

유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성에 미치는 끝단질량의 영향

Influence of Tip Mass on Stability of a Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid

손인수* · 윤한익* · 김동진**

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Dong-Jin Kim

(2007년 8월 6일 접수 ; 2007년 9월 17일 심사완료)

Key Words : Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체유동 회전 외팔 파이프), Stability (안정성), Critical Flow Velocity(임계유속), Tip Mass(끝단질량)

ABSTRACT

In this paper the vibration system is consisted of a rotating cantilever pipe conveying fluid and tip mass. The equation of motion is derived by using the Lagrange's equation. The system of pipe conveying fluid becomes unstable by flutter. Therefore, the influence of a rotating angular velocity, mass ratio, the velocity of fluid flow and tip mass on the stability of a cantilever pipe by the numerical method are studied. The critical flow velocity for flutter is proportional to the angular velocity and tip mass of the cantilever pipe. Also, the critical flow velocity and stability maps of the pipe system are obtained by changing the mass ratios.

1. 서 론

스프링 쿨러는 이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 대표적 형태이며, 파이프의 끝단에 집중 접선 중동력으로 작용하는 비점성 유체의 분사력은 미사일의 추진력과 같이 탄성계의 동특성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 또 회전하지 않는 파이프 구조물의 동적 안정성 및 진동특성에 미치는 유체유체의 영향에 관한 연구는 선형 및 비선형 해석을 통하여 지금까지도 활발히 진행되고 있다^(1~3). 이러한 연구들의 대부분은 Benjamin⁽⁴⁾이 제시한 플러터(flutter) 불안정을 유발하는 임계유속에 깊은 관심을 두고 있다. 이러한 안정성 및 임계유속에 관한 연구는 비회전 구조물에 비하여 회전하는 계에 관한 연구는 그리

활발하지 않은 실정이다. 회전 구조물에 관련된 모델링의 종류는 크게 3가지로 분류할 수 있다. 그 첫 번째는 직교 변형변수를 쓰는 선형 모델링이며, 두 번째는 비선형 모델링, 그리고 마지막으로 복합 변형변수를 쓰는 모델링 방법이 있다⁽⁵⁾. 복합 변형변수 모델링이 선형 모델링과는 달리 비선형 모델링과 동등하게 회전 구조물의 정확한 동특성을 예측하게 하는 동시에 선형 모델링으로서의 효율성을 유지할 수 있다는 결과를 보여주었다^(5,6). 회전운동을 하는 외팔보에 대한 연구를 살펴보면 끝단질량과 그 관성모멘트를 고려한 회전 외팔보의 횡진동 특성에 관한 연구⁽⁷⁾, 회전 유체튜브의 동특성 해석⁽⁸⁾, 그리고 Fung 등^(9,10) 가이드 라인을 갖는 유연한 회전 곡선 보의 고유진동수에 미치는 끝단질량의 영향에 관한 연구 등 광범위하게 연구되어 지고 있다. 최근 회전하는 외팔보에 크랙이 존재하는 경우 크랙이 회전 외팔보의 동특성에 미치는 영향에 대한 연구결과도 발표되었다⁽¹¹⁾.

하지만 위의 많은 연구들은 회전운동을 하는 외팔

† 교신저자: 정희원, 동의대학교 기계공학과
E-mail : isson92@deu.ac.kr
Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

* 정희원, 동의대학교 기계공학과
** 동의대학교 대학원 기계공학과

보의 동적특성에 관한 내용에 치중되어 있고 유속 및 회전 각속도에 의한 계의 안정성 평가에 대한 연구 결과들은 드문 실정이다. 특히 끝단질량이 회전 구조물의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구는 더욱 그러하다.

따라서 이 연구에서는 끝단질량을 가진 회전 외팔 파이프의 안정성 해석을 위하여, 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 종동력이 작용하고 그 끝단에 끝단 질량이 부착된 계를 고려하였다. 계의 운동방정식은 가정모드방법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치 해석 하였다. 수치해석을 통하여 이송유체의 속도와 파이프의 회전 각속도, 질량비, 그리고 끝단질량의 크기에 따른 파이프의 동적특성 및 이들 각 요소가 회전 외팔 파이프의 동적 안정성에 미치는 영향에 대하여 수치해석 하였다.

2. 이 론

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경 R 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔 파이프를 모델링한 것이다. 계의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 파이프는 균질하고 등방성이라 가정하였다. Fig. 1에서 x 는 외팔 파이프의 고정점 O 로부터 변형전의 임의의 질점 P_0 까지의 거리를, s 는 변형전 임의의 질점 P_0 에서 변형후의 질점 P 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를, w 는 임의의 질점의 탄성변위 벡터를 나타낸다. 또 U 와 m_p 는 각각 유체의 속도와 끝단질량을 의미한다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 탄성변형은 다음과 같다.

$$s = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서 $\phi_{1i}(x), \phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향과 횡방향 모드함수, $q_{1i}(t), q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표를, 그리고 n 은 일반화 좌표의 수를 의미한다. 모드함수 $\phi_{1i}(x), \phi_{2i}(x)$ 는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 자유단인 외팔보의 경계조건을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \quad i = 1, 2, 3... \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2i}(x) = & \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ & + \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 L 은 파이프의 전체 길이이다.

2.1 파이프의 에너지식

변형에 따른 파이프의 임의의 질점 P 점의 속도는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$v_P = v_O + v_{P/A} + \omega \times (x + w) \quad (5)$$

여기서

$$v_O = r\omega j, \quad v_{P/A} = \dot{w}_1 i + \dot{w}_2 j \quad (6)$$

$$x = x i, \quad \omega = \omega k, \quad w = w_1 i + w_2 j$$

이다. 식 (6)에서 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분을 나타내고, w_1 대신 축방향 변위 s 를 사용하기 위하여 w_1 과 s 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s \approx w_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

따라서 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_{pipe} = \frac{1}{2} m \int_0^L (v_P \cdot v_P) dx + \frac{1}{2} m_p (v_P \cdot v_P)_{x=L} \quad (8)$$

$$V_{pipe} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA_p \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (9)$$

여기서 EI 는 외팔 파이프의 굽힘 강성계수, A_p 는 파이프의 단면적, m 은 파이프의 단위 길이당 질량

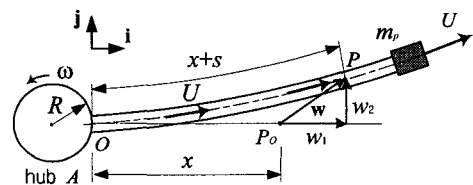


Fig. 1 Original configuration of rotating pipe

을 나타낸다.

2.2 이송유체의 일과 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도가 U 이므로, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도의 수직성분과 수평성분을 이용하여 유속을 구하면 다음과 같다.

$$v_f = \left[\dot{w}_1 - w_2 \omega + U \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 \right\} \right]^2 + \left[(R\omega + \dot{w}_2 + \omega x + \omega w_1) + U \frac{\partial w_2}{\partial x} \right]^2 \frac{1}{2} \quad (10)$$

따라서 이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{fluid} = \frac{1}{2} M \int_0^L (v_f v_f) dx \quad (11)$$

여기서 M 은 유체의 단위 길이당 질량이다.

점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은 파이프의 끝단에 작용하는 집중 접선 종동력이 된다. 이러한 접선 종동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분되며 각각 다음과 같다.

$$W_c = \frac{1}{2} M U^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (12)$$

$$\delta W_{nc} = - M U \left(U \frac{\partial w_2}{\partial x} + \dot{w}_2 \right) \delta w_2 \Big|_{x=L} \quad (13)$$

2.3 운동방정식 및 안정성 해석

계의 운동방정식은 앞에서 구한 계의 일과 에너지 식 (8)~(13)을 라그랑주 방정식에 대입하여 유도하였다. 또, 운동방정식을 무차원화 하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수와 좌표를 정의하였다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad d = \frac{q}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}},$$

$$\beta = \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad r = \frac{R}{L}, \quad (14)$$

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}, \quad \mu = \frac{m_p}{(m+M)L}$$

식 (14)의 무차원 매개변수를 이용하여 다음과 같이 행렬형태의 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = Q \quad (15)$$

여기서 $d = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이며, 이것을 다시 $d(\tau) = De^{\lambda\tau}$ 로 표현할 수 있다. 여기서 고유치 λ 는 복소수 형태로써 $\lambda = a \pm ib (i = \sqrt{-1})$ 로 나타낼 수 있다.

회전 외팔 파이프의 동적안정성은 고유치 λ 의 실수부인 a 의 부호에 의해 결정된다. 만약 $a < 0$ 이면 파이프는 안정하게 되며, $a > 0$ 이면 불안정이 되는데 이때 허수부 $b=0$ 의 경우 발산형 불안정, $b \neq 0$ 인 경우 플러터형 불안정이 된다. 또, $a=0$ 일 때는 안정과 불안정의 경계가 되는 임계값이며 이때의 유속을 임계유속 u_{cr} 이라 하였다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

계의 운동방정식을 이용하여 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 동적특성을 8차 모드까지 고려하

Table 1 Comparison of present numerical results ($\Omega = 0$) and data in Refs.(9, 10)

	without tip mass			$\mu = 1$		
	1st.	2nd.	3rd.	1st.	2nd.	3rd.
Present results	3.516	22.034	61.697	1.557	16.250	50.896
Ref. (9) (1997)	3.516	22.034	61.697	1.557	16.250	50.896
Ref. (10) (1999)	3.516	22.035	61.697	1.557	16.250	50.896

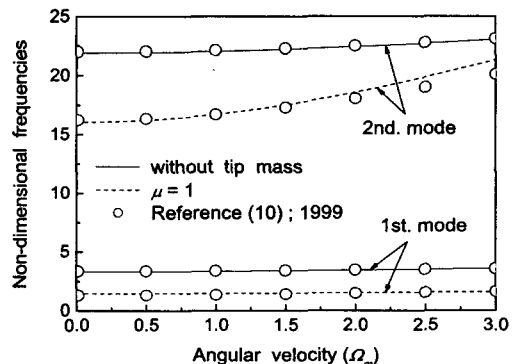
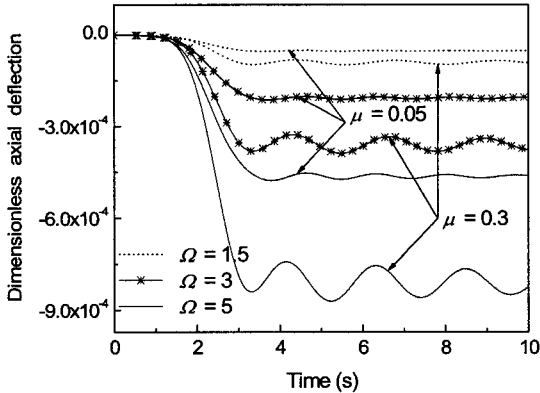
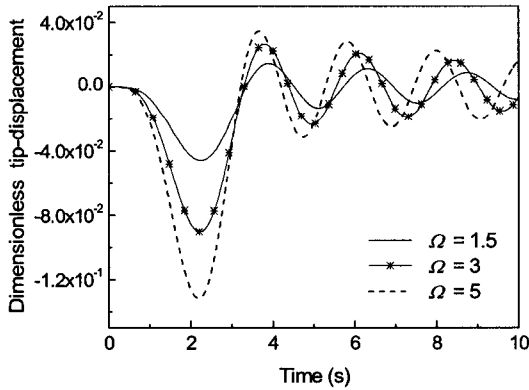


Fig. 2 Comparison of present numerical result of natural frequency and data in Ref.(10)

여 수치해석 하였다. 파이프의 회전 각속도는 회전 운동을 일반화하기 위하여 정상상태까지 서서히 증가하여 일정한 각속도를 유지하도록 하였다. 이 연구에서는 그 시간을 3 초로 하였다.



(a) Axial deflection ($u = 1$)



(b) Bending tip-displacement ($u = 1, \mu = 0.3$)

Fig. 3 Tip-response of a rotating cantilever pipe according to angular velocity and tip mass

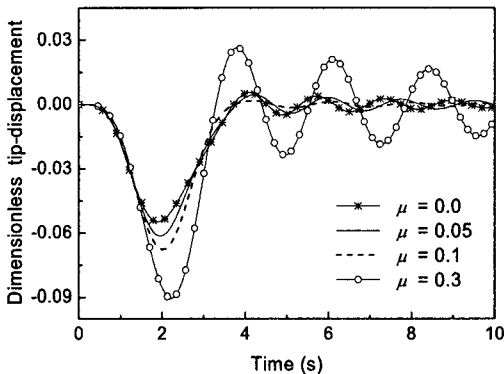
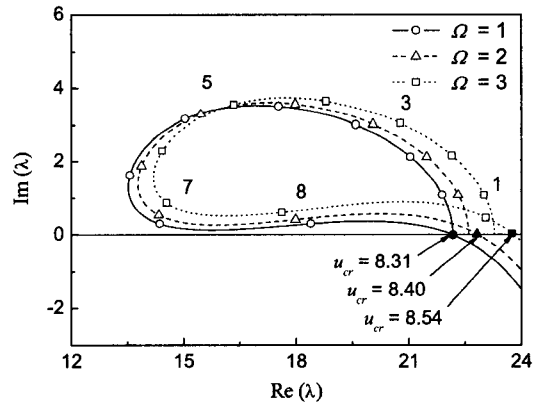
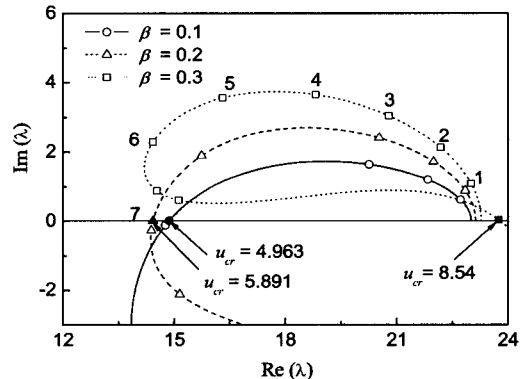


Fig. 4 Tip-displacement of a rotating cantilever pipe according to tip mass for $u = 1, \Omega = 1$

Fig. 2와 Table 1은 동일한 무차원 파라미터를 적용 하였을 때 이 연구에서 사용한 방법과 다른 연구(참고 문헌 (10))에서 사용한 방법(Hamilton's principle)으로 구한 파이프의 고유진동수를 서로 비교한 것이다. Table 1은 회전하지 않는 외팔보의 고유진동수를 끝단질량의 크기에 따라 3차 진동모드까지 나타낸 결과로써 그 결과들이 잘 일치함을 알 수 있다. 또 Fig. 2는 무차원 회전 각속도에 따른 외팔보의 고유진동수를 도시한 것으로써 끝단질량이 있는 경우 약간의 진동수 차이를 보이고 있으나 전반적으로 참고 문헌의 결과와 잘 일치함을 보여준다. 여기서 회전 각속도는 유체가 없는 경우의 각속도로써 $\Omega_m = \omega L^2 \sqrt{m/EI}$ 이다. 이상의 결과를 미루어 보아 이 연구에서 사용한 수치해석 방법이 타당하다는 것을 확인 할 수 있다.



(a) Effect of $\Omega, \beta = 0.3$



(b) Effect of $\beta, \Omega = 3$

Fig. 5 Complex frequency of rotating cantilever pipe as flow velocity for second mode ($\mu = 0$)

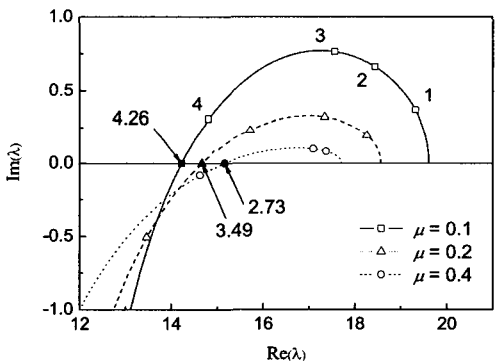
Fig. 3과 Fig. 4는 유체의 무차원 속도가 1로 일정한 경우, 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향 끝단 변위에 미치는 끝단질량과 회전 각속도의 영향을 도시한 것이다. 끝단질량 및 회전 각속도와 회전 외팔 파이프의 과도상태에서 축방향과 횡방향의 처짐 및 정상상태의 파이프의 변위는 서로 비례적인 경향을 보인다.

Fig. 5는 끝단질량이 없는 경우 파이프의 안정성에 미치는 회전 각속도와 질량비 β 의 영향을 나타낸 것이다. 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계유

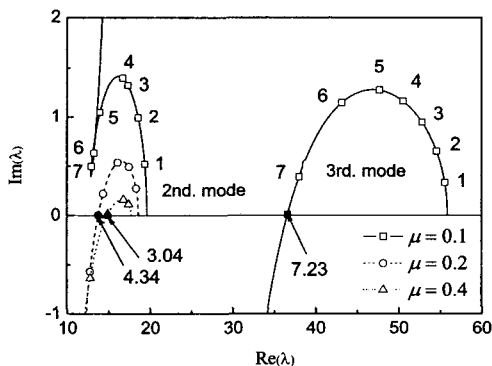
속은 2차 모드에서 나타나며 회전 각속도가 빨라질수록, 질량비가 클수록 임계유속 값이 증가한다. Fig. 5(a)에서 회전 각속도가 1인 경우에 비하여 3인 경우 임계유속은 약 2.7% 정도 증가함을 알 수 있다. 또, 무차원 회전 각속도가 3인 Fig. 5(b)에서 질량비가 0.1일 때와 0.3일 때의 임계유속을 비교해보면 질량비가 0.3인 경우 0.1인 경우에 비하여 임계유속 값은 약 41.9%의 큰 증가를 보인다.

Table 2 Critical flow velocity u_{cr}

	$\beta=0.1$			$\beta=0.2$		
	$\mu=0.1$	$\mu=0.2$	$\mu=0.4$	$\mu=0.1$	$\mu=0.2$	$\mu=0.4$
$\Omega=1$	3.81	3.23	2.61	4.26	3.49	2.73
$\Omega=2$	4.01	3.52	3.03	4.49	3.82	3.18
$\Omega=3$	4.30	3.94	3.60	4.84	4.31	3.82

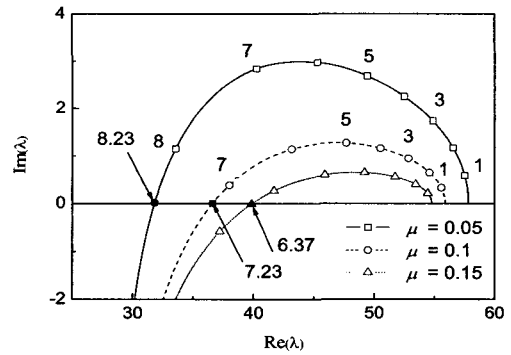


(a) $\beta = 0.2$

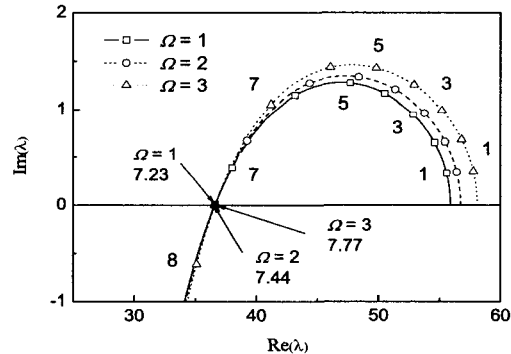


(b) $\beta = 0.4$

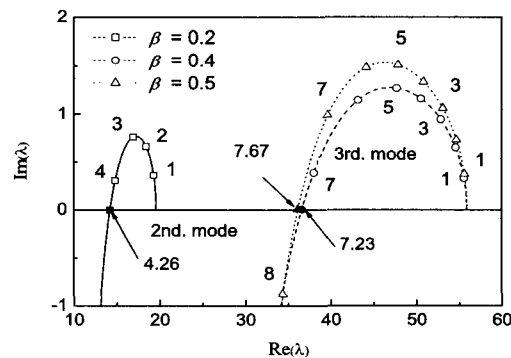
Fig. 6 Complex frequency of rotating cantilever pipe as flow velocity for $\Omega = 1$



(a) $\beta = 0.4, \Omega = 1$, Third mode



(b) $\beta = 0.4, \mu = 0.1$, Third mode



(c) $\Omega = 1, \mu = 0.1$, Second and third modes

Fig. 7 Complex frequency of rotating cantilever pipe as flow velocity

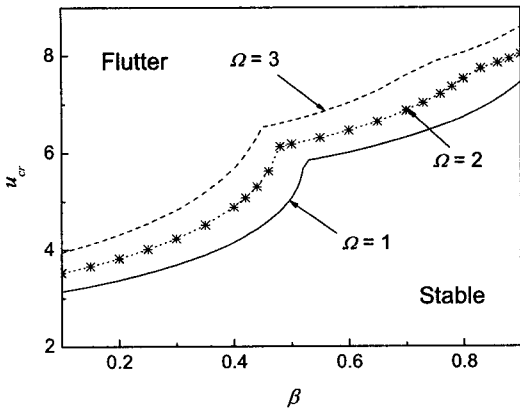


Fig. 8 Critical flow velocity for flutter of rotating cantilever pipe ($\mu = 0.2$)

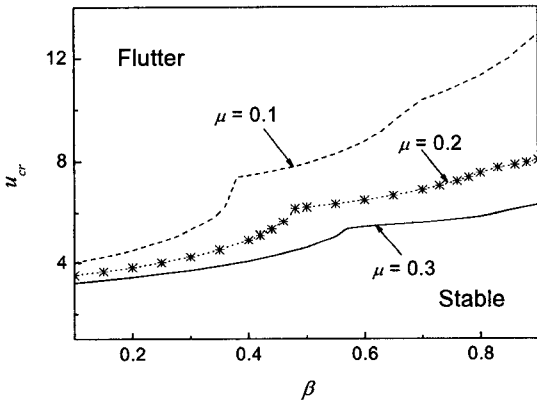


Fig. 9 Critical flow velocity for flutter of rotating cantilever pipe ($\Omega = 2$)

Table 2와 Fig. 6은 각 파라미터의 변화에 따른 회전 외팔 파이프의 임계유속을 나타낸 것이다. 전체적인 경향을 살펴보면 회전 각속도가 증가할수록, 그리고 질량비가 증가할수록 임계유속의 값은 커지고, 끝단질량의 크기가 커질수록 임계유속의 값은 작아진다. Fig. 6(a)의 경우 끝단질량의 크기가 0.1인 경우에 비하여 0.4일 때 임계유속은 약 36% 정도 줄어들었다. Fig. 6(b)를 살펴보면 이 연구에서 적용한 모든 파라미터에 대하여 2차 진동모드에서 계의 플러터 불안정이 발생하였으나 질량비 0.4, 회전 각속도 1, 그리고 무차원 끝단질량이 0.1인 경우에 3차 모드에서 플러터 불안정이 발생하였다. 따라서 Fig. 7에서는 끝단질량의 크기가 0.1인 경우를 기준으로 다른 파라미터를 변화시켜 가면서 임계유속을 조사하였다. Fig. 7(a)는 끝단질량의 크기를 조금 변

화시켜 보았으며, Fig. 7(b)에서는 회전 각 속도, 그리고 Fig. 7(c)에서는 질량비에 대한 임계유속 값을 살펴보았다. 끝단질량의 크기를 0.05 ~ 0.15 까지 변화시켜 보았으나 모두 3차 모드에서 플러터 불안정이 일어났으며 회전 각속도의 변화에 대하여서도 3차 모드에서 불안정이 발생하였다. 하지만 Fig. 7(c)에서 볼 수 있는 것처럼 질량비가 0.2일 때는 2차 모드에서, 그리고 0.37이상에서는 3차 모드에서 불안정을 유발하는 임계유속이 나타났다. 이러한 임계유속이 2차 모드가 아닌 3차 모드에서 나타나는 경우 그 값은 약 2배 정도 차이가 나고 따라서 질량비와 끝단질량을 적절히 조절하면 보다 빠른 유속에 대해서도 파이프 시스템의 안정성을 확보할 수 있으리라 판단된다.

Fig. 8과 Fig. 9는 파이프와 유체의 질량비에 따른 임계유속의 변화를 회전각속도와 끝단질량의 크기에 따라 각각 도시한 것이다. 전반적으로 회전각속도가 작을수록, 끝단질량의 크기가 클수록 파이프 시스템은 낮은 플러터 임계유속을 갖는다. 또 미소한 질량비 증가에 대해서도 임계유속이 갑자기 커지는 점프현상^[12]이 발생하며 이 현상은 회전각속도와 끝단질량의 크기가 커질수록 더 큰 질량비에서 나타난다. Fig. 9에서 $\mu=0.1$ 일 때는 $\beta \approx 0.378$, $\mu=0.2$ 일 때는 $\beta \approx 0.517$ 에서 각각 점프현상이 나타난다.

4. 결 론

이 연구에서는 유체유동을 가진 회전 외팔 파이프의 동특성 및 계의 플러터 불안정을 일으키는 질량비, 회전 각속도, 그리고 끝단질량의 영향을 수치 해석 하였다. 수치해석 예제에 사용한 파라미터에 대하여 끝단질량이 없을 때는 2차 진동모드에서 불안정을 유발하는 임계유속 값이 나타났으며, 전반적으로 동일한 질량비를 가진 경우 회전 각속도가 증가할수록 임계유속 값이 증가하였다. 또 회전 각속도가 일정한 경우 질량비와 임계유속 값은 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다. 끝단질량의 크기가 0.1인 경우 특정 질량비($\beta \approx 0.378$)에서 점프현상에 의해 2차 모드가 아닌 3차 모드에서 임계유속이 나타났다. 따라서 적절한 질량비와 끝단질량을 결정하는 것은 빠른 유속에서도 회전 외팔 파이프의 안정성을 확보하는데 기여할 수 있을 것으로 판

단된다.

파이프의 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향은 회전 각속도보다 끝단질량이 크며, 끝단질량에 비해서는 질량비의 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다. 또 동일한 회전 각속도를 갖는 경우 끝단 질량이 클수록 완만한 점프현상이 나타난다.

참 고 문 헌

(1) Ryu, B. J., Jung, S. H. and Kang, Y. C., 1998, "A Study on the Dynamic Stability and Vibration Control of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 1, pp. 171~179.

(2) Langthjem, M. A. and Olhoff, N., 2003, "Modal Expansion of the Perturbation Velocity Potential for a Cantilevered Fluid-conveying Cylindrical Shell", Journal of Fluids and Structures, Vol. 17, pp. 147~161.

(3) Paidoussis, M. P., Sarkar, A. and Semler, C., 2005, "A Horizontal Fluid-conveying Cantilever: Spatial Coherent Structures, Beam Modes and Jumps in Stability Diagram", Journal of Sound and Vibration, Vol. 280, pp. 141~157.

(4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 457~486.

(5) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 181,

No. 2, pp. 261~278.

(6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Mase", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.

(7) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.

(8) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever", Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.

(9) Fung, E. H. K. and Shi, Z. X., 1997, "Vibration Frequencies of a Constrained Flexible Arm Carrying an End Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 2, pp. 259~269.

(10) Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W., 1999, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 5, pp. 857~878.

(11) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2005, "Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.

(12) Paidoussis, M. P., 1998, Fluid-Structure Interactions (Volume 1), Academic Press.