

구동기포화를 갖는 불확실한 시스템의 H_2 제어

H_2 Control of Uncertain Systems with Actuator Saturation

최현철, 좌동경*, 홍석교
(Hyoun-Chul Choi, Dongkyoung Chwa, and Suk-Kyo Hong)

Abstract : This paper presents an LMI-based method to design a saturated state-feedback H_2 controller for uncertain systems with actuator saturation. Specifically, the paper proposes a sufficient condition such that the system under norm-bounded uncertainties and actuator saturation is asymptotically stable and the H_2 -norm of the system has an upper-bound. The resulting condition is further utilized to solve a convex optimization problem specified in the context of H_2 -norm minimization, whose solution yields a saturated H_2 controller. A numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: actuator saturation, H_2 control, uncertain system, convex optimization, linear matrix inequality

I. 서론

대부분의 제어시스템에는 구동기포화 및 불확실성이 존재한다. 구동기포화는 구동기로부터 발생하는 에너지의 유한성에 기인하는데, 제어를 설계할 때 이를 고려하지 않으면 예상치 못한 결과를 초래할 수 있다. 예컨대, 구동기포화는 페루프 제어시스템 응답에 리미트사이클을 유발하거나 시스템을 불안하게 할 수 있다[1]. 한편, 불확실성은 대상 시스템에 대한 부정확한 모델링 및 예측하기 어려운 외란에 기인하는데, 이 또한 제어기 설계 시 고려하지 않으면 시스템의 성능 저하 및 불안정성을 일으킬 수 있다.

그 동안 구동기포화가 존재하는 시스템 제어문제에 대한 많은 연구가 이루어졌다. Hindi와 Boyd[2]는 Circle 정리 및 Popov 정리를 이용하여 구동기포화 시스템의 제한된 상태공간 영역에서 안정성 및 성능을 보장하는 방법을 제안하였다. Kim과 Bien[3]은 포화함수를 선형 및 비선형 부분으로 분해하고 이를 이용하여 구동기포화 시스템을 안정화하는 제어 조건을 구하였다. Nguyen과 Jabbari[4]는 구동기에 인가되는 제어입력의 크기 및 변화율에 포화가 존재하는 시스템의 제어문제를 고려하고 선형 파라미터 변화(Linear Parameter Varying: LPV) 시스템 접근법을 이용하여 주어진 시스템을 안정화하고 외란의 영향을 줄이는 제어기법을 제안하였다. Yu 등[5]은 구동기포화가 존재하는 시스템의 제어입력을 특정 크기 이내로 제한하는 조건을 구하고 이를 이용하여 구동기포화 시스템의 성능보장 제어기법을 제안하였다. Hu 등[6]은 기존의 Circle 정리를 개선하여 기존 방법들보다 덜 보수적인 구동기포화 시스템 안정성 조건을 구하였다. 이 방법의 핵심은 포화함수를 볼록결합(convex combination) 형태로 표현하기 위한 조건과 이를 이용한 Lyapunov 이론 기반의 안정성 조건에 있다. 이 방법이 제어입력의 포화를 허용하기 때문에 이 방법을 이용하면 포화한계 내의 선형영역으로 제어입력을 제한하는 방법[5] 보다 개선된 성능을 얻을 수 있다. 최근 이

방법을 이용한 구동기포화 시스템 제어에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다[6-9].

한편, 시스템 불확실성 및 외란에 강인한 제어시스템 설계에 관한 연구가 많이 이루어졌다. 그 동안 강인제어에 관한 연구는 최악의 상황에서도 시스템의 안정성을 보장하는 제어시스템 설계에 초점이 맞추어졌다. 그러나, 실제 제어시스템을 설계할 때는 강인 안정성뿐 아니라 시스템 응답 성능도 중요하다. 시스템 응답 성능을 고려하기 위해, H_2 -노름을 성능지수로 하는 H_2 제어에 관한 연구가 많이 이루어졌다[10-15]. 특히, 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI) 기법[16]이 개발된 이후, H_2 제어에 관한 관심이 더욱 높아져 LMI 기법에 의한 H_2 제어에 관한 결과가 최근 많이 발표되고 있다[11-14]. 그러나, 불확실한 시스템에 구동기포화 및 외란이 있는 경우의 H_2 제어문제에 관한 연구 결과는 드물다.

이 논문은 노음한계를 갖는 불확실한 시스템에 구동기포화 및 외란이 있는 경우의 H_2 제어문제를 고려한다. H_2 제어문제를 풀기 위해, LMI 기법을 이용하여 대상 시스템을 강인하게 안정화하는 조건을 구한다. 또한, 에너지가 유한한 외란이 인가될 때 시스템 상태궤적이 유한하기 위한 조건을 구한다. 참고문헌 [17]에 의하면, 외란의 크기에 제한이 없는 시스템에 대한 유계한 단일 불변집합은 존재하지 않는다. 이러한 점을 고려하여 이 논문에서는 Fang 등[17]의 방법과 같이 두 개의 타원집합을 이용하여 에너지가 유한한 외란 조건하에서 상태궤적의 유한성을 보장하는 조건을 구한다. 즉, 내부 타원집합과 외부 타원집합을 정의하여 내부 타원집합에서 시작하는 모든 상태궤적이 항상 외부 타원집합 안에 머물도록 하는 조건을 구한다. 이 결과를 이용하여 일반화된 H_2 제어성능을 보장하는 제어기 설계 조건을 구한다. 보장되는 H_2 제어성능은 H_2 -노름의 상한 값으로 주어지는데, 최적의 제어성능을 얻기 위해 제안된 조건을 볼록 최적화(convex optimization) 문제로 바꾸어 제어시스템의 H_2 -노름 상한 값을 최소화하는 상태궤환 포화제어를 설계한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서 불확실한 구동기포화 시스템에 대한 H_2 -제어 문제를 설정한다. III절에서는 시스템의 안정성 H_2 성능을 분석하고, IV절에서는 LMI 기법을 이용하여 구동기포화 시스템을 위한 상태궤환형 H_2 제어기의

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 1. 15., 채택확정 : 2007. 8. 14.

최현철, 좌동경, 홍석교 : 아주대학교 전자공학부

(begun@ajou.ac.kr/dkchwa@ajou.ac.kr/skhong@ajou.ac.kr)

※ 본 연구는 BK21 연구지원 및 한국과학재단 특장기초연구 R01-2006-000-11373-0 지원으로 수행되었음.

설계 조건과 최적의 H_2 -노움을 얻기 위한 방법을 제안한다. V절에서는 수치예제를 통해 제안된 방법의 유용성을 보이고, VI절에서 이 논문의 결론을 맺는다.

II. 문제 설정 및 예비 결과

이 논문에서 고려할 시스템은 불확실한 시스템으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_\omega\omega(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ 는 상태변수이고, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ 는 제어입력변수이다. $\omega(t) \in L_2^r[0, \infty)$ 는 외란을 나타내는 외부입력변수이고, $z(t) \in \mathfrak{R}^p$ 는 제어성능 지표를 나타내는 제어출력변수이다. $A(t) = A_0 + F\Theta(t)E_1$ 와 $B = B_0 + F\Theta(t)E_2$ 는 시변 불확실성을 포함하는 시스템 행렬로서 모두 적절한 차수를 갖는다. A_0, B_0, F, E_1, E_2 는 모두 알려진 상수 행렬이고, $\Theta(t)$ 는 미지의 불확실성을 표현하는 시변 행렬로서 $\|\Theta(t)\| \leq 1$ 을 만족한다고 가정한다. 또한, 시스템 행렬 쌍 $(A(t), B(t))$ 는 안정화가 가능하다고 가정한다.

이 시스템에 인가될 제어입력으로 다음과 같은 상태폐환형 포화입력을 고려한다.

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)) \quad (2)$$

여기서, $\text{sat}(\cdot)$ 는 표준적인 포화함수이고 $u(t)$ 벡터의 각 요소는 다음과 같이 표현된다.

$$u_i(t) = \text{sat}(K_i x(t)) = \begin{cases} -1 & \text{if } K_i x(t) < -1 \\ K_i x(t) & \text{if } -1 \leq K_i x(t) \leq 1 \\ 1 & \text{if } K_i x(t) > 1 \end{cases}$$

이 식에서 K_i 는 행렬 K 의 i -행 벡터이다. 간결성을 위해 단위 값인 ± 1 로 포화한계를 규정하였다. 다른 값으로 포화한계를 규정하는 경우, 다음과 같이 새로운 입력 행렬을 정의하여 초과된 한계 값을 흡수하게 한다[9].

$$\hat{B}_0 = B_0 U, \quad \hat{E}_2 = E_2 U, \quad \hat{u}(t) = U^{-1} u(t)$$

여기서, $U = \text{diag}\{u_{\max,i}\}$ 이고 $u_{\max,i}$ 는 i -번째 입력의 포화한계 값으로 $|u_i(t)| \leq u_{\max,i}$ 를 만족한다. 그러면, 위의 제어입력을 갖는 페루프 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + F\Theta E_1)x + (B_0 + F\Theta E_2) \text{sat}(Kx) + B_\omega\omega \\ z &= Cx + D \text{sat}(Kx) \end{aligned} \quad (3)$$

이 논문에서는 시스템 (3)의 일반화된 H_2 성능을 보장하는 상태폐환 제어기를 설계하고자 한다. 즉, 주어진 스칼라 $\beta > 0$ 에 대해, (4)와 같이 정의된 일반화된 H_2 -노움[14]을 스칼라 β 보다 항상 작게 하는 상태폐환 제어기를 설계하고자 한다.

$$\|G\|_2 := \sup_{T_f \in (0, \infty)} \{\|z(T_f)\| : x(0) = 0, \int_0^{T_f} \omega(t)^T \omega(t) dt \leq 1\} \quad (4)$$

여기서, T_f 는 최종시간을 의미한다.

Hu등[7]은 비선형 포화함수를 블록결합 형태로 만드는 방법을 통해 구동기포화 시스템의 안정성을 분석하고 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 이 논문의 목적은 Hu등[7]과 같이 비선형 포화함수를 블록결합 형태로 만드는 방법을 통해 구동기포화 시스템 (3)의 H_2 성능을 보장하는 상태폐환 제어기를 설계하는 것이다. 이를 위해, 다음과 같이 Hu등[7]의 결과를 소개한다.

다음과 같이 Lyapunov 준위를 나타내는 타원체 집합 $\mathcal{E}(P, \gamma)$ 와 포화 없이 동작할 수 있는 영역을 나타내는 다면체 집합 $\mathcal{L}(H)$ 을 고려한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(P, \gamma) &= \{x \in \mathfrak{R}^n : x^T P x \leq \gamma, \gamma > 0\} \\ \mathcal{L}(H) &= \{x \in \mathfrak{R}^n : |h_i x| \leq 1, i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

여기서, P 는 양한정행렬이고 h_i 는 $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 의 i -행 벡터이다.

대각요소로 1이나 0을 갖는 $m \times m$ 대각행렬 Λ_i 와 $\Lambda_i^- = I - \Lambda_i$ 를 정의하자. 예를 들어, $m = 2$ 인 경우, Λ_i 는 다음의 4가지 행렬 중 하나가 된다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

또한, Λ_i^- 도 이 4개의 행렬 중 하나가 된다. 그러면, 비선형적인 포화함수를 다음과 같이 블록결합 형태로 표현할 수 있다.

보조정리 1 [7]: Co를 블록다각형 집합(convex hull)을 나타내는 연산자라 하자. v_i 를 벡터 v 의 i -번째 원소라 할 때, 모든 실수 벡터 $u \in \mathfrak{R}^m$ 와 $|v_i| \leq 1 (i = 1, \dots, m)$ 을 만족하는 벡터 $v \in \mathfrak{R}^m$ 에 대하여 다음 조건이 성립한다.

$$\text{sat}(u) \in \text{Co}\{\Lambda_i u + \Lambda_i^- v, i = 1, \dots, 2^m\} \quad (5)$$

이 조건은 다음 등식을 만족하는 $\mu_i \geq 0 (i = 1, \dots, 2^m)$ 가 존재한다는 것을 의미한다.

$$\text{sat}(u) = \sum_{i=1}^{2^m} \mu_i (\Lambda_i u + \Lambda_i^- v), \quad \sum_{i=1}^{2^m} \mu_i = 1$$

주 1: 보조정리 1은 상태폐적 $x(t)$ 가 $i = 1, \dots, m$ 에 대해 $|h_i x(t)| \leq 1$ 을 만족하면 $\text{sat}(Kx(t))$ 을 블록결합 형태로 표현할 수 있다는 것을 의미한다. 따라서, $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ 가 만족하면 $i = 1, \dots, 2^m$ 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\text{sat}(Kx) = \sum_{i=1}^{2^m} \mu_i (\Lambda_i K + \Lambda_i^- H)x, \quad \sum_{i=1}^{2^m} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \quad (6)$$

III. 시스템 안정성 및 H_2 성능

정리 1: 스칼라 $\gamma > 0$ 와 상태폐환 행렬 K 가 주어졌다고

가정하자. 또한, 외란 $\omega(t)$ 가 $\int_0^{T_f} \omega(t)^T \omega(t) dt \leq 1$ 을 만족한다고 가정하자. 그러면, $x(0) \in \mathcal{E}(P, \gamma)$ 를 만족하는 $x(t)$ 에 대해 다음 부등식

$$2x^T P(Ax + B \text{sat}(Kx)) + x^T P B_\omega B_\omega^T P x < 0, x \neq 0 \quad (7)$$

을 만족하는 양한정 행렬 $P > 0$ 가 존재하면, 시스템 (3)의 상태레적 $x(t)$ 는 항상 $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1+\gamma)$ 를 만족한다. $\omega(t) = 0$ 일 경우, 부등식 (7)을 만족하는 양한정 행렬 $P > 0$ 가 존재하면 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

증명: Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V(x) = x^T P x, P > 0$$

시스템 (3)의 궤적에 따라 위 함수를 시간에 대해 미분하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P(Ax + B \text{sat}(Kx) + B_\omega \omega) \\ &= 2x^T P(Ax + B \text{sat}(Kx)) + 2x^T P B_\omega \omega \\ &\leq 2x^T P(Ax + B \text{sat}(Kx)) + x^T P B_\omega B_\omega^T P x + \omega^T \omega \end{aligned}$$

여기서, 마지막 부등식은 항부등식 $2a^T b \leq a^T a + b^T b$ 으로부터 얻었다. 이로부터, 부등식 (7)을 만족하는 $P > 0$ 가 존재하면

$$\dot{V} < \omega^T \omega \quad (8)$$

가 성립함을 알 수 있다. ($x=0$ 일 때, $\dot{V} \leq \omega^T \omega$ 가 성립된다.) (8)의 양변을 0부터 t 까지 적분하면

$$V(x(t)) < V(x(0)) + \int_0^t \omega(\tau)^T \omega(\tau) d\tau$$

의 관계를 얻을 수 있고, $t \leq T_f$ 와 $\int_0^{T_f} \omega(t)^T \omega(t) dt \leq 1$ 조건 으로부터 $V(x(t)) < V(x(0)) + 1$ 의 관계를 얻을 수 있다. $x(0) \in \mathcal{E}(P, \gamma)$ 은 $V(x(0)) \leq \gamma$ 를 의미하므로 이로부터 $V(x(t)) < 1 + \gamma$ 가 성립함을 알 수 있다. 이는 모든 $x(t)$ 가 $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1+\gamma)$ 을 만족함을 의미한다.

$\omega = 0$ 일 경우, (8)로부터 $\dot{V} < 0, x \neq 0$ 을 얻을 수 있고 이는 시스템 (3)이 점근적으로 안정함을 의미한다. ■

보조정리 1 및 주 1에 의하면, $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ 가 만족하면 시스템 (3)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_\omega \omega(t) \\ z(t) &= C_c x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_c &= (A_0 + F \Theta E_1) + (B_0 + F \Theta E_2) \left(\sum_{i=1}^{2^n} \mu_i (\Lambda_i K + \Lambda_i^- H) \right) \\ C_c &= C + D \left(\sum_{i=1}^{2^n} \mu_i (\Lambda_i K + \Lambda_i^- H) \right), \sum_{i=1}^{2^n} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0. \end{aligned}$$

이로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 2: 스칼라 $\beta > 0, \gamma > 0$ 와 행렬 K, H 가 주어졌다

고 가정하자. 또한, 외란 $\omega(t)$ 가 $\int_0^{T_f} \omega(t)^T \omega(t) dt \leq 1$ 을 만족한다고 가정하자. 다음 부등식

$$\begin{bmatrix} \gamma & x^T(0) \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 1+\gamma & (1+\gamma)h_i X \\ (1+\gamma)X h_i^T & X \end{bmatrix} \geq 0, i=1, \dots, m \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} X & X C_c^T \\ C_c X & \beta^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

$$A_c X + X A_c^T + B_\omega B_\omega^T < 0 \quad (13)$$

을 만족하는 양한정 행렬 $X > 0$ 가 존재하면, 시스템 (3)의 상태레적 초기값 $x(0)$ 는 $x(0) \in \mathcal{E}(X^{-1}, \gamma)$ 를 만족하고 $x(t)$ 는 항상 $x(t) \in \mathcal{E}(X^{-1}, 1+\gamma) \subset \mathcal{L}(H)$ 를 만족한다. 또한, $\omega(t)$ 로부터 $z(t)$ 의 일반화된 H_2 -노움은 $\|G\|_2 < \beta$ 을 만족한다. 여기서, h_i 는 행렬 H 의 i -행 벡터이다. $\omega(t) = 0$ 일 경우, 부등식 (10), (11), (12)를 만족하는 양한정 행렬 $X > 0$ 가 존재하면 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

증명: (10)은 Schur 보수법(Schur complements)[16]에 의해 $x^T(0)X^{-1}x(0) \leq \gamma$ 과 동치이다. 이는 곧 $x(0) \in \mathcal{E}(X^{-1}, \gamma)$ 을 의미한다.

(11)에 $\gamma^{-1} > 0$ 을 곱하고 Schur 보수법을 적용하면 $h_i(\gamma X)h_i^T \leq 1$ 를 얻을 수 있다. 한편, $x^T X^{-1}x \leq \gamma$ 는 $0 \leq x x^T \leq \gamma X$ 를 의미하고 $|h_i x| \leq 1$ 을 $h_i x x^T h_i^T \leq 1$ 로 대체할 수 있으므로 $|h_i x| \leq 1$ 은 $h_i((1+\gamma)X)h_i^T \leq 1$ 로 대체할 수 있다. 따라서, (11)이 만족한다는 것은 모든 $x \in \mathcal{E}(X^{-1}, 1+\gamma)$ 에 대해 $|h_i x| \leq 1$ 조건이 만족한다는 것을 의미하고, 이는 곧 $x \in \mathcal{E}(X^{-1}, 1+\gamma) \subset \mathcal{L}(H)$ 조건이 만족한다는 것을 의미한다.

(11)에 의해 $x \in \mathcal{L}(H)$ 조건이 만족하므로 시스템 (3)은 (9)로 표현될 수 있다. Lyapunov 함수를

$$V(x) = x^T P x, P > 0$$

으로 정의하고 (9)의 궤적에 따라 시간에 대해 미분하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{V} \leq x^T (A_c^T P + P A_c + P B_\omega B_\omega^T P) x + \omega^T \omega$$

(13)의 양변에 $X^{-1} = P$ 를 각각 곱하여도 그 부등식의 해는 변함없다. 따라서, (13)이 만족하면 $\dot{V} < \omega^T \omega$ ($x \neq 0$)이 성립하고 $\omega = 0$ 일 경우 $\dot{V} < 0$ 이 되어 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

(12)는 Schur 보수법에 의해 $X C_c^T C_c X - \beta^2 X < 0$ 와 동치이다. $X^{-1} = P$ 의 관계에 의해 이는 $C_c^T C_c - \beta^2 P < 0$ 을 의미하고 이는 곧 $z^T z - \beta^2 V < 0$ 을 의미한다. (13)에 의해 시스템이 점근적으로 안정하므로 (12)가 만족하면 일반화된 H_2 -노움은 $\|G\|_2 < \beta$ 을 만족한다. ■

IV. H_2 제어기 설계

정리 2는 제어기가 주어진 경우에 대한 결과이다. 다음 결과는 정리 2에 기반하여, $\|G\|_2 < \beta$ 을 만족하는 상태례환형 H_2 포화제어기의 설계조건을 제시한다.

정리 3: 외란 $\omega(t)$ 가 $\int_0^T \omega(t)^T \omega(t) dt \leq 1$ 을 만족한다고 가정하자. 주어진 스칼라 $\beta > 0, \gamma > 0$ 에 대해 부등식 (10)과 다음 부등식

$$\begin{bmatrix} 1+\gamma & (1+\gamma)z_i^T \\ (1+\gamma)z_i^T & X \end{bmatrix} \geq 0, i=1, \dots, m \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} X & * \\ CX + D\Lambda_i Y + D\Lambda_i^- Z & \beta^2 I \end{bmatrix} > 0, i=1, \dots, 2^m \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & * & * \\ E_1 X + E_2 \Lambda_i Y + E_2 \Lambda_i^- Z & -cI & * \\ B_\omega^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, i=1, \dots, 2^m \quad (16)$$

을 만족하는 행렬 $X > 0, Y, Z$ 및 상수 $c \geq 0$ 가 존재하면, 상태례환형 포화제어입력 $u(t) = \text{sat}(YX^{-1}x(t))$ 를 적용한, 초기값 $x(0) \in \mathcal{E}(X^{-1}, \gamma)$ 인 시스템 (3)의 상태례적은 항상 $x(t) \in \mathcal{E}(X^{-1}, 1+\gamma) \subset \mathcal{L}(H)$ 를 만족하고 $\omega(t)$ 로부터 $z(t)$ 의 일 반화된 H_2 -노움은 $\|G\|_2 < \beta$ 을 만족한다. 여기서,

$$\begin{aligned} \Xi_{11} = & A_0 X + X A_0^T + B_0 \Lambda_i Y + Y^T \Lambda_i B_0^T + B_0 \Lambda_i^- Z \\ & + Z^T \Lambda_i^- B_0^T + c F F^T \end{aligned}$$

이고, *는 대칭성으로 유추되는 전치된 행렬 요소이며, z_i 는 Z 의 i -행 벡터이다.

증명: (13)을 풀어 쓰면 다음과 같은 행렬 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi = & \{(A_0 + F\Theta E_1) + (B_0 + F\Theta E_2) \\ & \times (\sum_{i=1}^{2^m} \mu_i (\Lambda_i K + \Lambda_i^- H))\} X + X \{(A_0 + F\Theta E_1) \\ & + (B_0 + F\Theta E_2) (\sum_{i=1}^{2^m} \mu_i (\Lambda_i K + \Lambda_i^- H))\}^T + B_\omega B_\omega^T < 0 \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{2^m} \mu_i = 1 (\mu_i \geq 0, i=1, \dots, 2^m)$ 의 조건을 이용하여 위 식을 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2^m} \mu_i \Omega_i < 0$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Omega_i = & A_0 X + X A_0^T + F\Theta E_1 X + X E_1^T \Theta^T F^T + B_0 \Lambda_i K X \\ & + X K^T \Lambda_i B_0^T + B_0 \Lambda_i^- H X + X H^T \Lambda_i^- B_0^T \\ & + F\Theta E_2 \Lambda_i K X + X K^T \Lambda_i E_2^T \Theta^T F^T + F\Theta E_2 \Lambda_i^- H X \\ & + X H^T \Lambda_i^- E_2^T \Theta^T F^T + B_\omega B_\omega^T \end{aligned}$$

이다. $Y = KX, Z = HX$ 로 정의하고, 부등식 $\Omega_i < 0$ 에 S-절차(S-procedure)[16] 및 Schur 보수법을 적용하여 그 결과를 정리하면 변수 $X = X^T > 0, Y, Z, c \geq 0$ 에 대한 LMI (16)을 얻

을 수 있다. 또한, $Z = HX$ 로 정의되므로 z_i 를 Z 의 i -행 벡터로 정의하면 각각 (11)과 (14)가 동치이고 (12)와 (15)가 동치임을 알 수 있다. ■

주 2: 정리 3의 식에서 $Y = Z$ 로 놓으면 (15)와 (16)은 각각 다음과 같이 축약된다.

$$\begin{bmatrix} X & * \\ CX + DY & \beta^2 I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_0 X + X A_0 + B_0 Y + Y^T B_0^T + c F F^T & * & * \\ E_1 X + E_2 Y & -cI & * \\ B_\omega^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

위의 두 식은 제어입력이 포화한계를 넘지 않도록 제한하는 경우의 H_2 제어기 설계 조건, 즉 제어입력이 선형영역에서 동작하는 경우의 H_2 제어기 설계조건을 나타낸다. 이 조건이 (15), (16)보다 간단하고 풀어야 할 식의 수가 적지만 제어입력을 선형영역으로 제한하기 때문에 (15), (16)보다 더 보수적인 결과를 가져온다[8].

최적의 제어성능을 얻기 위해 H_2 -노움의 상한 값을 최소화할 필요가 있다. $\|G\|_2 < \beta$ 로부터 β 가 그 상한 값을 알 수 있다. 따라서, 다음 문제

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \beta^2 \\ \text{subject to } & \text{Eqs. (10), (14), (15), and (16)} \end{aligned} \quad (17)$$

를 통해 최적화된 제어기를 얻을 수 있다. 즉, 주어진 $x(0)$ 및 $\gamma > 0$ 에 대해, 문제 (17)을 만족하는 $\beta > 0, c \geq 0, X > 0, Y, Z$ 를 통해 얻은 $u(t) = \text{sat}(YX^{-1}x(t))$ 가 최적화된 상태례환형 포화제어입력이다. 문제 (17)의 조건들이 모두 LMI로 표현되므로 블록 최적화 문제로 볼 수 있으며, 따라서 전역적 해를 갖는다. 또한, 이 최적화 문제는 표준 LMI 문제인 특성값 문제(eigenvalue problem)로 볼 수 있으며 MATLAB LMI Control Toolbox[18]의 'mincx' 함수 등을 이용하여 풀 수 있다.

V. 수치 예제

제안된 방법의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 수치 예를 제시한다. 주어진 문제는 MATLAB LMI Control Toolbox의 LMI solver를 이용하여 풀었다. LMI solver를 이용하여 문제 (17)을 풀 때, (14)가 Z 대신 Z 의 i -행 벡터 z_i 를 결정변수로 갖는 점을 고려하여 Z 를 포함한 모든 식을 z_i 에 관한 식으로 변형하였다.

제어 대상 플랜트는 참고문헌 [5]에 사용된 헬리콥터 수직 운동 모델의 파라미터 값을 변경하여 얻은 것으로서 개루프 상태에서 불안정한 시스템이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (A_0 + F\Theta E_1)x + (B_0 + F\Theta E_2)u + B_\omega \omega \\ z = & Cx + Du \\ u = & \text{sat}(Kx), x(0) = [5, 5, 5, 5]^T \end{aligned}$$

시스템 파라미터 값은 다음과 같이 주어진다.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4.422 & 1.711 \\ 30.447 & -75.922 \\ -55.2 & 49.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0673 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 1 \ 1 \ 1], D = [10 \ 10]$$

$$\Theta = \text{diag}\{r_1, r_2, r_3\}$$

여기서, r_i 는 $|r_i| \leq 1 (i=1, \dots, 3)$ 을 만족하고 주기 1초인 펄스 함수를 사용하였다.

이 예제에서는 LQR 기법과 이 논문에서 제안된 기법의 성능을 비교한다. 그림 1은 최적화 문제 (17)을 풀어 γ 의 변화에 대한 최소화된 $\|G\|_2$ 의 상한 값 변화를 나타낸 것이다.

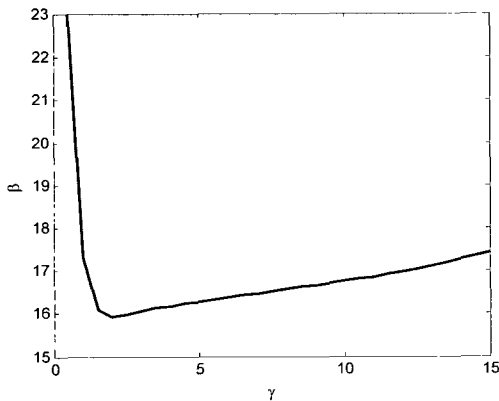


그림 1. γ 에 대한 최소화된 β .
Fig. 1. Minimized β with respect to γ .

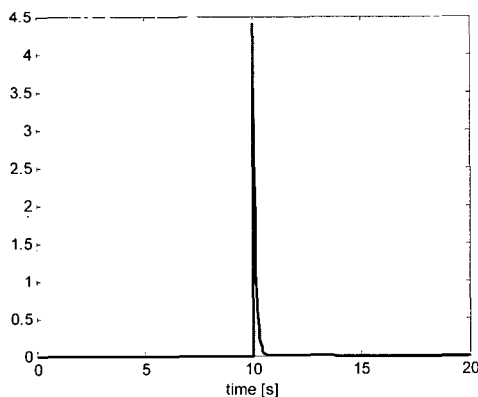


그림 2. 외란입력.
Fig. 2. Disturbance input.

이로부터, $\gamma=2$ 일 때의 $\beta=15.9378$ 가 최적의 값을 알 수 있다. 이 값을 이용하여 제안된 제어기의 이득을 구하면 다음과 같다.

$$K_{LMI} = \begin{bmatrix} -0.1030 & -0.0136 & 0.0337 & 0.0901 \\ 0.1214 & 0.0355 & -0.0011 & -0.1626 \end{bmatrix}$$

성능 비교를 위해 사용된 LQR 제어기의 이득은 가중행렬 $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, $R = \text{diag}(100, 100)$ 을 이용하여 구하였으며 그 값은 다음과 같다.

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} -0.0926 & 0.0060 & 0.0940 & 0.1334 \\ 0.0061 & 0.0826 & -0.0278 & -0.0835 \end{bmatrix}$$

그림 2는 시스템에 인가되는 외란을 나타낸다. 10초 시점에서 크기 4.4의 충격신호를 인가하였다.

그림 3, 4는 LQR을 이용한 경우의 시스템 응답 및 제어입력을 나타낸다. 그림 5, 6은 제안된 기법을 이용한 경우의 시스템 응답 및 제어입력을 나타낸다. 이 결과를 보면, 두 제어 기법의 성능 차이가 크지 않다. 그러나, 제안된 제어기법의 경우, 외란 인가 후 원래의 상태로 돌아오는 데 드는 시간이 LQR의 경우보다 짧다. 또한, LQR을 적용하면 시스템 파라미터 변화에 의한 진동현상이 두드러지는데, 제안된 제어기법을 적용하면 그러한 진동현상이 거의 나타나지 않는다.

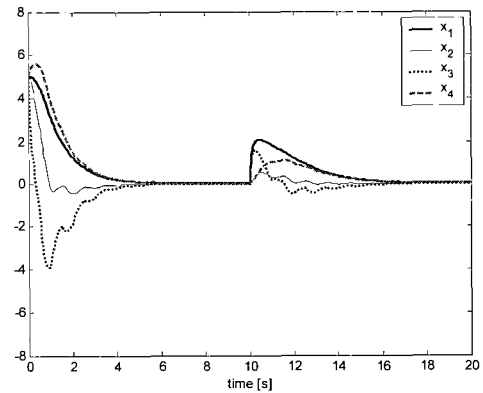


그림 3. 시스템 상태응답: LQR.
Fig. 3. State responses: LQR.

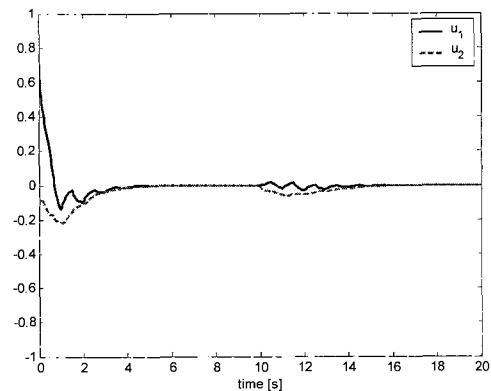


그림 4. 제어입력: LQR.
Fig. 4. Control inputs: LQR.

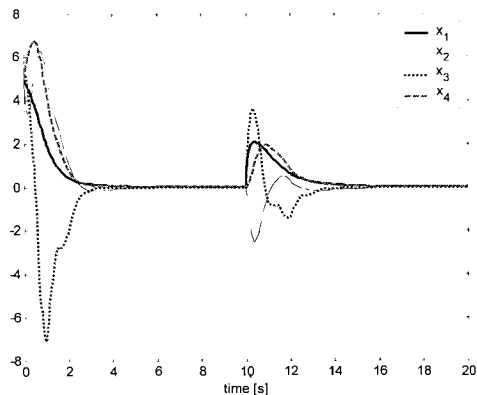


그림 5. 시스템 상태응답: 제안된 기법.

Fig. 5. State responses: proposed method.

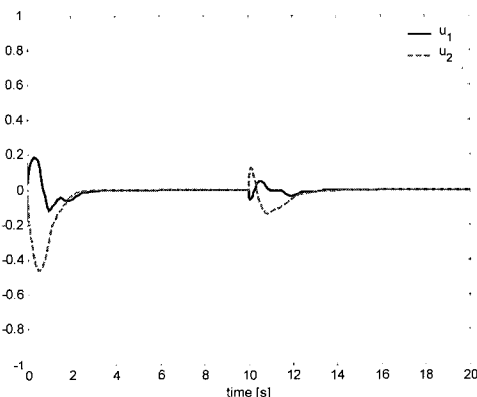


그림 6. 제어입력: 제안된 기법.

Fig. 6. Control inputs: proposed method.

VI. 결론

이 논문은 노움한계를 갖는 불확실한 시스템에 구동기포화 및 외란이 있는 경우의 H_2 제어문제를 고려하였다. LMI 기법을 이용하여 대상 시스템을 강인하게 안정화하면서 일 반화된 H_2 제어성능을 보장하는 제어기 설계 조건을 구하였다. 최적의 제어성능을 얻기 위해, 제안된 조건을 볼록 최적화 문제로 바꾸어 제어시스템의 H_2 -노움 상한 값을 최소화하는 상태궤환형 포화제어기를 설계하였다. 수치예제를 통해 제안된 방법의 유용성을 보였다.

참고문헌

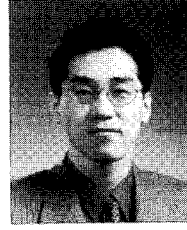
[1] J. M. Gomes da Silva Jr., C. Paim, and E. B. Castelan, "LMI-based framework for the synthesis of saturating control laws," *Revista Controle & Automação*, vol. 12, no. 3, pp. 171-177, 2001.
 [2] H. Hindi and S. Boyd, "Analysis of linear systems with saturation using convex optimization," *Proc. IEEE Conf.*

Decision and Control (CDC), pp. 903-908, 1998.
 [3] J.-H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 202-207, 1994.
 [4] T. Nguyen and F. Jabbari, "Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation," *Automatica*, vol. 36, pp. 1339-1346, 2000.
 [5] L. Yu, Q.-L. Han, and M.-X. Sun, "Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems with input constraints," *Int. J. Control, Automation, and Systems*, vol. 3, no. 3, pp. 397-402, 2005.
 [6] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, pp. 351-359, 2002.
 [7] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 45, pp. 97-112, 2002.
 [8] Y. Y. Cao, Z. Lin, and Y. Shamash, "Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 46, pp. 137-151, 2002.
 [9] H.-C. Choi, S. Jang, D. Chwa, and S.-K. Hong, "Guaranteed cost control of uncertain systems subject to actuator saturation," *Proc. SICE-ICASE Int. Joint Conference*, pp. 994-999, 2006.
 [10] A. A. Stoorvogel, "The robust H_2 control problem: a worst-case design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 9, 1993.
 [11] C. E. de Souza, A. Trofino, and J. de Oliveira, "Parametric Lyapunov function approach to H_2 analysis and control of linear parameter-dependent systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 150, no. 5, pp. 501-508, 2003.
 [12] R. Yang, L. Lu, and L. Xie, "Robust H_2 and H_∞ control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback," *Int. J. Control*, vol. 78, no. 16, pp. 1285-1294, 2005.
 [13] D. Banjerdpongchai and J. P. How, "Parametric robust H_2 control design with generalized multipliers via LMI synthesis," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 3, pp. 481-503, 1998.
 [14] G. Feng and D. Sun, "Generalized H_2 controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions," *IEEE Trans. Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 12, pp. 1843-1850, 2002.
 [15] A. Saberi, P. Sannuti, and B. M. Chen, *H_2 Optimal Control*, Prentice Hall International, London, 1995.
 [16] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
 [17] H. Fang, Z. Lin, and T. Hu, "Analysis of linear systems in the presence of actuator saturation and L_2 -disturbances," *Automatica*, vol. 40, pp. 1229-1238, 2004.
 [18] P. Ghahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chillali, *MATLAB LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks, Natick, 1995.



최 현 철

1995년 아주대학교 제어계측공학과 졸업. 1997년 동 대학원 석사. 2006년 동 대학원 박사. 관심분야는 강인제어, 최적제어, 로봇제어 응용.



좌 동 경

1995년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 1997년 동 대학원 석사. 2001년 동 대학원 박사. 2005년~현재 아주대학교 전자공학부 조교수. 관심분야는 비선형 적응제어, 로봇 및 미사일 제어 응용.



홍 석 교

1971년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1976년~현재 아주대학교 전자공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 컴퓨터 응용, 지능제어.