대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 3, 221-232. Aug 2007

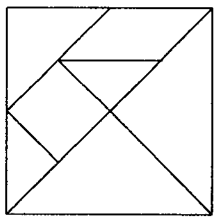
정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색

박 교 식*

현재 학교수학에서는 탱그램의 몇 조각을 변끼리 서로 깔끔하게 붙여 특정한 다각형을 만드는 활동을 소개하고 있다. 이 연구는 이러한 활동을 심화하는 것에 초점을 맞추고 있다. 이 연구에서는 탱그램 뿐만 아니라, 그것과 유사한 정사각형 칠교판인 淸少納言의 칠교판과 피타고라스 퍼즐의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 피크의 정리와 和々草(2007)의 방법으로 모두 구하고 있다. 먼저 피크의 정리를 이용하여, 다음에는 和々草(2007)의 방법을 변의 길이 조건을 만족하는 정사각형 칠교판의 경우로 일반화시켜, 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 20개를 넘을 수 없다는 것을 보였다. 실제로 확인한 결과, 탱그램, 淸少納言의 칠교판, 피타고라스 퍼즐의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 각각 13개, 16개, 12개이다.

Ⅰ. 서 론

제7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서와 익힘책, 그리고 여러 종의 중학교 7-나 단계 수학 교과서에서는 [그림 I-1]과 같은 칠교판(tangram, 이하 탱그램)을 비교적 여러 차례 소개하고 있다.[1] 그런데 거의 대부분의 교과서에서는 탱그램의 몇 조각을 이용하여 특정한 다각형(즉, 볼록 다각형)을 만들어 보는 가벼운 활동만을 제시하고 있다. 수학 교수-학습에서의 탱그램 활용에 관한 여러 연구(이인환, 류기천, 이석희, 1999; Margerm, 1999; Rigdon, Raleigh, Goodman, 2000; Thatcher, 2001; 이경화, 2001; 박교식, 2002; Moyer, Bolyard, 2003, 서은영, 2007)에서 제시하고 있는 활동도 이와 크게 다르지 않다.



[그림 I-1] 탱그램

만약, 탱그램의 일곱 조각을 모두 사용하면

* 경인교육대학교, pkspark@gin.ac.kr

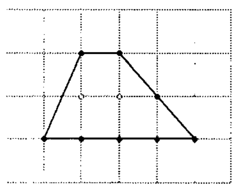
1) 교육인적자원부(2004). 수학 3-가; 수학 4-나; 수학 4-나 익힘책; 수학 5-가; 수학 5-나; 수학 5-나 익힘책, 서울: 대한교과서주식회사; 강옥기, 정순영, 이환철(2001). 중학교 수학 7-나. (주) 두산; 강행고 외 9인(2001). 중학교 수학 7-나. (주)중앙교육진흥연구소; 고성은 외 5인(2001). 중학교 수학 7-나. (주)블랙박스; 금종해, 이만근, 이미라, 김영주(2001). 중학교 수학 7-나. (주)고려출판; 신항균(2001). 중학교 수학 7-나. 형설출판사; 이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은(2001). 중학교 수학 7-나. (주)디딤돌; 황석근, 이재돈(2001). 중학교 수학 7-나. 한서출판사.

어떤 볼록 다각형을 만들 수 있는가? 탱그램의 일곱 조각을 모두 사용해서 여러 가지 볼록 다각형을 만들다 보면, 이와 같은 의문을 자연스럽게 가질 수 있다. 그리고 활동을 통해 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 모두 13개라는 것을 경험적으로 확인할 수 있다. 그러나 Wang & Hsiung(1942)에서 볼 수 있듯이, 수학적으로 그것을 증명하는 것은 그다지 쉽지 않다. 그래서 교과서를 비롯하여, 수학 교수-학습에서의 탱그램 활용에 대한 대부분의 연구에서도 이 문제를 취급하고 있지 않는 것으로 보인다. 이 문제를 취급하고 있는 안주형과 송상헌(2002) 및 송상헌(2004)에서는 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 모두 13개라는 것을 단지 소개하고 있는 정도이다. 박교식(2004)도 和々草가 운영하는 인터넷 사이트를 인용하여 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 모두 13개라는 것의 증명을 부분적으로 소개하고 있을 뿐이다.[2] 그런데 和々草(2007)가 사용한 방법은 기본적으로 Wang & Hsiung(1942)의 방법을 쉽게 풀이한 것이다. 이에 비해, 송상헌(2006)은 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 모두 13개라는 것을 확인하는 방법을 나름대로 제시하고 있다. 그는 탱그램의 일곱 조각으로 만든 한 볼록 다각형에서 특정한 조각의 위치를 바꾸어 새로운 볼록 다각형을 만드는 방법을 제시하고 있다. 그러나 이 방법이 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 13개뿐이라는 것을 증명하는 것은 아니다. 그것은 단지 13개의 볼록 다각형을 체계적으로 모두 찾을 수 있는 한 가지 가능한 방법을 제시한 것이라 할 수 있다.

이 연구에서는 '피크의 정리(Pick's Theorem)'와 和々草(2007)가 사용한 방법을 이용하여 '정사각형 칠교판'(박교식, 2004)의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 탐색한다. 그러나 이 연구에서는 각 조각의 내각의 크기가 45°, 90°, 또는 135°인 정사각형 칠교판으로 한정한다. 이것은 일곱 조각을 모두 깔끔하게 붙여 만든 볼록 다각형의 내각의 크기도 또한 45°, 90°, 또는 135°임을 의미한다. 특히 이 연구에서는 이러한 정사각형 칠교판으로, 탱그램과 박교식(2004)이 소개하고 있는 '清少納言(Sei Shonagon)의 칠교판' 및 '피타고라스 퍼즐'을 대상으로, 그것들의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 탐색한다. 이러한 탐색은 학교수학에서 소개하고 있는 탱그램의 수학교육적 활용성을 더 높일 수 있을 것이다.

II. 피크의 정리를 이용하여 볼록 다각형 구하기

피크의 정리는 '격자 다각형'에서 성립하는 성질이다. 격자 다각형은 [그림 II-1]과 같이 가로선과 세로선이 직각으로 만나는 격자에서 어떤 다각형의 모든 꼭지점이 가로선과 세로선의 교점이 되는 다각형이다.



[그림 II-1] 격자 다각형

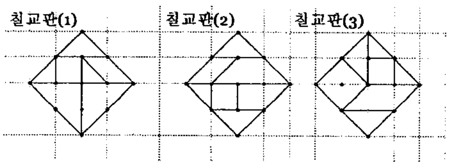
2) http://www1.kamakuranet.ne.jp/usasan/ (2007. 8. 11 접속) 이하 和々草(2007) 또는 (和々草, 2007)은 이 사이트의 인용을 나타낸다.

격자 다각형의 넓이를 A, 격자 다각형의 내부에 있는 점의 수를 I, 변 위에 있는 점의 수를 B라고 하면, 이들 사이에 다음의 식이 성립한다는 것이 알려져 있다.

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1 \ (B \geq 3) \ \cdots \ \text{(II-1)}$$

이 내용이 '피크의 정리'이다(Grünbaum & Shephard, 1993). 일반적으로 학교수학에서는 피크의 정리를 취급하지 않는다. 그러나 학생들의 탐구 활동 소재로 피크의 정리를 소개하는 것이 불가능한 것은 아니다. 예를 들어 몇몇 연구(김남희, 2001; 이경화, 2001; 정동권, 2001; 김민경, 2004; Russell, 2004; Utely & Wolfe, 2004)에서는 학교수학의 맥락에서 피크의 정리의 귀납적 발견을 취급하고 있다.

탱그램과 유사한 것이 많이 알려져 있다. 그러한 것 중에서 조각을 나눈 형태만 다를 뿐, 기본적으로 정사각형을 일곱 조각으로 나눈 것이 정사각형 칠교판이다. [그림 II-2]의 칠교판(2), 칠교판(3)은 각각 清少納言의 칠교판과 피타고라스 퍼즐로 알려진 것이다.



[그림 II-2] 정사각형 칠교판

[그림 II-2]에서 칠교판(1)~칠교판(3)은 모두 볼록 격자 다각형임을 알 수 있다. 한 모눈의 가로와 세로의 길이를 각각 1이라고 하면, 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각을 깔끔하게(Read, 1965) 서로 붙여 볼록 다각형을 만든다고 할 때, 그것의 넓이는 모두 8이다. 즉, 피크의 정리에 의하면 다음이 성립한다.

$$8 = I + \frac{1}{2}B - 1 \ \cdots \ \text{(II-2)}$$

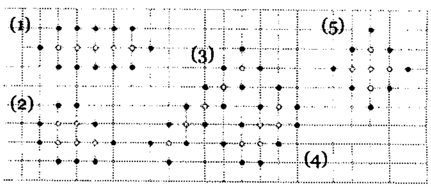
식 (II-2)에서 넓이가 8인 볼록 격자 다각형의 변 위의 점은 짝수 개로 그 수는 4, 6, 8, …, 16, 18이어야 한다. 이때 내부의 점은 각각 7, 6, …, 2, 1, 0개이다. 이것을 순서쌍 (B, I) 로 나타내면 다음과 같다.

(4, 7), (6, 6), (8, 5), (10, 4), (12, 3), (14, 2), (16, 1), (18, 0)

각 조각의 내각의 크기가 45°, 90° 또는 135°이므로, 그것을 모두 깔끔하게 붙여 만든 볼록 다각형의 내각의 크기도 45°, 90° 또는 135°이다. 이것은 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각으로 만든 볼록 다각형의 각 변의 길이는 자연수 또는 $\sqrt{2}$의 자연수배임을 의미한다.

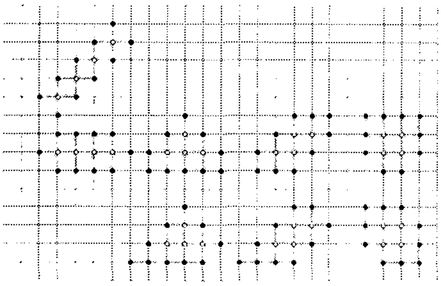
각 변의 길이는 자연수 또는 $\sqrt{2}$의 자연수배이어야 한다는 조건(이하, 간단히 변의 길이 조건)을 염두에 두면, 위의 여덟 가지 경우 중에서 (4, 7)과 (6, 6)의 두 경우는 성립하지 않는다. 변의 길이 조건을 만족하는 어떤 볼록 격자 다각형(convex lattice polygon, 이하 간단히 CLP)의 변 위의 점이 4개, 6개뿐이라면, 그 CLP의 내부의 점은 각각 최대 1개, 2개이기 때문이다. 한편, 어떤 CLP의 내부의 점이 1개, 2개뿐이면, 그 CLP의 최대의 넓이는 각각 4, 6이다. 따라서 (14, 2), (16, 1)의 경우도 성립하지 않는다. 따라서 실제로는 (8, 5), (10, 4), (12, 3), (18, 0)의 네 경우만 조사하면 된다.

어떤 격자 다각형의 내부의 점이 5개일 때, 그 격자 다각형이 볼록이기 위해서는 그 내부의 점의 배열은 [그림 II-3]의 어느 하나이어야 한다. 그런데 이 중에서 변 위의 점이 8개인 것은 (5) 하나뿐이다.



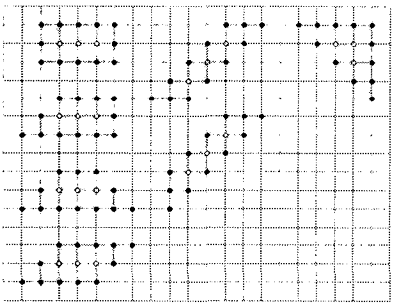
[그림 II-3] 내부의 점이 5개인 CLP

어떤 격자 다각형의 내부의 점이 4개일 때, 그 격자 다각형이 볼록이고, 변 위의 점이 10개인 것은 [그림 II-4]의 8개이다.



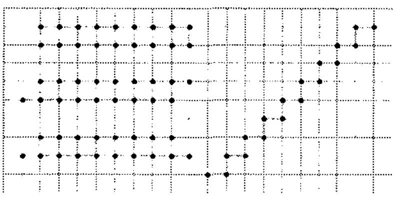
[그림 II-4] 내부의 점이 4개,
변 위의 점이 10개인 CLP

어떤 격자 다각형의 내부의 점이 3개일 때, 그 격자 다각형이 볼록이고, 변 위의 점이 12개인 것은 [그림 II-5]의 7개이다.



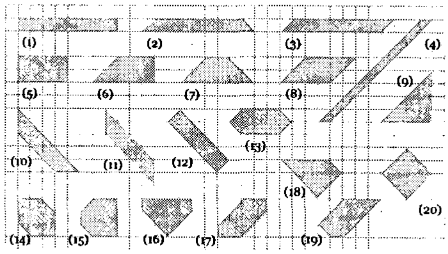
[그림 II-5] 내부의 점이 3개,
변 위의 점이 12개인 CLP

어떤 격자 다각형의 내부의 점이 하나도 없을 때, 그 격자 다각형이 볼록이고, 변 위의 점이 18개인 것은 [그림 II-6]의 4개이다.



[그림 II-6] 내부의 점이 0개,
변 위의 점이 18개인 CLP

지금까지의 결과를 종합하면, 변의 길이 조건을 만족하면서 (8, 5), (10, 4), (12, 3), (18, 0)을 만족하는 CLP는 모두 20개뿐이다. 이것을 함께 나타내면 [그림 II-7]과 같다.



[그림 II-7] 변의 길이 조건을 만족하면서
넓이가 8인 CLP

그런데 이것은 변의 길이 조건을 만족하면서, 넓이가 8이 되는 CLP는 최대 20개임을 의미할 뿐, 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 20개라는 것을 의미하지는 않는다. 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 조각의 상태에 따라 20개에 훨씬 미치지 못할 수 있다. 따라서 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각으로 위의 볼록 다각형을 실제로 만들 수 있는 지를 반드시 확인할 필요가 있다. 이에 대해서는 뒤에서 논의하기로 한다.

III. 和々草의 방법을 이용하여 볼록 다각형 구하기

칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각을 깔끔하게 서로 붙여 만든 볼록 n각형의 내각의 크기는 45°, 90°, 또는 135°이다. 이 볼록 n각형에 크기가 45°, 90°, 또는 135°인 내각이 각각 p, q, r개 있다고 하자. 그러면 다음의 두 식이 성립한다.

$$p+q+r=n \quad \cdots \text{(III-1)}$$

$$45p+90q+135r=180(n-2)$$

즉, $p+2q+3r=4(n-2)$ ⋯ (III-2)

이 두 식을 합쳐 간단히 하면 다음과 같다.

$$2p+q=8-n \quad \cdots \text{(III-3)}$$

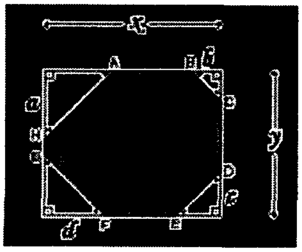
이때 p, q, r은 0 이상의 정수이고, n은 3 이상 8 이하의 정수이다. 식 (III-1)~(III-3)을 만족하는 p, q, r, n을 모두 구하면 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 식 (III-1)~(III-3)을 만족하는 n, p, q, r

(출처: 和々草, 2007)

n	p	q	r
3	2	1	0
4	0	4	0
4	1	2	1
4	2	0	2
5	0	3	2
5	1	1	3
6	0	2	4
6	1	0	5
7	0	1	6
8	0	0	7

和々草(2007)를 <표 III-1>의 여러 가지 볼록 다각형을 한 개의 직사각형, 네 개의 직각이등변삼각형을 이용하여 [그림 III-1]과 같이 한 개의 그림을 이용하여 나타내고 있다. 이때 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 언제나 $\sqrt{2}$의 자연수배이다. x, y, a, b, c, d는 모두 0 이상의 정수이다. 이때 일반성을 잃지 않고 $x \geq y \geq 1$이라고 가정할 수 있다.



[그림 III-1] 볼록 다각형의 모양 (출처: 和々草, 2007)

x, y, a, b, c, d의 값에 따라 [그림 III-1]을 이용하여 삼각형에서 팔각형까지 모두 나타낼 수 있다. 이 중에서 우리가 원하는 것은 [그림 III-1]에서 어두운 부분의 넓이가 8이 되는 것이다. 따라서 다음 식이 성립하여야 한다.

$$xy-\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{2}-\frac{d^2}{2}=8$$

이 식을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$2xy-(a^2+b^2+c^2+d^2)=16$$

$a^2+b^2+c^2+d^2=\alpha$라고 하면, 이 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2xy-\alpha=16 \quad \cdots \text{(III-4)}$$

[그림 III-1]에서 다음이 성립함을 알 수 있다 (和々草, 2007).

$$a+b \leq x,\ c+d \leq x,\ a+d \leq y,$$

$$b+c \leq y,\ y \leq 8 \quad \cdots \text{(III-5)}$$

[경우 1] $y=1$이라고 하자. 그러면 식 (III-5)에서 $a+d \leq 1$이므로 (a, d)로 다음 세 경우가 가능하다.

(0, 0), (0, 1), (1, 0)

또, $b+c \leq 1$이므로 (b, c)로 다음 세 경우가 가능하다.

(0, 0), (0, 1), (1, 0)

이것으로부터 $0 \leq \alpha \leq 2$이다. $2x-\alpha=16$에서 x가 정수이려면 $\alpha=0, 2$이다. 이때 $x=8, 9$이다.

$x=8$이면 $a+b \leq 8$, $c+d \leq 8$

$x=9$이면 $a+b \leq 9$, $c+d \leq 9$

이때 각각 (x, y, a, b, c, d)를 구하면 모두 다섯 가지가 가능하다. 이 중에서 서로 다른 것은 다음의 3개이다.

① (8, 1, 0, 0, 0, 0)

② (9, 1, 0, 0, 1, 1)

③ (9, 1, 0, 1, 0, 1)

[경우 2] $y=2$라고 하자. [경우 1]과 같은 방법을 사용하면, $0 \leq \alpha \leq 8$이다. $4x-\alpha=16$에서 x

가 정수이려면 a=0, 4, 8이다. 이때 x=4, 5, 6 이다.

x=4이면 $a+b\le 4$, $c+d\le 4$

x=5이면 $a+b\le 5$, $c+d\le 5$

x=6이면 $a+b\le 6$, $c+d\le 6$

앞의 [경우 1]과 같은 방법으로 각각 (x, y, a, b, c, d)를 구하면 모두 열 가지가 가능하다. 이 중에서 서로 다른 것은 다음의 5개이다.

① (4, 2, 0, 0, 0, 0)

② (5, 2, 0, 0, 2, 0)

③ (5, 2, 1, 1, 1, 1)

④ (6, 2, 0, 0, 2, 2)

⑤ (6, 2, 0, 2, 0, 2)

[경우 3] y=3이라고 하면 $0\le a\le 18$이다. $6x-a=16$에서 x가 정수이려면 a=2, 8, 14이다. 이때 x=3, 4, 5이다.

x=3이면 $a+b\le 3$, $c+d\le 3$

x=4이면 $a+b\le 4$, $c+d\le 4$

x=5이면 $a+b\le 5$, $c+d\le 5$

이때 각각 (x, y, a, b, c, d)를 구하면 모두 열여덟 가지가 가능하다. 이 중에서 서로 다른 것은 다음의 6개이다.

① (3, 3, 0, 1, 1, 0)

② (3, 3, 0, 1, 0, 1)

③ (4, 3, 0, 0, 2, 2)

④ (4, 3, 0, 2, 0, 2)

⑤ (5, 3, 0, 1, 2, 3)

⑥ (5, 3, 0, 2, 1, 3)

[경우 4] y=4라고 하면 $0\le a\le 32$이다. $8x-a=16$에서 x가 정수이려면 a=16, 24, 32이다. 이때 x=4, 5, 6이다.

x=4이면 $a+b\le 4$, $c+d\le 4$

x=5이면 $a+b\le 5$, $c+d\le 5$

x=6이면 $a+b\le 6$, $c+d\le 6$

그러나 x=5일 때는 다른 변수의 값을 구할 수 없다. x=4와 x=6일 때 (x, y, a, b, c, d)를 각각 구하면 모두 일곱 가지가 가능하다. 이 중에서 서로 다른 것은 다음의 3개이다.

① (4, 4, 0, 0, 4, 0)

② (4, 4, 2, 2, 2, 2)

③ (6, 4, 0, 4, 0, 4)

[경우 5] y=5라고 하면 $0\le a\le 50$이다. $10x-a=16$에서 x가 정수이려면 a=34, 44이다. 이때 x=5, 6이다.

x=5이면 $a+b\le 5$, $c+d\le 5$

x=6이면 $a+b\le 6$, $c+d\le 6$

그러나 x=5일 때는 다른 변수의 값을 구할 수 없다. x=5일 때 (x, y, a, b, c, d)를 구하면 모두 여섯 가지가 가능하다. 이 중에서 서로 다른 것은 다음의 2개이다.

① (5, 5, 0, 5, 0, 3)

② (5, 5, 1, 4, 1, 4)

[경우 6] y=6이라고 하면 $0\le a\le 72$이다. $12x-a=16$에서 x가 정수이려면 a=56, 68이다. 이때 x=6, 7이다.

x=6이면 $a+b\le 6$, $c+d\le 6$

x=7이면 $a+b\le 7$, $c+d\le 7$

그러나 x=6, 7일 때는 다른 변수의 값을 구할 수 없다.

[경우 7] y=7이라고 하면 $0\le a\le 98$이다. $14x-a=16$에서 x가 정수이려면 a=82, 96이다. 이때 x=7, 8이다.

x=7이면 $a+b\le 7$, $c+d\le 7$

x=8이면 $a+b\le 8$, $c+d\le 8$

그러나 x=7, 8일 때는 다른 변수의 값을 구할 수 없다.

[경우 8] $y=8$이라고 하면 $0\le a\le 128$이다. $16x-a=16$에서 x가 정수이려면 $a=112$, 128이다. 이때 $x=8$, 9이다.

$x=8$이면 $a+b\le 8$, $c+d\le 8$

$x=9$이면 $a+b\le 9$, $c+d\le 9$

그러나 $x=8$일 때는 다른 변수의 값을 구할 수 없다. $x=9$일 때 (x, y, a, b, c, d)를 구하면 모두 두 가지가 가능하다. 이 둘은 동일하므로 실제로는 다음의 한 가지뿐이다.

① (9, 8, 0, 8, 0, 8)

즉, 다음 <표 III-2>와 같이 모두 20개의 볼록 다각형이 있음을 알 수 있다. 여기서 번호는 [그림 II-7]의 번호를 나타낸다. 이 결과는 앞에서 피크의 정리를 이용하여 구한 것과 완전히 일치한다.

<표 III-2> 식 (III-4)~(III-5)를 만족하는 볼록 다각형의 종류

번호	x	y	a	b	c	d	n각형
[1]	8	1	0	0	0	0	4각형
[2]	9	1	0	0	1	1	4각형
[3]	9	1	0	1	0	1	4각형
[5]	4	2	0	0	0	0	4각형
[6]	5	2	0	0	2	0	4각형
[13]	5	2	1	1	1	1	6각형
[7]	6	2	0	0	2	2	4각형
[8]	6	2	0	2	0	2	4각형
[15]	3	3	0	1	1	0	5각형
[14]	3	3	0	1	0	1	6각형
번호	x	y	a	b	c	d	n각형
[16]	4	3	0	0	2	2	5각형
[17]	4	3	0	2	0	2	6각형
[18]	5	3	0	1	2	3	4각형
[19]	5	3	0	2	1	3	5각형
[9]	4	4	0	0	4	0	3각형
[20]	4	4	2	2	2	2	4각형
[11]	6	4	0	4	0	4	4각형
[10]	5	5	0	5	0	3	4각형
[12]	5	5	1	4	1	4	4각형
[4]	9	8	0	8	0	8	4각형

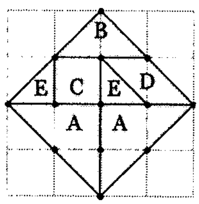
이것은 변의 길이 조건을 만족하면서, 넓이가 8이 되는 볼록 다각형은 최대 20개임을 의미한다. 따라서 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각으로 위의 볼록 다각형을 실제로 만들 수 있는지를 확인하는 것이 필요하다.

IV. 정사각형 칠교판으로 만들 수 있는 볼록 다각형

피크의 정리 또는 和々草(2007)의 방법에 의하면, 변의 길이 조건을 만족하면서, 넓이가 8이 되는 볼록 다각형은 20개를 넘을 수 없다. 이제 이 20개의 볼록 다각형 중에서 칠교판(1)~칠교판(3)의 각각의 일곱 조각으로 실제로 만들 수 있는 것을 확인하면 된다.

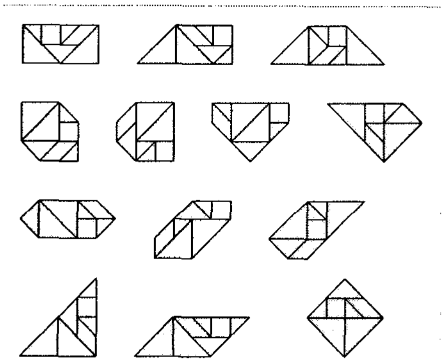
첫째, [그림 VI-1]에서 볼 수 있듯이 칠교판(1)에서 가장 큰 조각은 A이다. A의 적어도 어느 한 변에 나머지 다른 조각들을 깔끔하게 서로 붙여야 한다.

이것은 칠교판(1)의 일곱 조각으로 만들 수 있는 CLP의 내부의 점이 0개일 수 없음을 의미한다. 즉, [그림 II-7]에서 (1)~(4)의 경우는 불가능하다. 또, 조각 D 때문에 (10)~(12)도 만들 수 없다.



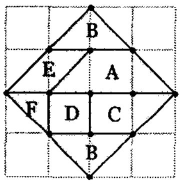
[그림 VI-1] 칠교판(1)

칠교판(1)의 일곱 조각으로 실제로 만들 수 있는 볼록 다각형은 [그림 VI-2]와 같이 (1)~(4), (10)~(12)를 제외한 13개이다.



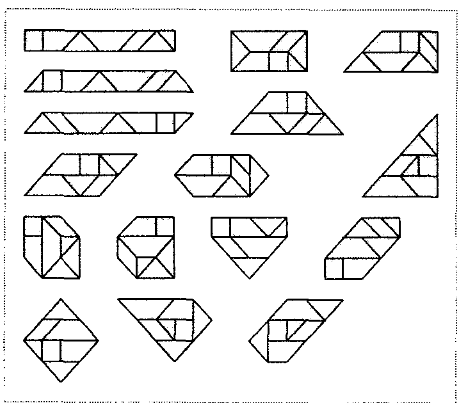
[그림 VI-2] 칠교판(1)로 만들 수 있는 볼록 다각형

둘째, [그림 VI-3]에서 볼 수 있듯이 칠교판(2)에서 가장 큰 조각은 A이다. 따라서 [그림 II-7]에서 (4), (12)의 경우는 불가능하다. 조각 E 때문에 (10)과 (11)도 만들 수 없다.



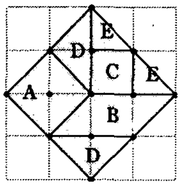
[그림 VI-3] 칠교판(2)

칠교판(2)의 일곱 조각으로 실제로 만들 수 있는 볼록 다각형은 [그림 VI-4]와 같이 (4), (10)~(12)를 제외한 16개이다.



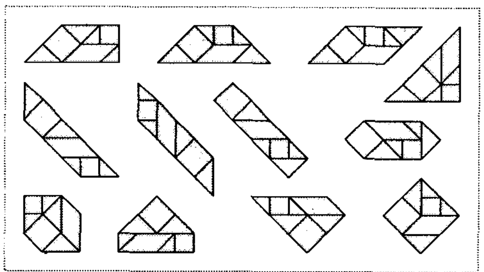
[그림 VI-4] 칠교판(2)로 만들 수 있는 볼록 다각형

셋째, [그림 VI-5]에서 볼 수 있듯이 칠교판(3)에서 조각 A의 내부에 이미 한 점이 있다. 따라서 [그림 II-7]에서 (1)~(4)의 경우는 불가능하다. 또, 조각 A와 B 때문에 (5), (15), (17), (19)도 만들 수 없다.



[그림 VI-5] 칠교판(3)

칠교판(3)의 일곱 조각으로 실제로 만들 수 있는 볼록 다각형은 [그림 VI-6]과 같이 (1)~(5), (15), (17), (19)를 제외한 12개이다.



[그림 VI-6] 칠교판(3)으로 만들 수 있는 볼록 다각형

V. 결 론

이 연구에서는 피크의 정리와 和々草(2007)의 방법을 각각 이용하여 탱그램, 清少納言의 칠교판, 피타고라스의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 모두 구하였다. 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 13개이고, 清少納言의 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 16개이

다. 피타고라스 퍼즐의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 12개이다.

이 연구에서는 특히 탱그램뿐만 아니라, 그것과 유사한 정사각형 칠교판인 淸少納言의 칠교판과 피타고라스 퍼즐의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 피크의 정리와 和々草(2007)의 방법으로 모두 구하고 있다. 변의 길이 조건(또는 내각의 크기가 45°, 90° 또는 135°라는 조건)을 만족하는 정사각형 칠교판의 경우, 이 두 방법으로 구한 결과는 완전히 일치한다. (그러나 여기서 일곱 조각으로 되어 있다는 것이 꼭 필요한 조건은 아니다.) 즉, 그 조건을 만족하는 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 20개를 넘을 수 없다.

어떤 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 수는 그 정사각형 칠교판의 각 조각의 특징에 기인하는 특정한 조건에 좌우된다. 그것을 검토함으로써 그것의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 구할 수 있다. 그것이 Wang & Hsiung(1942)이 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 13개뿐이라는 것을 증명하기 위해 택한 방법이다. 그런데 그들이 사용한 방법을 학교수학에서 그대로 사용하기는 쉽지 않다. 그래서 和々草(2007)는 이 방법을 순화시켜, 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 17개를 넘지 않는다는 것을 보였다. 그리고 이어서 탱그램의 일곱 조각으로 그 중 네 개를 만들 수 없다는 것을 보였다. 이에 비해, 이 연구에서는 和々草(2007)의 방법을 변의 길이 조건을 만족하는 정사각형 칠교판의 경우로 일반화시켜, 그것의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형은 20개를 넘을 수 없다는 것을 보였다. 그리고 이에 앞서 먼저 피크의 정리를 이용하여 동일한 결과를 얻었다. 그러나 탱그램, 淸少納言의 칠교판, 피타고라스 퍼즐의 각각의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형을 구하기 위해서는, 이 20개의 볼록 다각형 중에서 세 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 실제로 만들 수 있는 것을 각각 찾아야 한다.

현재 학교수학에서는 탱그램의 일곱 조각 또는 그 일부를 서로 붙여 특정한 볼록 다각형을 만들거나, 또는 특정한 형상을 만드는 것에 초점을 맞추고 있다. 이 연구에서는 이러한 활동을 심화시켜, 학교수학에서 탱그램을 비롯한 정사각형 칠교판의 일곱 조각을 서로 깔끔하게 붙여 만들 수 있는 볼록 다각형을 탐색하고 있다. 이러한 탐색을 위해, 먼저 학생들에게 정사각형 칠교판의 일곱 조각을 모두 사용해서 나름대로 여러 가지 볼록 다각형을 만들어 보도록 요구한다. 이 과정에서 학생들은 일곱 조각을 서로 깔끔하게 붙여야 한다는 것과 변의 길이 조건의 의미를 이해하고, 그것을 준수해야 한다. 이런 과정을 거쳐 학생들이 만든 볼록 다각형을 모두 모아 그 종류를 분류하면, 예를 들어 탱그램의 경우, 어렵지 않게 13개의 서로 다른 볼록 다각형이 있다는 것을 확인할 수 있을 것이다. 그러나 학생들이 찾아낸 볼록 다각형이 13개임을 확인하는 것으로 수업을 마치는 대신, 학생들에게 더 이상의 볼록 다각형이 없다는 것을 어떻게 알 수 있는지 질문한다. 이러한 질문은 탱그램의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형이 모두 13개뿐이라는 것을 정당화하도록 요구하는 것이다,

이러한 문제는 볼록 다각형을 만드는 단순한 활동을 넘어, 수학적인 세계로 입문하도록 학생들을 안내할 수 있다. 이러한 문제가 모든 학생들에게 적합한 것은 아니다. 실제로는 많은 학생들이 이러한 문제의 해결에 어려움을 겪을 것이다. 현재까지 일부 영재 초등학생들에게만 이러한 문제를 제공하는 것도 아마 이

런 이유에서 일 것이다. 그런데 이 연구에서 제시하는 두 방법은 사실상 중학교 수학 이상의 것을 요구하지 않는다. 이것은 그 두 방법을 중학생들에게 적용하는 것이 불가능하지 않다는 것을 의미한다. 그러나 영재 초등학생 또는 중학생들에게 이 두 방법을 사용하기 위해서는, 먼저 첫째 방법에서는 피크의 정리를 귀납적으로 발견시켜 증명 없이 사용한다는 전제가 필요하다. 둘째 방법에서는 각 문자가 나타내는 여러 가지 경우를 정교하게 분리하는 사고가 요구된다.

이 연구에서 제시한 두 방법과 관련해서 학생들은 먼저 변의 길이 조건을 만족하는 정사각형 칠교판의 경우, 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 수는 많아야 20개를 넘을 수 없다는 것을 알아야 한다. 다음으로는 일곱 조각으로 만들 수 있는 실제 볼록 다각형은 일곱 조각을 구성하는 각 조각의 특성에 좌우된다는 것을 알아야 한다. 각 조각의 특성에 따라 어떤 특정한 볼록 다각형을 만들 수 없는 경우도 있기 때문이다. 학생들은 이 두 가지를 탱그램, 清少納言의 칠교판, 피타고라스 퍼즐의 각각의 일곱 조각의 특징을 비교하여 확인할 수 있다.

이 연구에서 제시한 두 방법은 영재 초등학생 또는 중학생 이상의 경우에 적용 가능해 보이지만, 이 연구에서는 학생들을 대상으로 그 가능성을 실제로 적용하지는 않았다. 그것은 이 연구의 범위를 넘는다. 이 연구에서는 탱그램을 비롯한 정사각형 칠교판의 수학교육적 활용을 가능하게 하기 위한 한 방법으로, 일곱 조각으로 구할 수 있는 볼록 다각형의 수에 대한 수학적 탐색에 초점을 맞추고 있기 때문이다. 즉, 이 연구는 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색이라는 수업 아이디어의 가능성을 실제 수업에 앞서 확인하는 것을 목적으로 하는 것이다. 그런 만큼 학생들을 대상으로 이러한 탐색을 구체적으로 시도하고, 그 효용성을 논하는 것은 후속 연구를 통해 이루어질 수 있을 것이다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주) 두산.

강행고 외 9인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

고성은 외 5인(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주)블랙박스.

교육인적자원부(2004). **3-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). **4-나 익힘책**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). **4-나**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). **5-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). **5-나 익힘책**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). **5-나**. 서울: 대한교과서 주식회사.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: (주)고려출판.

김남희(2001). 기하판을 활용한 학교수학의 지도. **학교수학, 3**(1), 155-184.

김민경(2004). 넓이 관련 열린 문제에 관한 문제해결 과정 분석. **수학교육, 43**(3), 275-289.

박교식(2002). 유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점. **학교수학, 4**(1), 97-107.

박교식(2004). **탱그램 다시보기**. 서울: 수학사

랑.
서은영(2007). **초등학교 수학 교수·학습을 위한 평면조각퍼즐 탐구 활동 교재 개발에 관한 연구.** 경인교육대학교 대학원 석사학위 논문.
송상헌(2004). 수학 영재 교수·학습 자료 개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. **과학교육논총, 16,** 67-86. 경인교육대학교.
송상헌(2006). 탱그램과 유사탱그램을 활용한 교육과정 넘나들기. 제19회 수학교육학 콜로퀴엄(2006. 11. 18. 경인교육대학교 예지관).
신항균(2001). **중학교 수학 7-나.** 서울: 형설출판사.
안주형(2002). **탱그램과 모자이크 퍼즐을 활용한 수학과 수업 분석에 관한 연구.** 인천교육대학교 대학원 석사학위 논문.
안주형·송상헌(2002). 탱그램과 모자이크 퍼즐의 활용에 관한 연구. **학교수학, 4**(2), 283-296.
이경화(2001). 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어. **학교수학, 3**(2), 423-445.
이인환·류기천·이석희(1999). 수학교육과 탱그램 활동. **수학교육학술지, 3,** 139-168.
이준열·장훈·최부림·남호영·이상은(2001). **중학교 수학 7-나.** 서울: (주)디딤돌.
정동권(2001). 수학 교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. **학교수학, 3**(2), 447-473.
황석근·이재돈(2001). **중학교 수학 7-나.** 서울: 한서출판사.
Grünbaum, B. & Shephard, G. C. (1993). Pick's theorem. *The American Mathematical Monthly 100*(2). 150-161.
Margerm, P. (1999). An old tale with a new turn-and flip and slide. *Teaching Children Mathematics 6*(2). 86-90.
Moyer, P. S. & Bolyard, J. J. (2003). Classify & capture: Using venn diagrams and tangrams to develop abilities in mathematical reasoning and proof. *Mathematics Teaching in the Middle School 8*(6). 325-330.
Read, R. C. (1965). *Tangrams: 330 Puzzles.* New York: Dover Publications.
Rigdon, D. Raleigh, J. & Goodman, S. (2000). *Tackling Tangrams. Teaching Children Mathematics 6*(5). 304-305.
Russell, R. A. (2004). Pick's theorem. What a lemon. *Mathematics Teacher 97*(5). 352-355.
Thatcher, D. (2001). The tangram conundrum. *Mathematics Teaching in the Middle School 6*(7). 394-399.
Utley, J., & Wolfe, J. (2004). Geoboard areas: students' remarkable ideas. *Mathematics Teacher 97*(1). 18-22.
Wang, F. T., & Hsiung, C. C. (1942). A theorem on the tangram. *The American Mathematical Monthly 49*(9). 596-599.

和々草(2007)
http://www1.kamakuranet.ne.jp/usasan/

An Inquiry into Convex Polygons which can be made by Seven Pieces of Square Seven-piece Puzzles

Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

In school mathematics, activities to make particular convex polygons by attaching edgewise some pieces of tangram are introduced. This paper focus on deepening these activities. In this paper, by using Pick's Theorem and 和々草's method, all the convex polygons by attaching edgewise seven pieces of tangram, Sei Shonagon(清少納言)'s tangram, and Pythagoras puzzle are found out respectively. By using Pick's Theorem to the square seven-piece puzzles satisfying conditions of the length of edge, it is showed that the number of convex polygons by attaching edgewise seven pieces of them can not exceed 20. And same result is obtained by generalizing 和々草's method. The number of convex polygons by attaching edgewise seven pieces of tangram, Sei Shonagon's tangram, and Pythagoras puzzle are 13, 16, and 12 respectively.

* **Key words** : tangram(탱그램), Pick's Theorem(피크의 정리), convex polygon(볼록 다각형)

논문접수: 2007. 7. 15
심사완료: 2007. 8. 15