퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2007, Vol. 17, No. 5, pp. 674-678

진리함수사상을 이용한 일반화된 대우추론

Generalized modus tollens using truth function mapping

윤용식*, 강상진*, 박진원**
Yong Sik Yun*, Sang Jin Kang*, Jin Won Park**

*Department of Mathematics, Cheju National University,
Jeju 690-756, Korea
**Department of Mathematics Education, Cheju National University,
Jeju 690-756, Korea

요 약

Baldwin은 진리함수사상을 이용하는 근사추론법을 정의하였다. 우리는 논문[4]에서 기존에 사용되는 진리함수사상 이외에 새로운 진리함수사상 두 가지를 정의하여 일반화된 연역추론에 적용한 결과를 소개하였다. 이 논문에서는 이 진리함수사상을 적용한 일반화된 대우추론에 대하여 알아보고 그 결과를 소개하였다.

Abstract

Baldwin defined the approximate reasoning using truth function mapping. In paper [4], we defined two truth function mappings and applied these truth function mappings to generalized modus ponens. In this paper, we introduce the results of generalized modus tollens using these two truth function mappings.

Key words : 진리함수사상, 일반화된 대우추론

1. 서 론

퍼지이론을 이용한 근사추론법에는 무한치논리를 기반으로 하는 Zadeh의 근사추론법과 퍼지논리를 기반으로 하는 Bladwin의 근사추론법이 있다. Bladwin의 근사추론을 하기 위해서는 진리함수사상(truth function mapping)이 필요한데, 대표적인 것이 Lukasiewicz의 진리함수사상이다. 우리는 [4]에서 새로운 진리함수사상을 정의하고 이 진리함수사상이 더 많은 평가기준을 만족하고 있으며 일반화된 연역추론에서 더 좋은 결과를 보여준다는 사실을 얻었다. 본 논문에서는 우리가 정의한 진리함수사상을 일반화된 대우추론(generalized modus tollens)에 적용시켜 보았다. 일반화된 대우추론이란 'x가 A이면 y는 B이다.'와 'y는 B'이다.'라는 전제가 주어졌을 때 'x는 A'이다.'라는 결론을 얻는 과정이다. 여기서 B'은 언어적 진리값을 사용하여 B를 변형한 퍼지집합이다.

2. 일반화된 대우추론

논리에 있어서 대우추론이란 다음과 같은 형태의 추론을 말한다.

$$\begin{array}{r} A \supset B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array} \tag{1}$$

여기서 $\supset$는 암시(implication)를 나타내는 기호이며, $\neg$는 부정(negation)를 나타내는 기호이다. 예를 들면 다음과 같다.

M이 사람이면, M은 숨을 쉰다.
로봇은 숨을 쉬지 않는다.
———————————
따라서 로봇은 사람이 아니다.

그런데 근사추론에서의 일반화된 대우추론은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} A \supset B \\ B' \\ \hline A' \end{array} \tag{1'}$$

예를 들면,

키가 큰 사람은 몸무게가 무겁다.
민수는 몸무게가 약간 무겁다.
———————————
따라서 민수는 키가 약간 크다.

라고 추론하는 형식이다. Baldwin의 근사추론법에 있어서의 일반적인 대우추론을 소개하면 다음과 같다.

접수일자 : 2007년 5월 14일
완료일자 : 2007년 8월 5일

(전제 1) $(u \ \ is \ \ A) \supset (w \ \ is \ \ B)$

(전제 2) $(w \ \ is \ \ B') \ \ is \ \ true$

여기서 A는 대집합 X의 퍼지부분집합이고 B, B'은 대집합 Y의 퍼지부분집합이다.

먼저 $w \ is \ B'$ 이라는 가정에서 $w \ is \ B$ 에 대한 퍼지진리값 τ_B 는 역진리함수변형에 의하여

$$\tau_{B/B'} = v(w \ is \ B \mid w \ is \ B')(\lambda) = \bigvee_{\substack{y \in Y \\ v(w \ is \ B)(y)=\lambda}} v(w \ is \ B')(y)$$

로 얻어진다. 그리고 (전제 1)에 대한 진리함수사상 I가 주어지면 $u \ is \ A$ 에 대한 퍼지진리값 τ_A는 MAXMIN합성에 의하여

$$\tau_A = v(u \ is \ A)(\eta) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\mu_I(\eta, \lambda) \wedge \mu_{\tau_B}(\lambda)\} \quad (\eta \in [0, 1])$$

로 얻어진다. 그리고 마지막으로 진리함수변형을 통하여 $u \ is \ A'$ 이라는 결론을 얻게 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$(u \ \ is \ \ A) \supset (w \ \ is \ \ B)$

$(w \ \ is \ \ B')$

$v(w \ is \ B \mid w \ is \ B') = \tau_{B/B'}$ 이면,

$v(u \ is \ A) = \tau_A$

$\therefore \ u \ is \ A'$

참과 거짓의 정도를 very true, true, fairly true, false, very false 등의 언어적 표현을 사용하여 나타낸 값을 언어적 진리값이라 한다. Baldwin은 언어변수 truth의 변수값에 따른 소속함수를 다음 그림 1과 같이 정의하였다([2]).

① $\mu_{true}(x)$ ② $\mu_{false}(x)$
③ $\mu_{very\ true}(x)$ ④ $\mu_{very\ false}(x)$
⑤ $\mu_{fairly\ true}(x)$ ⑥ $\mu_{fairly\ false}(x)$
⑦ $\mu_{absolutely\ true}(x)$ ⑧ $\mu_{absolutely\ false}(x)$
⑨ $\mu_{undecided}(x)$

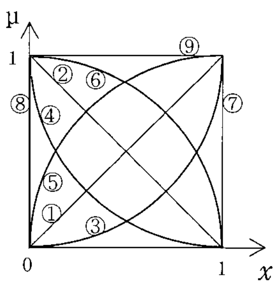


그림 1. truth의 변수값

Baldwin은 암시의 퍼지진리값을 다음과 같이 진리함수사상으로 정의하였다.

$$\mu_I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$
$$(\eta, \lambda) \rightarrow \mu_I(\eta, \lambda) \in [0, 1]$$

정의 1.([3],[4]) $\mu_I(\eta,\lambda)$에 대한 대표적인 경우 여섯 가지와 우리가 정한 두 가지 정의는 다음과 같다.

(i) Lukasiewicz rule ;
$\mu_I(\eta,\lambda) = 1 \wedge (1-\eta+\lambda)$

(ii) Fuzzified binary logic rule ;
$\mu_I(\eta,\lambda) = (1-\eta) \vee \lambda$

(iii) Max-min rule ;
$\mu_I(\eta,\lambda) = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$

(iv) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

(v) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

(vi) $\mu_I(\eta,\lambda) = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

(vii) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$

(viii) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 2\lambda - \eta, & \text{if } \lambda \leq \eta \leq (2\lambda \wedge 1) \\ 0, & \text{if } \eta > (2\lambda \wedge 1) \end{cases}$

식 (vii)과 (viii)에 대한 소속함수 $\mu_I(\eta,\lambda)$를 그래프로 표현하면 그림 2처럼 나타낼 수 있다.

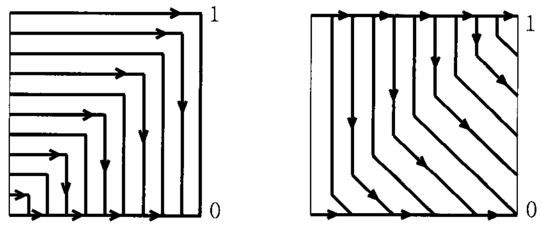


그림 2. λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta,\lambda)$의 그래프

정리 2.([1],[3],[4]) 진리함수사상 (i)~(viii)에 대한 일반화된 연역추론 결과는 다음 표 1과 같다.

표 1. (i)~ (viii)의 정의에 대한 추론결과

$\tau_{(A/A')}$ / 식	very true	true	fairly true	very false	false	fairly false
(i)				undecided	undecided	undecided
(ii)				undecided	undecided	undecided
(iii)				undecided	undecided	undecided
(iv)	true	true	fairly true	undecided	undecided	undecided
(v)	very true	true	fairly true	undecided	undecided	undecided
(vi)	fairly true	fairly true		undecided	undecided	undecided
(vii)	very true	true	true	true	true	true
(viii)	almost very true	true	fairly true	undecided	decided	undecided

위 표 1의 빈 칸은 결과를 언어변수 truth의 언어적 진리값으로 표현하기 어려운 형태로 결과가 나타난 경우이다. 그

리고 표 1의 내용 중 *almost very true*란 추론 결과가 *very true*의 모습과 유사한 형태인 경우를 말한다.

본 논문에서는 근사추론에 있어서 일반화된 연역추론에 대응하는 일반화된 대우추론에 대한 결과들을 집중적으로 살펴보고자 한다.

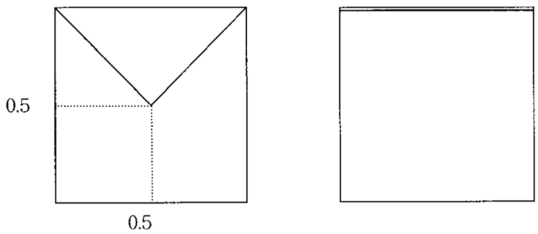
실제적인 계산은 mathematica를 이용하여 얻었으며 그 결과를 토대로 그래프로 표현하였다.

정리 3. 진리함수사상 (i)~ (vi)에 대한 일반화된 대우추론 결과는 다음 표 2와 같다.

표 2. (i)~ (vi)의 정의에 대한 추론결과

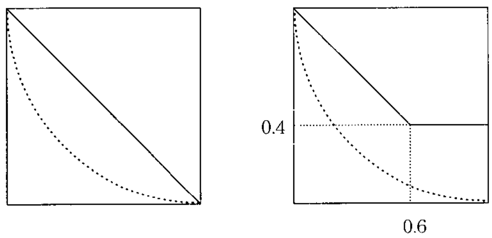
$\tau_{(B\|B')}$ / 식	*very true*	*true*	*fairly true*	*very false*	*false*	*fairly false*
(i)	*undecided*	*undecided*	*undecided*	*false*		
(ii)	*undecided*	*undecided*	*undecided*			
(iii)	①	①	①			
(iv)	*undecided*	*undecided*	*undecided*			
(v)	*undecided*	*undecided*	*undecided*	*very false*	*false*	*fairly false*
(vi)	*undecided*	*undecided*	*undecided*			

증명. τ_A를 구하는 실제적인 계산을 위한 알고리즘이 [3]에 소개되어 있다. 여기서는 mathematica를 사용하여 보다 정확한 그래프를 소개하였다. 먼저, 위의 표의 ①에 해당하는 부분과 very true, true, fairly true에 대한 결과가 undecided인 경우를 각각 그래프로 나타내면 다음과 같다.

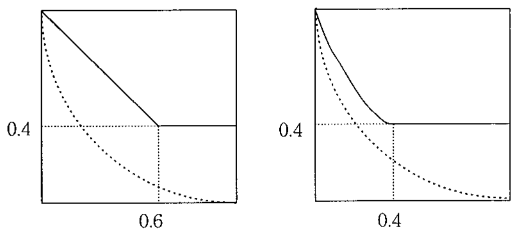


① undecided

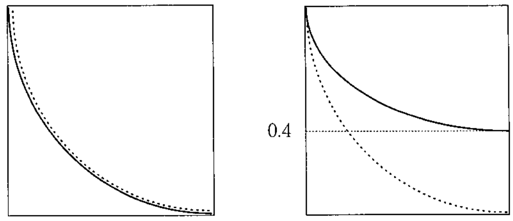
very false인 경우는 아래와 같다.



(i) (ii)



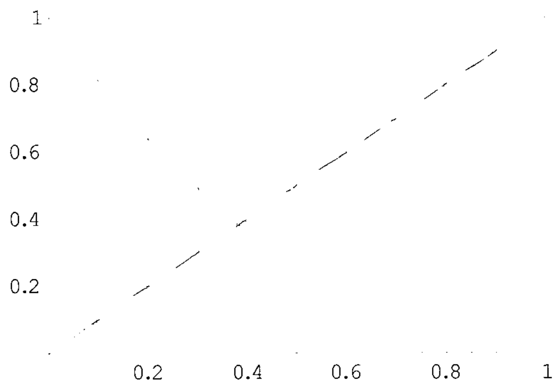
(iii) (iv)



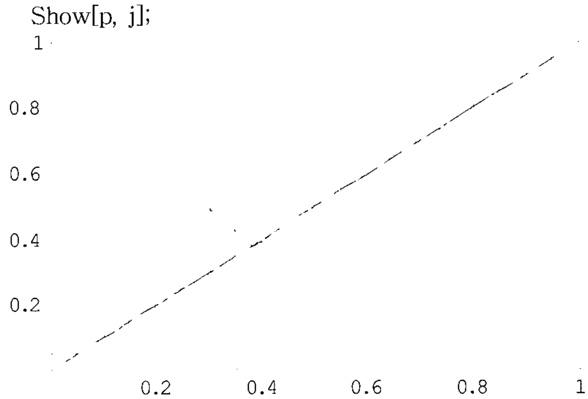
(v) (vi)

위의 그림 중 (iv)의 결과의 유도과정에 대한 명령어를 순차적으로 표현해보고, 또한 표현 간격을 점차 세밀하게 분할하여 그래프로 나타내면 다음과 같다.

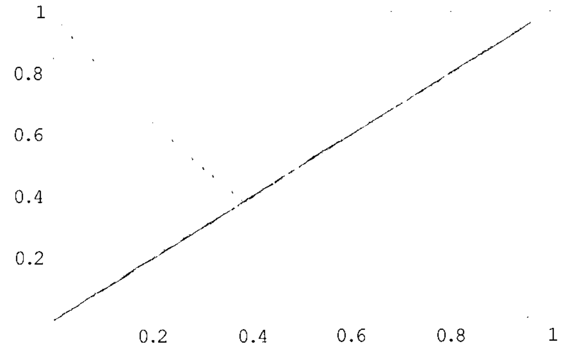
```
j4[n_]:=If[n≤x, 1, If[n>x, x]]
qj[x_]:=(x-1)^2
kj4[n_]:=Min[(x-1)^2, j4[n]];
lj4[n_]:=Table[kj4[n], {x, 0, 1, 1/1000}]
pj4[n_]:=Max[lj4[n]]
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/10}];
Show[p, j];
```




```
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/20}];
Show[p, j];
```



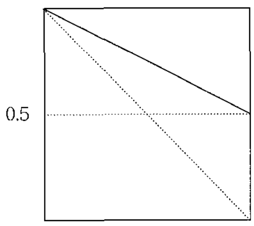

```
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
 j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/50}];
 Show[p, j];
```



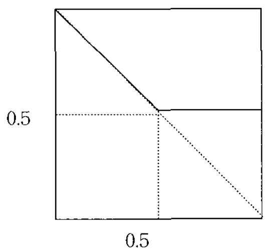
여기서 j4[n_], qj[x_], kj4[n_], lj4[n_], pj4[n_], p, j는 함수를 정의한 것이고, Plot은 그림으로 나타낼 때, Show는 두 개 이상의 그래픽 객체를 한 그래프 축에 나타낼 때 사용하는 명령어이다. 또한 DisplayFunction->identity는 그래프를 숨기게하는 명령어이다.

같은 방법으로 false인 경우와 fairly false인 경우의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

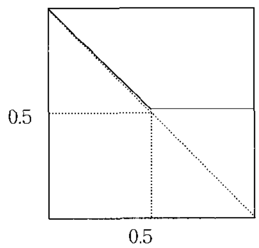
false인 경우 :



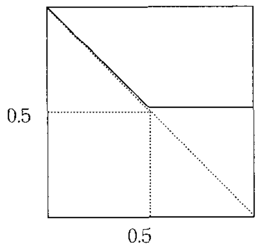
(i)



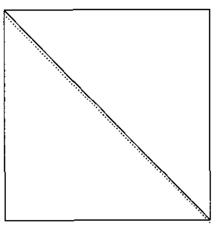
(ii)

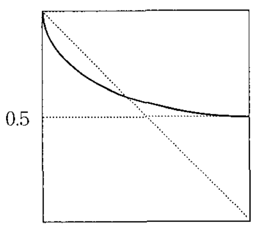


(iii)



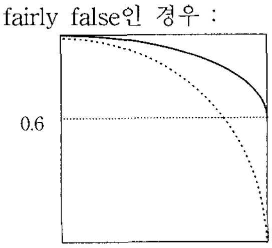
(iv)


(v)

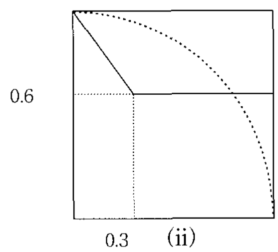


(vi)

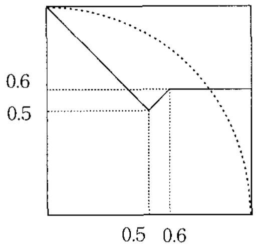
fairly false인 경우 :



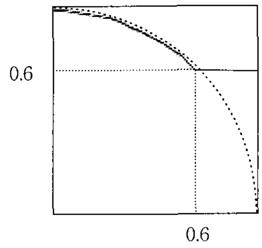
(i)



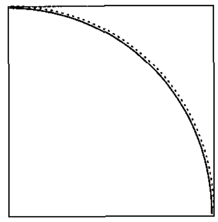
(ii)

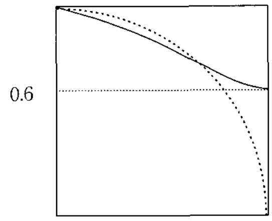


(iii)



(iv)


(v)



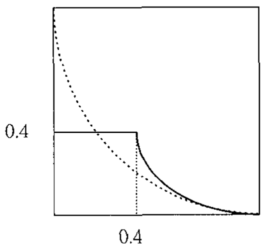
(vi)

정리 4. 진리함수사상 (vii)~ (viii)에 대한 일반화된 대우추론 결과는 다음 표 3과 같다.

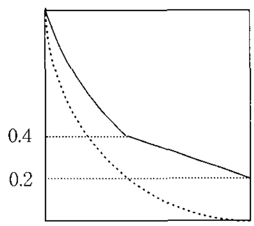
표 3. (vii)~ (viii)의 정의에 대한 추론결과

식 \ τ(B/B')	very true	true	fairly true	very false	false	fairly false
(vii)	undecided	undecided	undecided			
(viii)	undecided	undecided	undecided			

증명. very false인 경우:

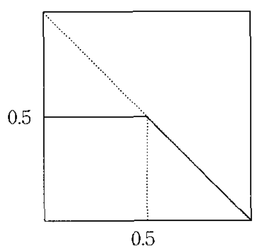


(vii)

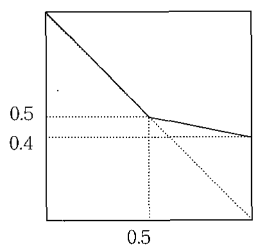


(viii)

lse인 경우 :

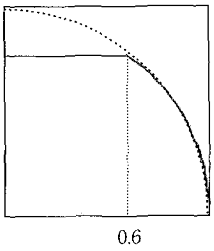


(vii)

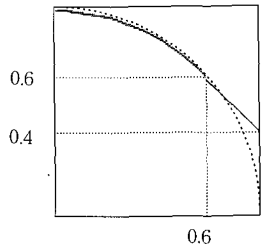


(viii)

fairly false인 경우 :



(vii)



(viii)

3. 결 론

근사추론에는 연역추론(modus ponens)과 대우추론(modus tollens)이 있다. Baldwin은 진리함수사상을 이용하여 근사추론을 연구하였다. 본 논문에서는 지금까지 알려진 진리함수사상 여섯 가지와 우리가 [4]에서 정의한 두 가지 진리함수사상 을 Baldwin의 근사추론에 적용시켜 비교하여 보았다. 전체적으로 보면 연역추론에서는 (v)와 [4]에서 정의한 (vii)과 (viii)에서 $v(u\ is\ A \mid u\ is\ A')$가 very true, true, fairly true인 경우 매우 타당한 결과들이 나타나고 있지만([4]), very false, false, fairly false인 경우 모든 진리함수사상에서 거의 만족스럽지 못한 결과가 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 반면에 대우추론에서는 모든 진리함수사상에 있어서 $v(w\ is\ B \mid w\ is\ B')$가very true, true, fairly true인 경우에 있어서 거의 모두 undecided로 결과들이 출력되고 있으나, very false, false, fairly false인 경우에 있어서는 출력결과가 대체적으로 타당하게 나타남을 확인할 수 있다. 대우추론에서는 (v)인 경우 대체로 만족할 만한 결과가 나타나고 있지만, 나머지 식들에 있어서는 만족할 만한 결과가 나타나고 있지 않다. 그러나 (vii)의 경우 입력값이 0.5 이상일 때에는 결과가 타당하게 출력되고 있고, (viii)의 경우 입력값이 0.5 이하일 때 결과가 타당하게 출력되고 있음을 알 수 있다.

이상의 결과에서와 같이 알려진 진리함수사상 여섯 가지와 [4]에서 정의한 두 가지를 일반화된 연역추론과 대우추론에서 각각 비교한 결과를 정리하면 다음과 같다. 알려진 진리함수사상의 경우에 있어서는 (v)에서 일반화된 연역추론과 대우추론 모두 타당한 결과가 나타나고 있는 반면에 나머지 다섯 가지는 두 가지 추론에서 모두 거의 일치하고 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 우리가 [4]에서 정의한 (vii)과 (viii)의 경우는 일반화된 연역추론은 very true, true, fairly true인 경우에 있어서 매우 좋은 결과를 얻었고, 일반화된 대우추론인 경우, (vii)은 입력값이 0.5 이상일 때에는 결과가 타당하게 출력되고 있고, (viii)은 입력값이 0.5 이하일 때 결과가 타당하게 출력되었다. 이러한 결과는 (v)를 제외한 나머지 진리함수상보다는 더 나은 추론 결과라고 할 수 있다.

References

[1] 퍼지이론과 제어, 채석 · 오영석 공저, 청문각, 2003.
[2] J. F. Baldwin, A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2, pp. 309-325, 1979
[3] J. F. Baldwin and N. C. F. Guild, Feasible algorithms approximate reasoning using fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 3, pp. 225-251, 1980
[4] J. W. Park, S. J. Kang and Y. S. Yun, Truth function mapping, *Journal of fuzzy logic and intelligent systems*, Vol. 16, No. 2, pp. 198-202, 2006

저 자 소 개

윤용식 (Yong Sik Yun)
2006 ~ 현재 제주대학교 수학과 교수

관심분야 : fuzzy probability, probability theory,
email : yunys@cheju.ac.kr

강상진 (Sang Jin Kang)
2004 ~ 현재 제주대학교 수학과 박사과정

관심분야 : fuzzy probability, probability theory,
email : ksjin@chol.com

박진원 (Jin Won Park)
2006 ~ 현재 제주대학교 수학교육과 교수

관심분야 : fuzzy topology, general topology,
email : jinwon@cheju.ac.kr