력 변환은 시변 선형 시스템에 대한 가관측성을 조사하는 방법으로 사용할 수 있다.

앞으로 과제는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 가제어성과 가관측성이 성립하는 가능한 불확실성의 크기를 고려할 과제를 가지고 있다.

참 고 문 헌

[1] AMATO F., CELENTANO G. and GAROFALO F., "New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems", IEEE Trans. Autom. Control, Vol 38, pp. 1409-1411, 1993.

[2] LAWRENCE, D.A. and RUGH W.J., "On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs", IEEE Trans. Autom. Control, Vol 35, pp. 860-864, 1990.

[3] ISIDORI A., "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, London, 1995.

[4] DIAO Y. and PASSINO K.M., "Adaptive control for a class of nonlinear time-varying systems", Proceedings of the ACC, Arlington, VA, pp. 4161-4166, June 2001.

[5] 조도현, 이상효, "상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 강건한 제어", 제어자동화시스템공학 논문지, 제4권, 제1호, pp1~9, 1998.

[6] Choi H.L. and LIM J.T., "Feedback linearisation of time-varying nonlinear systems via time-varying diffeomorphism" IEE Proc. Control Theory Appl., Vol 150, No 3, pp. 279-284, 2003.

[7] KOSTAS S.T. and PETROS A. I., "Linear Time-varying Systems", Printice Hall, pp. 29-33, 1993.

저 자 소 개

원 영 진(정회원)
대한전자공학회 논문지
제43권 IE편 제4호 참조

이 상 훈(정회원)
1983년 광운대학교 전자공학과
공학사 졸업.
1987년 광운대학교 전자공학과
공학석사 졸업.
1992년 광운대학교 전자공학과
공학박사 졸업.
1991년~현재 광운대학교 교양학부 교수
<주관심분야 : 통신, 컴퓨터, 신호처리>

이 종 용(정회원)
대한전자공학회 논문지
제42권 TE편 제3호 참조