대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 3, 253-270. Aug 2007

Clairaut의 <대수학 원론>에 나타난 대수 지도 원리에 대한 분석

장 혜 원*

18세기 프랑스의 수학자 A.C. Clairaut는 역사발생적 원리에 근거하여 기하 교재에 이어 대수 교재 <대수학 원론>을 집필하였다. 본 논문은 <대수학 원론>을 분석함으로써 대수 지도를 위해 Clairaut가 의도한 원리 및 구체적인 방식의 특징들을 고찰하고, 학교 수학에서 대수 영역의 교수-학습과 비교, 논의함으로써 적용 가능한 교수학적 시사점을 찾는 것을 목표로 한다. 이를 위해 <대수학 원론>의 구성 및 내용에 대해 개관하고 초보자의 정신에 자연스럽게 전개한다는 Clairaut의 의도에서 비롯된 대수 지도 원리의 여섯 가지 특징을 추출한다. 이 중에는 <기하학 원론>에서의 특징과 공통적인 것도 있고 대수라는 내용 영역상의 구별에서 비롯되는 독특한 것도 있다. 그리고 학교 수학의 대수 영역 중 특정 주제 -방정식 세우기, 문자식의 계산과 문자의 부호, 곱셈의 부호 규칙, 이차방정식의 해법, 근과 계수와의 일반적 관계- 와 관련하여 논의하고 시사점을 찾는다.

Ⅰ. 머리말

18세기 중반 유럽에서 수학 연구를 주도한 수학자들은 주로 해석학자였으며 그들에 의해 대수 영역에 대한 연구도 활성화된 것으로 알려진다. 그 중 Saunderson(1682-1739)과 Euler (1707-1783), 그리고 Clairaut(1713-1765)는 각각 대수 교재를 집필하였다. 모두 <대수학 원론 (Elements of Algebra)>이라는 이름이 붙어 있는 이 대가들의 책은 당시의 대수 교재를 대표하는 인기 있던 책들이었으며, 당시 대수 교재는 주로 알고리즘을 강조하는 경향이 두드러졌다 (Arcavi, 1985).

Clairaut의 <대수학 원론>은 당시 매우 인기가 있어 1801년에는 제6판까지 출간되었다고 하는데 당시의 대수 교재의 특성에 비해 Clairaut의 책에서는 알고리즘적 특성[1] 외에 다

---

* 진주교육대학교 수학교육과, hwchang@cue.ac.kr

1) 식의 제곱근을 구하는 방법은 오늘날의 접근과 비교할 때 당시 대수 교재의 알고리즘적 특성이 뚜렷이 드러나는 부분이다. '두 항으로 이루어진 식의 제곱은 이 두 항 각각의 제곱과 이 두 항의 곱의 2배의 합과 같아야 한다는 것을 안다면 이 식을 쉽게 간단히 할 것이다(Clairaut, 1746, p.117)'라고 하여 완전제곱식을 구조적으로 파악하고 있음에도 불구하고, '그 제곱근을 찾기 위한 확실하고 일반적인 방법(Ibid., p.118)'으로 다음과 같은 알고리즘을 제시하고 연습시킨다. 예컨대 식 $4a^2-4ba+4ca+b^2-2cb+c^2$을 보면, 오늘날 식의 변형 $(2a)^2-4a(b-c)+(b-c)^2$만 파악한다면 쉽게 구할 수 있는 제곱근을 다음 알고리즘에 따라 계산한다(<표 I-1>).

<표 I-1> 식의 제곱근을 구하는 알고리즘

	$4a-2b+c$
	$4a-b$
$4a^2-4ba+4ca+b^2-2cb+c^2$	$2a-b+c$
$-4a^2$	
$-4ba+4ca+b^2-2cb+c^2$	
$+4ba \qquad -b^2$	
$4ca \qquad -2cb+c^2$	
$-4ca \qquad +2cb-c^2$	
0	

른 무언가가 있을 것으로 기대해볼만하다. 왜냐하면 Clairaut가 이 대수 교재보다 5년 앞서 저술한 <기하학 원론(1741)>은 기하학의 학습 내용 및 활동을 그 역사적 발달 순서에 근거하여 조직함으로써 학습자의 정신에 자연스럽도록 가르친다는 역사발생적 원리[2]에 입각하여 집필된 최초의 기하 교재라는 위상을 차지하고 있고, 그가 대수 지도에 있어서도 마찬가지 원리를 적용할 수 있다는 의도로 저술한 책이 바로 <대수학 원론>이기 때문이다.

> 나는 이 책에서도 <기하학 원론>에서와 동일한 방법을 따르기로 하였다(Clairaut, 1746, p.i).

여기서 '동일한 방법'이란, 대수 법칙은 최종 산물인 정리의 형태로 등장한 것이 아니라 실제적인 필요 또는 인간 본연의 호기심에서 해결하려고 했던 문제를 푸는 과정에서 적용되며 등장하였기 때문에 그 법칙의 발명가들이 따랐던 것과 마찬가지 과정을 학습자에게 경험시키는 것을 말한다.

Clairaut에게 있어 기하학과 대수학은 그 출발점부터 토지 측량 대 분배 문제로 구분되는 학문 영역이다. 수학의 역사에서 연구 영역이 세분화되기 이전의 수학은 기하와 대수로 대별되었다고 해도 과언이 아니며 두 영역은 독립적인 위상을 확보한 채, 그러나 때로는 상호간에 영향을 미치며 상보적으로 발달을 이루어온 것이 사실이다. 비록 학문적 내용은 엄연히 구별되는 두 영역이지만 역사발생적 원리의 구현 대상이라는 점에서 Clairaut의 교수-학습관은 일관되게 적용되었고, 그 교수-학습관은 한마디로 학습자의 정신을 거스르지 않는 자연스러움에 기초하며 그것을 추구하기 위해 역사상 초기 수학자들의 발명, 발달 과정을 따르는 것이다. 그 구체적인 양상은 역사발생적 원리의 구현이라는 측면에서 공통적일 수도 있고, 내용 영역의 구별이라는 측면에서 차별화될 수도 있을 것이기에 수학교육 연구자 및 수학 교사에게 더욱 호기심을 불러일으키기에 충분할 것이다.

본 논문에서는 <대수학 원론>의 내용을 개관하고 그 책에서 역사발생적 원리에 근거한 지도를 의도한 저자가 대수 학습을 위해 구현한 전개 방식의 특징을 추출한다. 이를 토대로 학교 수학의 대수 영역 중 몇 가지 구체적인 주제와 관련하여 비교, 논의하고 나아가 교수학적 시사점을 찾고자 한다.

II. <대수학 원론>의 구성 및 내용

역사발생적 원리에 따르면 교과의 자연스런 교수-학습 과정의 원형은 그 학문의 역사 발달 과정에서 찾을 수 있다. 앞서 언급했듯이 기하학의 출발을 토지 측량으로 간주한다면 대수학의 기원은 출자 비율이나 어떤 규약에 따라 총액을 배분하는 문제로 볼 수 있다. Clairaut는 이러한 문제를 푸는 과정에서 필요한 일련의

우선 $4a^2$의 제곱근을 취하여 $2a$를 주어진 식의 옆에 쓴다. 그 제곱 $4a^2$을 뺀 나머지 $-4ba+4ca+b^2-2cb+c^2$을 쓴다. $2a$를 2배하여 $4a$를 그 위에 쓴다. 항 $-4ba$를 $4a$로 나누어 몫 $-b$를 제곱근과 제수 $4a$의 옆에 각각 쓴다. 그리고 $-b$와 $4a-b$를 곱하고 부호를 바꾸어 $+4ba-b^2$을 얻는다. 이를 피제수 아래 놓고 간단히 하면 $+4ca-2cb+c^2$이고 이것은 다시금 피제수가 되어야 한다. 제곱근 $2a-b$를 2배하여 $4a-2b$를 그 위에 쓴다. $4ca$를 $4a$로 나누어 그 몫 $+c$를 제곱근 $2a-b$와 제수의 옆에 각각 쓴다. 그 다음 $+c$와 $4a-2b+c$를 곱하여 그 곱을 부호를 바꾸어 피제수 아래에 쓴다. 모든 항이 소거되고 제곱근 $2a-b+c$를 얻는다.

2) 수학 교수-학습 원리로서의 역사발생적 원리에 대해서는 민세영(2002) 참조.

추론 단계 및 그 환원 상태를 기호를 써서 표현할 수 있어야 하고 그렇게 축약된 방식으로 표현하는 것을 학습자가 발견해야할 '대수'로 정의한다(p.ii)[3]. 다시 말해 문제를 해결하기 위한 추론 과정을 그대로 기억하는 것은 부담스럽기 때문에 추론 과정을 좀더 간단한 방법으로, 즉 기호를 써서 표현함으로써 한 것과 해야 할 것을 한 눈에 볼 수 있도록 해야 한다는 것이다(p.3). 따라서 <대수학 원론>에서는 기호를 써서 나타낸 추론 단계로 구성된 방정식의 해법을 중심으로 하여 내용이 전개되어 있다. 책은 다섯 개 부분으로 나뉘어 있으며 각 주제는 다음과 같다.

- 제1부 문제를 방정식으로 표현하는 대수적 방법 및 일차방정식의 해법
- 제2부 이차방정식의 해법
- 제3부 임의 차수의 방정식을 위한 몇 가지 일반 원리와 이 고차식으로부터 1차, 2차식 인수를 구하는 방법
- 제4부 두 항만 갖거나 또는 두 항만 있는 방정식으로 환원할 수 있는 세 항을 갖는 임의 차수의 방정식에 대해 이차방정식의 해법을 이용한 그 해법
- 제5부 삼차방정식과 사차방정식의 해법

다루고 있는 구체적인 내용을 살펴보면 제1부에서 미지수가 하나 또는 여러 개인 일차방정식을 세워 푸는 문제들을 다루면서 방정식을 풀기 위해 또는 식을 간단히 하기 위해 필요한 연산을 설명한다. 예컨대 분수식에서 분자와 분모, 두 식의 최대공약식을 구하여 식을 간단하게 하는 것이 포함된다.

제2부에서는 이차방정식을 다룬다. 여기서 초점은 한 문제에 두 개의 해가 있다는 사실에 있다. 이를 파악하도록 하기 위해 둘 모두 양의 해인 문제로 시작하여 양근과 음근이 각각 하나씩인 문제로 넘어간다. 두 광원을 연결하는 직선상에서 양자의 밝기가 같은 지점을 찾는 문제가 후자를 위한 것이다. 이 때 구한 음근 역시 일차방정식에서의 음근과 마찬가지로 문제를 방정식으로 표현할 때 부여한 것과 상반되는 의미를 취해야 한다는 것 뿐 양근과 똑같이 역할함을 인식할 수 있도록 예를 보인다. 그리고 이차방정식의 풀이에 대한 여러 예를 통해 제곱근 구하기, 근호 있는 식을 간단히 하기, 근호 있는 식의 가감승제 등을 다룬다. 미지수가 여러 개인 이차방정식을 미지수가 하나인 하나의 방정식으로 환원하여 푸는 것을 설명하고, 이 방법이 모든 차수로 일반화됨을 다룬다.

제3부에서는 가정된 방정식의 해로부터 그 해를 갖는 방정식을 만듦으로써 그 과정에서 근의 개수, 근과 계수와의 관계를 다루고 모든 차수의 방정식을 위한 일반적인 사실을 도출한다. 이 사실로부터 근의 부호, 유리근을 찾는 방법이 비롯된다. 아울러 2차의 인수를 찾는 방법의 다양한 예를 포함한다.

제4부에서는 두 항만 있거나 두 항만 있는 식으로 환원할 수 있는 모든 차수의 방정식에 대하여 이들을 이차방정식의 방법으로 푸는 것을 다룬다. 이 과정에서 필요한 연산으로 거듭제곱구하기, 거듭제곱근 구하기, 근호가 있는 식을 간단히 하기 등을 다룬다. 특히 $16+6\sqrt{7}$ 이나 $b^4-ab+\frac{1}{4}a^4+2\sqrt{ab^3-2a^2b^2+\frac{1}{4}a^3b}$와 같이 일부는 통약가능하고 일부는 통약불가능한 식의 거듭제곱근을 구하는 방법을 설명하기 위해 많은 지면을 할애한다. 왜냐하면 이 법칙을 방정식의 완전한 해법을 위해 절대적으로 필요한

3) 이하 쪽수만 적힌 참고문헌은 Clairaut A.C.(1746). *Elèments d'algèbre*. Paris: Rue Saint Jacques를 의미한다.

것으로 보았기 때문이다.

마지막으로 제5부에서는 삼차방정식과 사차 방정식의 일반해를 다룬다. 그리고 일반해로 구할 수 없는, 즉 정확한 거듭제곱근이 없는 방정식에 대해 근사적으로 해를 구하는 방법을 다룬다. 스스로 평가하기를 당시까지의 방법보다 훨씬 간단하고 새로운 방법(p.xiv)이라는 것이다. 그리고 사차방정식의 네 개 근은 모두 실근 또는 모두 허근 또는 두 개의 실근과 두 개의 허근이라는 것을 증명한다.

본 논문은 학교 수학의 대수 영역 지도에 관심을 두고 있으므로 주로 제1, 2, 3부의 내용을 중점적으로 고찰할 것이지만 제4, 5부의 수학적 지식 중 일부와 관련하여 당시의 타 수학자들이 생각하지 못한 것을 스스로 생각해낸 것에 대한 자부심을 책의 서문 곳곳에서 찾아볼 수 있다.

III. 대수 지도 원리의 분석

먼저 완성한 <기하학 원론>에서 구현된 역사발생적 원리(졸고, 2003)의 특징 중 일부를 포함하여 <대수학 원론>에서는 대수라는 학문 영역의 특성에서 기인하는 전개상의 특징을 볼 수 있다. 이 장에서는 책의 전개 과정을 분석함으로써 역사발생적 원리의 적용시 뒤따르는 초보자에게 자연스러운 대수 학습을 의도할 때 구현될 수 있었던 몇 가지 특징을 추출하고자 한다. 추출된 특징 중 처음 두 가지는 역사발생적 원리의 구현이라는 의도가 곧이곧대로 표출된 것이고 이어지는 것들은 그 원리로부터 직접 파생된다고 할 수는 없지만 대수를 학습자의 정신에 자연스럽게 가르치려는 일관된 의도에서 비롯된 지도 원리라 할 수 있다.

1. 대수 발달의 출발점은 실제적인 필요이다. 그러나 인간 본연의 호기심이 그 외의 요인으로 작용한다.

역사발생적 원리에 근거한다면 학문 발달의 역사상 기원에 해당하는 것을 학습의 출발점으로 삼는 것이 자연스럽다. Clairaut는 대수 역사상 초기에 등장하는 문제로 여러 사람이 출자금을 모으거나 이익금을 분배할 때 발생하는 비례배분과 같은 문제를 생각하였다. 마치 기하의 역사에서 처음에 등장한 문제로 토지의 넓이를 측량하는 문제를 생각한 것과 같은 맥락이다. 그러한 역할로 사용된 첫 번째 문제는 다음과 같다.

> 돈 890리브르[4]를 세 사람에게 나누어주는데, 첫째 사람은 둘째 사람보다 180리브르 많고, 둘째 사람은 셋째 사람보다 115리브르 많도록 한다 (pp.1-2).

이 문제를 대수라는 학문의 형성 과정을 보여주기에 적합한 문제 상황으로 여겼듯이, 이차방정식을 다루기 위한 가장 자연스런 문제를 이자의 이자와 관련된 문제로 간주하였다.

그러나 기하에서 일상에서의 유용성 및 필요와 별도로 연구 동기로서 작용한 인간 본연의 호기심을 지적하였듯이(졸고, 2003) 대수 학습에서도 필요 외에 호기심이 절대적인 동기로 작용함을 설명한다.

> 3부와 4부에서는 1, 2부에서 했듯이 내가 조사한 방정식으로 귀착 가능한 문제를 더 이상 제시하지 않을 것이다. 왜냐하면 독자의 호기심을 유발하기 위해 이 동기가 더 이상 필요하지 않

4) livre: 옛 화폐 단위이며, 500그램에 해당하는 무게의 단위로도 쓰였다.

> 다고 생각하기 때문이다. 독자들은 처음 문제들을 통해 모든 종류의 방정식을 풀 줄 아는 것이 얼마나 중요한 것인지 충분히 알았을 것이 분명하다(p.xi).

즉 처음에는 문제 상황의 해결이라는 필요가 학습 동기로 작용했지만, 이제는 그 문제와 그 해결을 통해 모든 종류의 방정식을 풀 줄 아는 것이 얼마나 중요한가를 알게 되었기 때문에 이미 충분한 동기 유발이 되었다는 것이다. 3차 이상의 방정식에 대한 연구는 실제에서의 필요라기보다는 수학적 호기심에서 접근하는 것이 더 합리적이라는 판단이라고 볼 수 있다. 실제로 책의 제1, 2부에서 일, 이차방정식을 다루는 출발점은 실세계의 문제 상황이지만 주로 삼, 사차방정식을 다루는 제3, 4, 5부에서는 관련된 문제 상황이 단 하나도 등장하지 않으며 형식적 취급으로 인해 내용의 수준이 높아지는 것이 사실이다.

2. 증명 외에 발견의 과정을 다룬다.

우리가 접하는 수학 논문이나 책은 수학자들의 발견 과정(분석)은 생략된 채 ·오류의 흔적 없이 논리적으로 정리된 내용 및 외형을 갖춘 증명(종합)을 주로 다룬다. 이러한 전개 방식은 역사발생적 원리에서 중요시하는 학문의 발달 과정 및 순서를 보여주지 못한다는 점에서 그 원리에 반한다고 할 수 있다.

한편 Clairaut 스스로가 서문에서 밝힌 바에 따르면, 역사상 위대한 수학자가 해놓은 업적의 공표가 발견 또는 증명을 생략하고 있는 것에 반해 자신의 책에서는 발견과 증명의 상보성을 위해 양자를 함께 전개하려고 노력하였으며 그것을 의도한 내용으로 두 가지를 설명한다. 하나는 제3부에 나오는 방정식의 임의 차수의 인수를 구하는 뉴턴의 방법과 관련하여 증명[5] 외에 발견의 과정을 다루는 것이다.

> 나는 뉴턴이 삭제했던 이 방법의 증명을 보이는 데 만족하지 않고 그가 그것을 어떤 경로에 의해 발견할 수 있었는지 보이도록 한다(p.x).

다른 하나는 제4부에서 다룬 부분적으로 통약가능하고 부분적으로 통약불가능한 식의 거듭제곱근을 구하는 것이다.

> 이 법칙의 원조인 뉴턴은 평소의 습관대로 법칙을 증명 없이 제시했지만 나는 여기서 그것을 하나의 문제로 다루었다. 그렇게 함으로써 발견과 증명은 항상 보조를 맞추어 나아간다(p.xii).

3. 일반화와 특수화의 사고를 상보적으로 구현한다.

학교 대수에 대해 전통적 입장에서 수와 수의 연산에 대한 일반성의 표현이라는 측면에서든, 보다 현대적 입장에서 패턴이나 수열에서 일반적인 관계를 인식하는 경험에서든 일반화는 대수적 사고 발달의 초석이라 할 수 있다. 아울러 그 역과정으로서 특수화는 일반화 과정에서 동시에 발현되는 대수적 사고로 볼 수 있다.

좀더 구체적으로, 일반화와 특수화는 형식불역의 원리나 대입과 같은 대수적 사고 요소와 밀접하게 관련된다(김성준, 2004). 산술에서 대수로의 발달 과정 자체가 일반화에 해당하며, 실제로 방정식과 문자의 명시적인 지도에 앞서 초등수학 수준에서조차 일반화와 특수화는 귀납의 과정에서 자연스럽게 경험되는 사고 전략이다. Clairaut 역시 대수를 가르치는 과정에서

5) 그러나 이 증명조차도 대부분의 대수학 책에서 다루지 않는다고 언급하였다.

일반화와 특수화를 즐겨 사용함을 볼 수 있다. 그 전개 방식은 문제에 주어진 수치를 다루는 해결 과정을 반복 경험한 후 공통으로 요구되는 연산을 파악하고 그 식을 문자를 사용하여 표현한 다음, 다시 수를 대입하여 특수해를 구하는 것이다. [그림 III-1]과 같이 나타낼 수 있다.

> 초기 대수학자들은 그들의 관심을 끈 어떤 문제의 해법을 찾았을 때, 이들 문제에서 주어진 수를 변화시킴으로써 여러 가지 응용을 하는 것을 놓치지 않았다. 예를 들어, 주자의 속력 관계와 출발 지점 사이의 거리를 바꾸면서 앞의 문제를 여러 번 반복하였을 것이다. 이 여러 응용에서 그들은 같은 문제의 특정 예 각각에서 반복되고, 특별한 이러저러한 수에 결코 국한되지 않는 어떤 해법을 찾음으로써 모든 것을 위해 한 번에 될 수 있고 주어진 모든 수에 대해 일반적이 되는 조작의 일부분이 있다고 느꼈다. 이 주제에 대해 그들이 생각했던 것을 보이기 위해 우리는 앞의 문제로 돌아가 가능한 한 가장 일반적인 방식으로 다룰 것이다 (p.23).

그리하여 앞에 나오는 마라톤 주자의 문제 중 수치 부분을 문자로 표현하여 일반 해법을 유도한다. 또는 최대공약수를 구하는 방법을 다루는 부분에서도 구체적 사례를 예시한 후 일반적인 방법을 수가 아닌 문자를 써서 설명한다. 그 다음 또다시 세 가지 수치 사례에서 확인하는 것을 잊지 않는다.

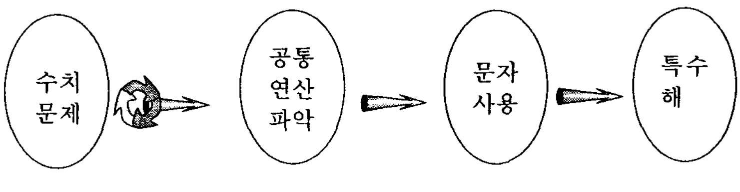
한편 초보자들이 조건이 수 대신 문자로 주어진 문제를 다룸으로써 일반해를 구하는 방법에 익숙해져야 할 것을 주장한다. 그 다음, 특수한 수치 사례를 통해 확인한다. 예컨대 다음 문제가 먼저 주어진다.

> 한 일꾼이 b로 표현된 기간 내에 a로 표현된 어떤 일을 할 수 있다. 둘째 일꾼은 d 기간 내에 일 c를 하고, 셋째 일꾼은 f 기간 동안 일 e를 한다. 이 세 일꾼이 일 g를 하기 위해 함께 일한다면 얼마의 기간이 필요한가?(p.30)

구하는 기간을 x라 할 때 문제의 조건인 a에서 g까지의 문자를 이용하여 일반해 $x=\frac{bdfg}{bde+bcf+adf}$를 구한 다음, 이어 나오는 다음과 같은 두 문제의 해를 이미 구한 일반해에 있는 문자 a부터 g까지에 문제에 주어진 수치를 대입하여 구한다.

> 어떤 벽돌공이 벽을 5일에 7피에[6]만들고, 둘째 벽돌공은 3일에 10피에 만들고, 셋째 벽돌공은 4일에 11피에 만든다고 하자. 세 벽돌공이 함께 일하여 같은 벽의 길이 150피에를 완성하는 데 얼마나 걸리는가?(p.31)

> 세 개의 관으로 200피에^{3}의 저수조를 채울 때, 첫째 관은 $2\frac{1}{2}$일에 9피에^3, 둘째는 $3\frac{1}{3}$일에 15 피에^3, 셋째는 $5\frac{1}{4}$일에 19피에^{3}를 채울 수 있다면 저수조를 채우는 데 얼마나 걸리는가?(p.32)



[그림 III-1] 일반화와 특수화 과정

6) pied: 옛 길이의 단위로 약 32.4㎝에 해당한다.

사실 이 과정이 대수 초보자에게 그렇게 쉬운 문제는 아닐 것으로 생각한다. 왜냐하면 여기서 필요한 유추적 사고는 문제의 구조를 파악하여 두 문제를 문자로 주어진 원래 문제와 구조적으로 유사한 문제로 볼 수 있을 때 적용 가능한 것인데, 초보 학습자에게 이러한 능력을 쉽게 기대할 수는 없기 때문이다. 그러나 Clairaut는 일차방정식뿐만 아니라 이차방정식, 고차방정식의 풀이에서도 문자 조건 및 문자 계수의 일반해를 먼저 도입하고 나서 예를 다룬다. 다음과 같이 이원일차연립방정식을 다룰 때도 마찬가지이다.

미지수가 두 개인 방정식으로 확장할 때 혼합물을 이루는 두 물질의 양을 구하는 문제와 저수로를 채우는 두 수원의 유출량을 구하는 문제에서 처음부터 일반화된 해법을 먼저 제공하고 이를 적용하기 위한 예로 특정 수치가 주어진 문제를 제공한다. 그리고 나서 결국에는 모든 이원일차연립방정식의 문제를 $\begin{cases} bx+cy=a \\ ex+fy=d \end{cases}$ 꼴로 환원할 수 있다는 일반성을 설명한다.

이외에도 미지수가 세 개인 경우에 조건이 문자로 주어진 문제의 일반해를 구한 다음 이어 나오는 문제들은 수치 조건이 주어져 앞서 구한 일반해에 대입함으로써 해결하는 특수화 과정이나, 단항식의 곱셈 방법을 다루면서 먼저 구체적인 사례를 다룬 다음 '이 특정 예에서 했던 추론으로부터 얻은 일반적인 방법은' 우선 계수를 곱한 다음 같은 문자들의 지수를 더하고 다른 문자들을 연이어 쓰는 것 (pp.42-43)이라고 설명하는 일반화의 과정 등 책 속에서 발견되는 일반화와 특수화의 예는 무궁무진하다.

4. 새로 배워야 할 것을 이미 알고 있는 것과 관련짓는다.

학문의 발달 과정에서 이미 발견된 것을 토대로 하여 새로운 지식이 축적되듯이, 개인의 학습 과정에서 새로운 것을 이미 알고 있는 것과 관련지어 학습하는 유용성이 단지 수학교육에 국한되는 비결은 아닐 것이다. Polya(1945)의 문제 해결을 위한 4단계에서 교사가 이용할 수 있는 발문과 권고 중 많은 내용이 이와 관련되어 있음을 확인할 수 있다. 예컨대 '관련된 문제를 알고 있니?', '구해야 할 것이 무엇이지? 구해야하는 것이 같은 유사한 문제를 알고 있니?', '여기 전에 풀었던 것과 관련된 문제가 있다. 그것을 이용할 수 있겠니?' 등이다. Clairaut 또한 동일한 시도를 하는데, 일차방정식을 다룬 후 이차방정식의 해법을 구하는 단계에서이다.

> 이차방정식의 일반 해법을 구하면서 가장 자연스럽게 떠오르는 것은 이차방정식과 일차방정식 사이에 관련시킬 수 있는 것을 알아보는 것이다(p.103).

그리고 나서 일차방정식의 양변을 제곱하여 이차방정식이 되므로 가역적으로(III장 6절 관련) 이차방정식을 일차방정식으로 환원하기 위해 완전제곱꼴을 이용한다.

5. 절차에 대한 이해를 돕기 위해 의미상 접근한다.

절차적 지식과 명제적 지식의 조화는 정보처리이론에서 잘 구조화된 지식의 준거 중 하나로 설명된다. 실제로 대수에는 다양한 계산 과정 및 알고리즘을 포함한 절차적 지식이 있는데, 그것의 실행 규칙뿐만 아니라 그 이유를 설명하는 것은 수학교육에서 의미 충실한 이해를 보장하는 조건 중 하나가 된다.

방정식 풀이에는 이항이나 0 아닌 같은 수로 곱하거나 나누는 절차가 절대적으로 필요하다.

그 도입을 위해 등식의 성질을 이용하는 것이 보통이다. 그러나 Clairaut는 모든 방정식에 대한 일반 원리라 부른 그 절차들을 유도하기 위해 연산 시행 전후의 변화에 대한 의미를 통해 접근한다.

예컨대 $3x+410=890$의 풀이에서, 890이 되기 위해 $3x$에 410을 더하는 것이므로 $3x$는 890보다 410만큼 작다. 이것을 $3x=890-410$이라고 쓴다. 여기서 일반 원리로서, '원하는 항을 그 부호를 바꾸어 방정식의 한 변에서 다른 변으로 옮길 수 있다'를 얻는다. 곧 이항을 말하는 것이며, 많은 추론을 절약한다는 점에서 용도가 무궁무진한 것으로 높이 평가한다 (pp.11-12). 이 원리에 의해 방정식의 한 변에는 x항을, 다른 한 변에는 상수항만을 놓을 수 있다. 이제 $3x=480$이다. 3개의 x가 480이므로 하나의 x는 480의 $\frac{1}{3}$, 이것을 $x=\frac{480}{3}$으로 쓴다. 이때 일반 원리는 '방정식의 한 변에서 미지수에 붙은 승수를 다른 변에 제수가 되게 하면서 제거할 수 있다'는 것이다. 아울러 제수를 없애기 위해서는 다른 변에 승수가 되도록 하면 된다는 설명도 잊지 않는다.

한편 식의 계산과 관련하여 의미에 기초한 설명이 자주 등장한다. 동류항끼리의 덧셈, 뺄셈 과정에서 $2x$와 $\frac{1}{3}x$를 더해야 할 경우, 2개의 전체는 6개의 $\frac{1}{3}$이므로 결과적으로 이 2개의 전체는 $\frac{1}{3}$과 더하여 7개의 $\frac{1}{3}$이 되므로, $\frac{7}{3}x$이 된다고 설명한다. 그리고 음수가 있기 때문에 더하는 것과 증가하는 것, 빼는 것과 감소하는 것을 혼동해서는 안 된다고 주의시킨다. b에서 a를 빼는 것은 b가 a를 얼마큼 넘는가, 즉 얼마만큼 더 큰가를 아는 것이므로 뺄셈에 의해 수가 증가할 수 있음을 설명한다. 또한 $2ac+ab-ax$에서 $3ac-5ab$를 뺄 때 두 식을 괄호로 묶어 −기호로 연결한 다음 괄호를 풀어서 간단히 한다는 식의 절차적 설명 대신 $3ac$만 빼면 $2ac+ab-ax-3ac$이지만 그 경우 $3ac-5ab$를 빼는 것보다 $5ac$만큼 더 뺐으므로 더 뺀 $5ab$만큼을 다시 더해야 하는 것으로 설명한다. 다항식의 곱셈에서도 마찬가지 방식을 취한다. 계산 절차를 그렇게 수행해야 하는 이유를 의미에 근거하여 설명한 다음, 절차 및 알고리즘을 그 숙련을 위한 연습 예와 함께 제공하는 것이다.

6. 가역적 접근을 취한다.

제3부는 앞에서 다룬 일, 이차방정식에 대한 내용을 모든 차수의 방정식을 위한 일반 원리로 확장하는 부분이다. 다시 말해 2차 이상의 방정식을 풀 때 어려움이 수반되는데 모든 차수의 방정식에 적용되는 일반 원리를 파악하면 도움이 될 것이라는 생각이다. 첫 번째로 등장하는 원리는 근의 개수와 관련된다. 일차방정식이 하나의 근, 이차방정식이 두 개의 근을 가지므로 삼차방정식은 세 개의 근을 가질 것이라는 귀납이다. 이 추측을 확인하기 위해 문제에 대해 가역적으로 접근하는데, 주어진 방정식의 근의 개수를 구하는 과정의 역으로 주어진 수를 근으로 하는 방정식을 찾는 것이다. 예를 들어 근이 2, 3, 5인 방정식이 어떤 것인지 구하려면 세 개의 방정식 $x-2=0$, $x-3=0$, $x-5=0$을 만들어 곱하면 되는 것이다. 일반적으로 해 a, b, c, d, e를 갖는 방정식을 구함으로써 근과 계수의 관계로까지 확장한다[7]. 이 접근의 이점은 원래의 접근보다 훨씬

7) 자세한 내용은 IV장 5절에서 설명하기로 한다.

쉽다는 데 있다. 역시 초보자에게 자연스럽고 쉽게 전개하려는 의도가 드러난다.

IV. 교수학적 논의 - 학교 수학과의 비교

산술과 대수는 밀접한 관계가 있고, 역사적으로 대수가 일반화된 산술로서 존재하던 시기가 있었으나 현재의 대수는 학교 수학에서 다루어지고 있는 대수조차도 일반화된 산술이라는 좁은 규정에 다 포괄되지 않는다(김성준, 2004). 실제로 학교 수학에 대수를 도입하는 양상은 여러 가지 형태로 나타난다. Bednarz et al.(1996)은 대수 도입의 방향을 다음의 5가지로 분류하며 시대에 따라 변함을 지적하였다.

- 방정식을 변형하고 풀기 위한 규칙
- 특정 문제나 문제류의 해결
- 수를 지배하는 법칙의 일반화
- 변수와 함수 개념에 대한 보다 최근의 도입
- 대수 구조의 학습

Bednarz et al.은 이 중 첫 번째 것을 오늘날 학교 교육이 대수를 국한시켜 생각하는 방향으로 보았고, 세 번째 것을 일부 교육과정에서 매우 강력하게 초점을 맞추는 방향으로 보았다. 이 두 가지는 제7차 교육과정에 따른 학교 수학에서 대수에 접근하는 주요 방향으로도 생각할 수 있다. 구체적으로 7-가 단계에서 대단원 '문자와 식'을 거치면서 문자를 이용하여 식을 나타내고 문자가 있는 식의 종류와 연산 방법 등을 다룬 후, 등식의 성질을 이용하여 방정식의 풀이 방법을 배운다. 이제 연산의 대상이 수에서 문자까지 확장되어 산술로부터 대수로의 일반화가 진행되며 방정식 풀이 및 응용에 관한 대수적 활동을 본격적으로 시작하는 것이다. 특히 세 번째 방향과 관련하여 산술로부터 대수로의 이행에서 나타나는 장애는 학교 수학에서 대수 학습의 어려움과 직결된다는 주장(김성준, 2004, pp.25-30)에 근거할 때, 대수 초보자에게 대수학을 자연스럽게 전개한다는 기본 취지에서 쓰인 Clairaut의 <대수학 원론>으로부터 교수학적 논의를 통해 시사점을 찾는 것은 의미 있을 것으로 생각한다.

우선 <대수학 원론>이 학교 수학의 교수 아이디어나 교재 집필 방안에 대해 제언하는 바는 III장에서 고찰한 대수 지도 원리로부터 직접적이다. 대수 지도의 출발점으로서 방정식을 세워 풀기에 적절한 실세계 문제 상황의 활용, 증명 외에 발견 과정을 동시에 경험할 수 있는 기회의 활용, 공통 구조를 지닌 문제들로부터 공통 조작을 발견하여 일반화하고 문자 조건으로부터 구한 일반해를 특수 사례에 적용하기, 계산 절차에 대한 의미 파악, 가역적 접근의 활용 등이 포함된다. 한 걸음 더 나아가 학교 수학의 대수 영역과 비교하여 특정 주제와 관련한 Clairaut의 전개 방식에 대해 논의하고자 한다. 더불어 오늘날과 구별되는 접근 방식에 관심을 가짐으로써 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

1. 방정식 세우기에 대한 강조

방정식 단원과 관련하여 오늘날 교과서의 많은 내용은 방정식의 풀이 절차와 관련되며 실제로 미지수를 잡아서 방정식을 세우는 과정은 방정식의 응용에 나오는 어려운 내용으로 간주되는 것이 보통이다. 즉 문제 상황을 표현하는 방정식을 세우는 것보다 제시된 방정식을 푸는 방법이 강조되며 풀이 절차를 먼저 다루고 난 후, 응용문제로서 문장제에 대한 방정식을 세우는 경험을 유도한다. 이에 반해 Clairaut는 대수 문제의 일반적인 풀이를 두 개의 부분으로

나누어 설명하는데, 오늘날과는 그 순서에 있어 차이가 있다.

> 일반적으로 문제의 풀이가 두 부분으로 이루어진다는 것을 알게 된다. 첫 번째 부분에서 구하는 미지량, 즉 그 값을 구하면 다른 미지량들을 결정하는 하나의 미지량을 x, y와 같은 하나의 문자로 놓는다. 그 다음, 그 미지수가 있는 방정식을 얻으려고 노력한다. 이것은 같은 양을 두 가지 다른 방법으로 표현함으로써 되는 것이다. 두 번째 부분은 이 방정식을 푸는 것과 관련된다(p.9).

Clairaut의 입장에서 본다면 우리 학교 수학의 대수 영역은 그 순서가 전도되었다고 할 수 있고, 후자에 편중된 교수 실제를 말할 수도 있을 듯하다. Clairaut의 전개 방식을 따른다면 문제 상황으로부터 출발하여 방정식을 세우는 경험이 방정식의 풀이보다 선행될 필요가 있다. 그런데 방정식을 세우는 것은, Clairaut 자신이 "전자는 초보자에게 명백한 규범으로 환원하기 어렵고 예를 통해서만 잘 느끼도록 할 수 있다(p.9)"고 했듯이 '미지량을 문자로 잡아 같은 양을 두 가지 다른 방법으로 표현한다'는 것 외에 확실한 행동 지침이 될만한 비법이 없으므로 방정식의 풀이 절차와 달리 명백한 규범의 설정이 어렵다. 따라서 다양한 문제 상황을 통해 다수의 방정식을 세워보는 경험을 최선의 학습 방법으로 간주하고 있음을 알 수 있다.

실제로 일차방정식을 풀기 위한 어느 정도의 원리를 발견한 후 대수가 어느 정도 발달했을 시점에는 방정식 풀이 절차 자체가 연구 대상일 수 있었지만, 역사상의 초기 수학자들의 연구 활동으로 보다 적합한 것은 방정식 세우는 방법에 대해 생각하는 것이었다고 하며 다양한 예를 제시한다. 그 예는 분배 문제, 속도-거리-시간 문제 등이다.

> 발명가들이 한 대로 될 수 있는 한 가장 그럴 듯한 순서를 따르기 위해 우리는 미지수를 구하는 방법을 더 깊이 파고들지 않고, 문제에 대한 방정식을 세우는 방법으로 되돌아온다. 방정식의 해법은 이 과학(대수학)이 어떤 지점까지 진보했을 때 그것이 관련된 문제와 별도로 대수학자들을 사로잡을 수 있었다. 그러나 그 기초를 놓은 사람들은 방정식이, 말하자면 어떤 문제의 결과인 경우에만 조사하였던 것으로 추측된다(pp.16-17).

또한 Clairaut는 문자 계수 방정식의 해법을 다루기에 앞서 수치 계수 방정식의 풀이 규칙이 문자 계수 방정식에 동일하게 적용되므로 다시 유도할 필요는 없고 많은 적용 사례를 보이는 것을 중시하였다(p.33).

2. 문자 있는 식의 계산 및 문자의 부호와 관련한 오류에 대처

앞서 언급했듯이 제7차 교육과정에 따르면 문자와 문자식의 계산은 7-가 단계에서 도입되는데, 산술에서 대수로의 이행이 요구되는 내용이기 때문에 학습자의 인지적 어려움이 큰 것으로 알려져 있다. 예컨대 Küchemann은 대수에서의 문자 사용에 대한 13-15세 학생들의 이해 수준을 4가지로 분류하였으며 Collis는 구체적 조작기에 있는 학생들이 수를 대신하고 있는 문자에 대해 지니는 사고를 4가지 수준으로 나누어 설명하였다(김남희, 1997 재인용). 특히 문자 기호와 식을 다루는 구문론적인 규칙에 초점을 두고 형식적인 방법으로 지도하게 되면 학생들은 문자 기호와 식에서 의미론적 요소를 점검할 기회를 갖지 못하고 기계적인 조작만을 반복하게 된다(Booth, 1984: 김성준, 2004 재인용).

Clairaut도 이와 같은 학습의 어려움을 인식하

여 학생들의 예측된 오류 가능성을 설명하고 미리 주의시키고자 하였다. 예컨대 문자 있는 식의 사칙 연산과 관련하여 학생들이 흔히 범하는 오류를 막기 위해 그 오류를 예시하고 올바른 방법을 상세하게 설명해준다. 방정식 $\frac{x-3}{2}=\frac{x+8}{3}$을 풀 때, 전술한 이항법칙을 적용하여 -3, $+8$의 부호를 바꾸어 옮기는 것, 그리하여 방정식 $\frac{x-8}{2}=\frac{x+3}{3}$과 같이 쓰는 것이 잘못되었음을 주목하도록 한다. 왜냐하면 -3은 순수한 하나의 항이 아니라 단지 피제수 $x-3$의 항일 뿐이기 때문이다. $\frac{x-3}{2}$이나 $\frac{x+8}{3}$은 모두 이 방정식의 한 개 항일 뿐이므로 $x-3$의 $\frac{1}{2}$을 취하는 것으로 시작해야 하며 따라서 $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$이 된다. 즉 방정식 $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$을 얻으면 이제 이항할 수 있다고 설명한다 (p.9). 오늘날도 마찬가지로 식의 계산을 가르칠 때 이런 류의 오류가 빈번히 발생한다. 오류가능성을 예측함으로써 양변에 있는 분수를 각각 하나의 덩어리, 즉 하나의 항으로 보도록 주의시킬 필요성이 제기된다.

한편 학생들이 범하는 오류 중 하나가 a는 양수이고 $-a$는 음수라는 생각이다. 즉 문자 자체는 양수라는 생각을 갖고 있는 것이다. Clairaut는 이것을 자연스런 초기 사고로 간주한 것 같다. 책의 첫 부분에서 상수를 나타내는 문자 a, b, c는 모두 양수로 취급된다. 이것이 음수일 수도 있다는 것을 다루는 것은 훨씬 나중이다. 즉 이원일차방정식으로 표현되는 한 문제를 풀었는데 구한 미지수의 값으로 음수가 나온 것이다. 미지수의 값이 음이 되면 그것이 표현하는 양은 문제의 조건을 표현하면서 이용했던 의미와 반대 의미를 취해야 한다는 것을 설명하는 장면을 이용하여 문자의 값이 음일 수도 있음을 제시한다. 예컨대 물이 흘러 들어간다는 조건을 이용하여 세운 방정식을 풀어 음근이 나오면 물을 빼내는 의미로 해석해야 하는 것이다. 이와 같이 미지수의 값으로 음수가 가능한 것과 마찬가지로 기지수에 대해서도 음수가 허용된다. 일반해를 적용할 때 문제의 조건인 a, b, c로 음수를 취할 수 있고, 그 경우에도 일반해에서 취한 것과 반대 의미로 해석된다. 즉 미지수든 상수든 모든 문자는 반대 의미를 지니면서 음수를 취할 수 있음을 설명한다.

그러나 수학 개념 학습에서 스키마의 재구성은 어렵기 때문에 학생들이 처음에 갖는 기본 스키마에 주의를 기울여야 한다는 Skemp(1989)의 견해를 참조할 때 초기에 문자의 범위를 양수에 국한시켜 다루는 것이 타당한가는 재고의 여지가 있다. 이에 대해 두 가지 경우로 생각하고자 한다. 우선 일반적인 문맥에서 문자가 갖는 수의 범위는 학습자가 알고 있는 모든 수로 간주하는 것이 Skemp의 견해도 거스르지 않으면서 오히려 자연스러울 것으로 생각된다. 이후 함수의 정의역과 같은 맥락에서 문자의 범위를 한정하는 활동을 경험함으로써 문자의 부호에 대한 충분한 이해를 할 것으로 기대된다.

한편 미지수로서의 문자와 관련해서는 Clairaut의 전개 방식이 의미 있다고 볼 수 있다. 방정식의 해를 구할 때, 양근만 있는 방정식을 먼저 다루고 나서 음근이 발생했을 때 그것을 의미상 반대로 해석하면서 근으로 수용하는 것이다. 이제 문자는 양수뿐만 아니라 음수도 취한다는 사실을 자연스럽게 파악한다. 이는 바로 앞 절에서 보았듯이 방정식을 풀이 절차의 강조가 아닌 문제 상황에 적절한 방정식을 세운 후 푸는 방식을 따랐기 때문에 가능한 접근이다.

3. 다항식의 곱으로부터 파생된 곱셈의 부호 규칙 지도의 이점

산술 및 대수 영역에서 경험하는 어려움 중 또 다른 하나는 곱셈에서의 부호 규칙이다. 현행 교육과정에 따른 교과서에서는 (음수)×(양수)를 (음수)의 (양수)배 만큼으로 생각한 다음 승수인 양수를 음수까지 확장하는 귀납적 외삽법을 적용하여 (음수)×(음수)의 부호를 설명하거나(강행고 외, 2002, p.81), 그 외에 시간-위치-속력 모델에 의한 설명 및 수직선에 의한 표현 등을 이용한다. 최병철(2006)에 의하면 60%가 전자의 방법을, 40%가 후자의 방법을 취하는 것으로 나타난다. 음수와 음수의 곱이 양수라는 사실로 인한 인지적 장애는 수학사 상에서 인식론적 장애로 확인된 어려움이고, Clairaut 역시 곱셈 원리는 초보자가 어려워할 뿐만 아니라 교사 또한 설명할 때 당혹감을 느끼는 '거의 예외 없이 모든 이에게 장애물(p.iv)'이라고 하였다. 따라서 Clairaut 자신이 학습과 교수의 장애물로 여긴 곱셈 원리를 어떻게 전개하는지 알아보는 것은 흥미롭다.

먼저 다항식과 양의 단항식으로 시작한다. 왜냐하면 음의 항이 단독으로 존재하는 것에 익숙하지 않기 때문이다. 그 다음 다항식과 다항식의 곱 $(a-b)(c-d)$를 의미상 접근하여 $a-b$에 $c-d$를 곱한 것은 c만 곱한 것인 $ac-bc$보다 d를 곱한 것인 $ad-bd$만큼 빼어야 하므로[8] $ac-bc-ad+bd$인 것으로 설명한다. 그 특수한 경우로서 $a=c=0$일 때도 성립해야 하므로 $-b\times-d=+bd$를 얻는다. 이 때 음의 항과 음의 항의 곱이 양의 항이라는 것을 파악한다.

이 접근 방식은 귀납적 외삽이나 모델 또는 표현을 이용한 방식에 비해 특별히 더 쉽거나 말끔하지는 않다고 할 수도 있다. 그러나 다항식과 다항식의 곱을 가르치면서 중요하지만 설명하기 어려운 지식을 부가적으로 설명할 기회를 갖는다는 이점이 있고, 식의 계산 절차에 대한 의미를 설명함으로써 터득한 필연적 파생물이기 때문에 지식에 대한 확신이라는 측면에서 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

4. 이차방정식의 특정 해법의 선호

Clairaut가 제시한 일차방정식의 풀이 절차는 연산의 의미를 강조하기는 하지만 이항이나 등식의 성질을 이용한 동치 변형이라는 점에서 오늘날의 방식과 마찬가지이다. 한편 이차방정식의 해법에 대해서는 오늘날 인수분해를 이용한 방법이 주를 이루고 그 외에 완전제곱식, 근의 공식을 이용한 방법이 다루어지는 반면(강행고 외 8인, 2003), Clairaut는 완전제곱식을 이용한 방법만을 다룬다. 즉 $x^2+px=q$에서 좌변의 x의 계수의 반의 제곱을 양변에 더한 다음 양변의 제곱근을 취하는 것으로 설명한다.

해법의 다양성이나 최선의 해법 선택 등을 주요 수학교육적 활동으로 간주하는 관점에서 오늘날의 접근이 선호되어야 할 것이다. 그러나 Clairaut가 택한 완전제곱식의 방법을 이용할 때, 이 방법을 연습함으로써 얻을 수 있는 이점으로 "초기 대수학자들의 이차방정식 연구에서 기인하는 것이 분명한 대수의 새로운 연산들을 배울 수 있다(p.116)"는 것을 고려해보자. 그 연산들이란 식의 제곱근 구하기, 근호 안의 곱 중 제곱식을 빼내어 근호 있는 식을 간단히

8) $(ad-bc)-(ad-bd)$로 구한 결과가 아님에 주의해야 한다. 이 식에서는 감수의 괄호를 풀지 못하는 악순환이 되풀이되므로, III장 5절에서 설명한 바와 같이 의미상 접근한 결과이다.

하기, 근호 있는 식의 가감승제 등이다. 이 연산들이 연습에 의해 숙달되도록 해야 하는 것이라는 점에서는 오늘날의 접근과 다를 바 없지만, 그 출현에 있어 이차방정식의 풀이 과정에서 필요하기 때문이라는 자연스런 도입 맥락이 뒷받침되며 따라서 도입의 정당성이 확보되는 것이다. 제곱근의 연산을 이차방정식의 해법 이전에 별도로 학습하는 오늘날 학교 수학에서는 Clairaut의 방식에 큰 의미를 부여할 수 없겠지만, 지도 내용간의 연계성 및 필연성에 관심을 갖는다면 이차방정식의 여러 해법 중 하나로서 완전제곱식 방법을 소개하고 그 맥락에서 필요에 의해 제곱근 연산을 도입하는 자연스러운 전개는 고려해볼 만하다.

5. 근과 계수와의 관계의 일반적 취급

근과 계수와의 관계 및 근의 부호에 대한 파악을 용이하게 해주는 일반 원리를 다룬다. 방정식이 차수만큼의 근을 갖는다는 추측을 확인하기 위해 역으로 주어진 근을 갖는 방정식을 생각하는 식으로 접근함을 이미 보았다. a, b, c, d, e를 해로 갖는 방정식은 다음과 같은 5차식이다.

$$
\begin{array}{llllll}
x^5 & -ax^4 & +abx^3 & -abcx^2 & +abcdx & -abcde=0 \\
 & -b & +ac & -abd & +abce & \\
 & -c & +ad & -abe & +abde & \\
 & -d & +ae & -acd & +acde & \\
 & -e & +bc & -ace & +bcde & \\
 & & +bd & -ade & & \\
 & & +be & -bcd & & \\
 & & +cd & -bce & & \\
 & & +ce & -bde & & \\
 & & +de & -cde & &
\end{array}
$$

이로부터 일반적인 사실을 도출한다. n차방정식에서 n-1차항의 계수는 모든 근의 합, n-2차항의 계수는 둘씩 짝지어 만들 수 있는 모든 곱의 합, n-3차항의 계수는 셋씩 짝지어 만들 수 있는 모든 곱의 합, …, 이렇게 하여 상수항은 모든 근의 곱이 되는 것이다[9]. 즉 오늘날 이차, 삼차방정식에서 근과 계수와의 관계로 다루는 것을 최고차항의 계수가 1인 경우에 국한시킨[10] 일반화이다. n개의 수가 주어지면 그 것을 해로 갖는 n차방정식을 만들 수 있는 것이다. 이 사실은 방정식을 만들고 그 방정식의 여러 가지 성질을 알기 위한 기초가 되므로 식에 대한 탐구 활동으로서 다룰 가치가 있는 내용이라 할 수 있다.

Clairaut가 제시한 몇 가지 성질은 다음과 같다.

첫째, n-1차항이 없다면 근의 합이 0임을 뜻하므로 양근과 음근이 모두 있으며 더욱이 양근과 음근의 합의 절대값이 같음을 뜻한다. 예컨대 2차항이 없는 삼차방정식은 두 양근의 합과 절대값이 같은 한 음근이거나, 거꾸로 두 음근의 합과 절대값이 같은 한 양근을 갖는 경우이다.

둘째, 상수항이 없으면 0은 해가 된다. 이외에도 상수항이 모든 근의 곱이라는 성질은 중요하다. 왜냐하면 상수항으로부터 모든 유리근을 찾을 수 있기 때문이다. 학교 수학에서 주어진 방정식을 인수분해하는 과정에서 $x\pm$(상수항의 약수)로 나누어지는지 확인하기 위해 인수정리를 이용하는 것과 관련된다. $x-a$로 나누어떨어지면 a가 해가 되고, 어느 것으로도 나누어지지 않으면 유리근이 없다는 것을 뜻한다.

그런데 상수항의 약수가 너무 많다면 역시

9) Clairaut는 계수의 부호에 대해서는 언급하고 있지 않지만 식에는 명료하게 표시되어있다. 식에서 금방 확인할 수 있듯이 n-1차항이 음으로 시작하여 차례로 반복된다.

10) 뒷부분에서는 분수 계수, 최고차항이 1이 아닌 경우, 문자 계수까지 다룬다.

지루한 작업이 될 것이다. 오늘날 인수정리를 이용할 때 상수항의 약수가 너무 많으면 식에 대입하여 식의 값을 구하는 과정이 지나치게 길어지기 때문이다. 그리고 고차식의 경우에 각각의 약수를 식에 대입하여 구하는 과정에서 큰 수가 나오므로 계산 과정이 대부분 복잡하기 쉽다. 이때 Clairaut의 표현에 따르면 불필요한 1차식으로의 나눗셈, 오늘날 학교 수학에서는 불필요한 식의 값 구하는 계산을 피하기 위한 방법을 제시한다. 이용되는 기초 원리는 식 A가 식 B의 인수이면 x에 특정값을 대입하여 얻은 식 A의 값 역시 식 B의 값의 인수라는 것이다.

절차는 x의 값을 $-1, 0, 1$로 가정하는 것으로 시작된다. 이러한 x값의 선택은 계산상의 편리함을 위한 것일 뿐이다. 각각의 x값에 대해 식의 값을 구하고 그 3개 식의 값의 모든 약수를 찾는다. $x+a$를 주어진 식의 인수라고 가정해보자. 그러면 $x=1$일 때의 약수 중 $1+a$가 있어야 하고, $x=0$일 때의 약수 중 a가 있어야 하고, $x=-1$일 때의 약수 중 $-1+a$가 있어야 한다. 즉 1만큼 크고, 1만큼 작은 수가 위, 아래에 있지 않으면 그 수는 a가 아닌 것이다. 그러한 약수는 제외 대상이 되므로 불필요한 나눗셈을 피할 수 있는 것이다. $x=0$일 때의 약수 중 조건을 만족시키는 것을 찾으면 일단 근의 후보를 지목하게 된다[11]. 그 다음, $x=2$일 때 식의 값의 약수가 $x=1$일 때보다 1 큰 것인지를 알아보거나 또는 후보인 근을 실제로 대입하여 식의 값이 0인지를 확인하는 식으로 하여 근을 확정짓는 것이다.

이 절차에 대한 이해를 돕기 위해 예를 들어보자. 제시된 문제 중 상수항의 약수가 많은 $x^5-12x^4+5x^3-61x^2+22x-120=0$에 대해 알아보자.

제1열에 x의 값으로 1, 0, -1을 쓴다. 이 값들을 식에 대입하여 구한 165, 120, 221을 제2열에 쓴다. 제3열에는 이 세 수의 약수들을 놓는다. <표 IV-1>과 같이 배열된다.

우선 120의 약수 2가 요구 조건을 만족하는지 검토한다. +를 취하면 각각 위, 아래에 있는 3, 1과 일치하므로 근의 후보가 된다. 제4열에 +3, +2, +1을 쓴다. 이어서 $-$를 취한 2는 아래에 -3(부호는 무시하므로 3)이 있어야 하는데 찾을 수 없으므로 만족하지 않음을 알 수 있다.

이어서 120의 다른 모든 약수들을 같은 방법으로 확인한 후 12가 $-$를 취하여 요구 조건을 만족한다는 것을 알 수 있다. 즉 $-$를 취하면 위, 아래에 수 11과 13이 있다. 따라서 제5열에 세 수 -11, -12, -13을 쓴다.

제4열과 제5열 중 어느 것을 취해야 하는지, 다시 말해 $x+2$와 $x-12$중 어느 것이 인수가 되는지 알아보아야 한다. 전자가 인수라면 주어진 방정식의 x에 -2를 대입하여 0이 되어야 하지만 그렇지 않고, 따라서 $x-12$로 나누어보

<표 IV-1> 다항식의 1차식 인수 구하기

1	165	1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165	+3	-11
0	120	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120	+2	-12
-1	221	1, 13, 17, 221	+1	-13

11) 조건을 만족하는 약수에 반대 부호를 취하면 근의 후보가 된다. 예컨대 약수 2가 조건을 만족하면 인수 $x+2$를 가질 가능성이 있으므로 -2가 근의 후보인 것이다.

면 그 몫은 x^4+5x^2-x+10이 된다. 이와 같이 $+12$는 주어진 방정식의 유일한 유리근이다.

이와 유사한 방법으로 주어진 방정식의 2차 인수를 찾는 데까지 확장한다.

이 절에서 다룬 내용의 우월성은 일반성의 수준에 의존한다고 해야 할 것이다. 학교 수학에서 근과 계수와의 관계를 이차, 삼차방정식에 국한시켜 문자 계수로 명시적으로 표현된 것을 암기하는 것에 비해 여기서는 일반 n차방정식에서 관계에 주목하도록 한다. 어느 차수에서도 적용될 수 있는 '둘(셋, 넷…)씩 짝지어 만들 수 있는 모든 곱의 합'이라는 식의 표현으로 근과 계수의 관계를 제시한다.

한편 학교 수학에서 1차식 인수를 구하기 위해 상수항의 약수를 대입하는 방법도 2, 3차식이고 상수항의 약수가 많지 않아 해야 할 계산이 복잡하지 않다면 간편하게 적용할 수 있다. 그러나 Clairaut가 지적한대로 상수항의 약수가 너무 많으면 해의 후보가 많아져 지루한 계산이 필요하고 식의 차수가 크다면 그 계산이 복잡하기까지 하므로 위에 제시된 알고리즘의 유용성이 돋보인다. 위에서 예로 든 5차식에 120의 약수를 대입하여 식의 값을 계산해야 하는 학생의 어려움을 상상하는 것으로 충분하다. 역시 방법의 일반성이라는 점에서 그 가치를 평가해야 할 것이다.

일반성의 측면에서 한 가지 예를 첨가하면 두 식의 최대공약식[12]을 구하는 방법이다. Clairaut는 최대공약수를 구하는 일반적인 방법에 '임의의 두 식 A와 B가 두 식 중 하나, 예컨대 A를 B와 어떤 공약수도 갖지 않는 어떤 식으로 곱하거나 나누어도 두 식의 최대공약식은 변하지 않는다'라는 하나의 원리만을 추가함으로써 수에서 식으로의 확장을 꾀한다. 즉 두 식 A와 B의 최대공약식을 구하는 일반적인 방법은 두 수 a와 b의 최대공약수를 구하는 원리인 'a와 b의 최대공약수는 $a=bq+r$ $(0\leq r<b)$일 때 b와 r의 최대공약수와 같음'을 이용한 유클리드 호제법의 일반화이다. 이 방법 역시 기존의 방법으로 구할 수 없거나 지루한 계산이 있는 경우에 적용가능성을 들어 우위에 놓았다. 따라서 특별한 경우에는 종종 더 쉬운 방법을 이용할 수 있음을 말하며 두 가지 경우를 제시하는데, 둘 모두 인수분해와 관련된 내용에 해당한다. 즉 인수분해가 어려운 경우에 일반적으로 사용할 수 있는 방법을 최대공약수의 방법으로부터 일반화하여 제시한 것이다.

V. 맺음말

전통적인 교육과정에서 학생들은 수를 대신하여 문자를 사용하여 식을 쓰고 이 식을 해석하거나 변형하는 것을 배울 때 '대수를 시작한다'고 한다(Stacey & Macgregor, 2001). 그 외에 대수를 특징지을 만한 것들에 대한 탐구로 인해 패턴 찾기를 포함한 대수적 사고와 관련된 내용들이 최근 교육과정 속에 속속 등장하며 우리나라 교육과정에서도 규칙찾기 활동에서 비롯된 귀납적 사고, 일반화의 사고와 같은 대수적 사고를 강조하는 면을 확인할 수 있다. 소위 '패턴에 기초한 접근(pattern-based approach)'으로, 미지수를 찾기 위한 사고 절차의 단계인 방정식의 변형을 통해서가 아니라 두 변량 사이의 관계를 표현하는 것을 통해서 대수에 접근하는 것을 말한다. 그럼에도 불구하고 오늘

12) 수에 대해 최대공약수라는 용어에 견주어 두 식의 공통인수 중 차수가 가장 큰 것을 이렇게 부르기로 한다. 원문에서는 'le plus grand diviseur commun'이라 칭하면서 뒤에 ~des nombres 혹은 ~des quantitês와 같이 수나 양을 구체화하여 써주기도 한다.

날 학교 수학의 대수 영역에서 가장 중심이 되는 내용은 전통적인 교육과정과 마찬가지로 문자의 사용과 방정식의 풀이라는 점에 이견이 없을 것 같다.

Clairaut의 책은 과거의 산물이다[13]. Clairaut의 책에는 오늘날 추구하는 패턴 찾기와 같은 내용은 다루어지지 않으며 따라서 그러한 접근을 취하고자 할 때 얻을 수 있는 시사점은 찾아보기 어렵다고 해야 할 것이다. 그러나 일부 교육과정에서 새로운 접근을 추구하는 현실에서도 우리의 교과서는 전통적인 방식을 크게 벗어나 있지 않다. 그렇다면 이전과 별 다를 것이 없는 산술의 일반화 및 방정식 해법을 강조하는 대수의 관점에서 학생들에게 자연스럽고 의미 있게 하고자 했던 Clairaut의 전개 방식은 오늘날 대수 교재를 구성하는 데 여러 가지 시사하는 바가 있을 것으로 기대된다.

본 논문에서는 내용이나 접근 방식에 있어 전통적인 학교 대수의 맥락 속에서 교수학적 논의를 하고 가능한 시사점을 찾고자 하였다. 이를테면 Bednarz et al.(2001)이 말했던 두 번째 방식과 같이 다양한 문제 상황을 통한 접근을 이용하는 것이다. 우리나라 교과서에서 취하고 있듯이 방정식 풀이 절차를 배운 다음 그것을 문제 상황에 적용하는 학습은 Clairaut가 <기하학 원론>에서 Euclid <원론>에 대한 타수학자들의 대안 역시 <원론>과 다를 바 없다고 비판했던 약점이다. 그의 취지를 살린다면 출발점이 문제 상황이 되어야 하는 것이고 문자를 사용할 수밖에 없는 문제 상황을 제기함으로써 대수 학습이 이루어져야 한다. 주어진 그러나 문제 상황으로부터 식을 세우기 위한 명쾌한 법칙은 없기 때문에 다양한 문제 상황에 대한 식 세우기 경험을 통해 문제와 식을 대응시킬 수 있어야 할 것이다.

그 외에 오늘날 학교 수학의 대수 영역 지도와 관련하여 몇 가지 주제에 대해 논의하였다. 문자식의 계산에서 주의해야 할 오류 가능성, 문자가 갖는 수의 범위, 음와 음의 곱이 양이라는 곱셈의 부호 규칙, 근과 계수와의 관계 및 근에 대한 일반적인 성질, 다항식의 상수항으로부터 1차식 인수를 구하는 방법 등이 포함된다.

본 논문에서 실시한 이론적 고찰을 토대로 하여 중등 수학 교사에게 대수 영역의 수업을 위한 국지적인 아이디어를 제공할 수 있기를 기대하며, 나아가 내용의 적용 범위 및 방법 등에 대해 구체적인 시사점을 얻을 수 있는 현장 연구는 의미 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

강행고 외 9인(2002). **수학 7-가**. 중앙교육진흥연구소

강행고 외 8인(2003). **수학 9-가**. 중앙교육진흥연구소

김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문

민세영(2002). **역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문

장혜원(2003). Clairaut의 <기하학 원론>에 나타난 역사발생적 원리에 대한 고찰. **수학교**

13) 이를테면 Clairaut는 삼, 사차방정식의 일반해를 구하는 방법을 설명하였지만, 스스로 4차를 넘는 방정식의 일반 해법을 제시하지 못한 한계를 언급한다. 오늘날 우리가 알고 있는 오차방정식의 일반해가 없다는 사실에 대한 Abel(1802-1829)의 증명을 그는 알지 못했던 것이다.

육학연구, 13(3), 351-364

최병철(2006). **음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석**. 서울대학교 박사학위논문

Arcavi, A.(1985). *History of mathematics as a component of mathematics teachers background*. Ph.D.thesis: The learning materials. Weismann Institute of Science. Rehovot, Israel

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L.(1996). *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching*. Approaches to algebra : perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer academic publishers

Clairaut, A.C. (1741). *Eléments de géométrie*. Gauthier-Villars et Cle, Eds(1920). 장혜원 역(2005). **클레로의 기하학원론**. 경문사

____________(1746). *Eléments d'algébre*. Paris: Rue Saint Jacques

Polya, G.(1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Doubleday anchor books

Skemp, R.R.(1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge. 김판수, 박성택 역(1996). **초등수학교육**. 교우사

Stacey, K. & Macgregor, M.(2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., & Lins, R.(2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht: Kluwer academic publishers

Analysis on the Principles for Teaching Algebra Revealed in Clairaut's <Elements of Algebra>

Chang, Hye Won (Chinju National University of Education)

<Elements of Algebra> by A.C. Clairaut was written based on the historico-genetic principle such as his <Elements of Geometry>.

In this paper, by analyzing his <Elements of Algebra> we can induce six principles that Clairaut adopted to teach algebra: necessity and curiosity as a motive of studying algebra, harmony of discovery and proof, complementarity of generalization and specialization, connection of knowledge to be learned with already known facts, semantic approaches to procedural knowledge of mathematics, reversible approach. These can be considered as strategies for teaching algebra accorded with beginner's mind. Some of them correspond with characteristics of <Elements of Geometry>, but the others are unique in the domain of algebra. And by comparing Clairaut's approaches with school algebra, we discuss about some mathematical subjects: setting equations in relation to problem situations, operations and signs of letters, rule of signs in multiplication, solving quadratic equations, and general relationship between roots and coefficients of equations.

* **Key words** : A.C. Clairaut(클레로), Elements of Algebra(대수학 원론), historico-genetic principle(역사발생적 원리), Elements of Geometry(기하학 원론), school algebra(학교 대수)

논문 접수: 2007. 7. 6
심사 완료: 2007. 8. 13