

Boussinesq 방정식 모델의 수치잡음 제거를 위한 저파수 통과 필터에 대한 고찰

Low-pass Filters for Removing Numerical Noises of Boussinesq Equation Model

전인식* · 심재설**
Insik Chun* and Jaeseol Sim**

요 지 : Boussinesq 방정식에 의한 파랑전파의 계산과정 중 파랑의 비선형 상호작용 및 쇄파발생에 의하여 수치잡음이 흔히 발생하며 이 잡음을 적절히 제어하지 않을 경우 해가 급속히 발산하게 된다. 본 연구에서는 계산 중간과정에 주기적으로 적용하여 수치잡음을 제거하기 위한 세가지 형태의 저파수통과 필터(FFT 필터, 가우스 필터, 그리고 Shapiro 필터)의 특성에 대하여 고찰하였다. 경사면 파동장에 대한 기존의 수리실험 결과와 본 수치 해석 결과를 비교하고 각 필터의 잡음 제거효과, 주 시그널의 보존성, 그리고 계산 소요시간에 대하여 검토하였다. 그 결과, Shapiro 필터의 매개변수(필터 요소수와 통과수, 그리고 필터적용주기)를 적절히 설정함으로써 계산의 정확성과 효율성을 잘 달성할 수 있는 것으로 나타났다. 적절한 매개변수 선정을 위해서는 다소의 시행착오적 계산이 요구되나 대체적으로 필터 요소수 4에 대하여 50이내의 필터 통과수와 100~200 시간스텝 정도의 적용주기가 타당한 것으로 판단된다.

핵심용어 : Boussinesq 방정식, 수치잡음, 저파수통과 필터, Shapiro 필터, 가우스 필터

Abstract : In the calculation of wave propagation by Boussinesq equation model, it is very common to experience numerical noises generated from nonlinear interaction and breaking wave occurrence, and the numerical solution is rapidly diverged unless the noises are properly controlled. A comparative study was here undertaken for the characteristics of three different lowpass filters (FFT filter, Gaussian filter and Shapiro filter) which are all designed to be applied to the interim results of numerical calculation. The numerical results obtained with application of respective filter techniques were compared with the results of an existing hydraulic experiment for the aspects of noise suppression, conservation of main signal and filtering time. The results show that the Shapiro filter can be best applied with optimal choices of its element number, pass number and filtering time interval. The combination of the number of filter element of 4, pass number of 50 or less, and application interval of 100 to 200 time steps generally showed good performance in both accuracy and efficiency of the numerical calculation.

Keywords : Boussinesq equation, numerical noise, low-pass filter, Shapiro filter, Gaussian filter

1. 서 론

시간의존 비선형 방정식계를 수치해석할 때 계산과정에서 잡음 형태의 미소파장이 생성되어 해의 발산을 초래하는 경우가 종종 발생한다. 이와 같은 문제는 일종의

비선형 파랑전파 모델인 Boussinesq 방정식 모델을 이용하여 천해파랑 변형을 계산할 때도 필연적으로 발생한다. 또한, 계산과정 중 쇄파가 발생할 때 추가적으로 미소파장 잡음이 다수 생성되며 이들 잡음은 급격히 증폭되어 결과적으로 해의 발산을 초래한다.

*Department of Civil Engineering, Konkuk University, 1 Hwangyong-dong, Kwangjin-ku, Seoul 143-701, Korea. ischun@konkuk.ac.kr
**Coastal and Harbor Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute

잡음생성에 따른 해의 발산을 억제하기 위해서는 계산 과정에서 중간계산결과에 포함되어 있는 잡음을 주기적으로 제거해야 한다. Kennedy 등(2000)은 Boussinesq 방정식 모델에서 일종의 저파수통과 필터인 Shapiro 필터 (Shapiro, 1979)를 적용하여 잡음을 제거하는 방법을 제시한 바 있다. 여기서, 저파수통과 필터는 임의의 시점에서의 스냅 데이터에 적용하는 일종의 공간필터(spatial filter)로서 시간영역에서 적용하는 저주파수 통과필터(low-pass filter)와 근본적으로 동일한 것이다. 다만, 저주파수 통과 필터에서는 필터의 한계를 정하기 위하여 절단주파수(cut-off frequency) 또는 절단주기를 설정하나 저파수통과 필터에서는 절단파수(cut-off wave number) 또는 절단파장을 설정하는 것이 다르다.

저파수통과 필터에서 잡음을 효과적으로 제어하기 위해서는 절단파수 또는 파장을 적절히 설정해야 한다. 절단파장을 과소하게 설정하면 잡음의 일부만이 제거되어 해가 발산할 가능성이 여전히 남게 되며, 반대로 과대하게 설정하면 주 시그널(main signal)의 감쇠를 초래하게 된다. 또한, 필터를 효율적으로 적용하기 위하여 필터 적용주기를 조절하거나 필터 통과횟수(pass number)를 조절하기도 한다. 그러나 빈번한 필터적용은 주 시그널의 감쇠를 초래할 뿐만 아니라 필터링 시간의 누적에 따른 총 계산시간의 현격한 증가를 야기할 수도 있다. 따라서, 정확하고도 효율적인 수치계산을 위해서는 먼저 지배방정식과 연계하여 사용 필터의 특성에 대한 완전한 이해가 선행되어야 한다.

본 연구에서는 Boussinesq 파랑전파모델에서의 사용을 목적으로 저파수통과 필터의 전달특성과 사용방법에 대하여 고찰하였다. 여기에서는 파수영역에서 직접적으로 Fourier 변환을 이용하여 잡음을 제거하는 FFT 필터(Fast Fourier transform filter), 특정 데이터에 좌우대칭형 평활작용을 제공하며 스냅 영상자료의 처리 등에 많이 사용되는 가우스 필터(Gaussian filter), 그리고 Kennedy 등(2000)이 사용하였던 Shapiro 필터 등 세가지 필터의 특성에 대하여 고려하였다. 각 필터의 성능분석을 위하여 Hansen and Svendsen(1979)이 수행한 경사면 수리실험조건을 대상으로 Boussinesq 방정식 모델의 수치해석을 수행하였으며 여기에 사용 필터의 종류와 조건을 달리 해가며 각 계산치와 실험치를 비교하였다.

2. Boussinesq 방정식에서의 쇄파감쇠

본 연구에서는 저파수통과 필터의 적용성을 검토하기

위하여 Nwogu(1993)가 제안한 약비선형 형태의 일차원 Boussinesq 방정식을 사용하였으며 수치해석을 통하여 경사면 천수변형과 쇄파발생을 계산하였다. 수치해석의 미지수는 수면변위 η 와 연직위치 $z_\alpha = -0.531 h$ 에서의 수평방향 유속 u 이며 지배방정식은 연속방정식 (1)과 운동방정식 (2)로 구성된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = E(\eta, u) + f(x, t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(\eta, u) + F_{br} + F_{sp} \tag{2}$$

여기서,

$$U = u + h \left[b_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right] \tag{3}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] - \frac{\partial}{\partial x} \left[a_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right] \tag{4}$$

$$F = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

이며, $a_1 = 0.5\beta^2 - 1/6$, $a_2 = \beta + 0.5$, $b_1 = 0.5\beta^2$, $b_2 = \beta$, $\beta = z_\alpha/h = -0.531$ 이다. 또한, $f(x, t)$ = 조파항, F_{br} = 쇄파감쇠항, F_{sp} = 스폰지 감쇠항을 의미한다.

본 연구에서는 쇄파감쇠항을 정하기 위하여 Kennedy 등(2000)이 제안한 다음과 같은 좌점성계수 모델을 사용하였다.

$$F_{br} = -\frac{1}{h + \eta} (v_b [(h + \eta)u]_x) \tag{6}$$

여기서,

$$v_b = -B \delta^2 (h + \eta) \eta_i \tag{7}$$

$$B = \begin{cases} 1 & ; 2\eta_i^* \\ \eta_i/\eta_i^* - 1 & ; \eta_i^* \leq \eta_i \leq 2\eta_i^* \\ 0 & ; \eta_i < \eta_i^* \end{cases} \tag{8}$$

$$\eta_i^* = \begin{cases} \eta_i^{(l)} + \frac{t-t_0}{T^*} (\eta_i^{(l)} - \eta_i^{(r)}) & ; 0 \leq (t-t_0) \leq T^* \\ \eta_i^{(r)} & ; T^* < (t-t_0) \end{cases} \tag{9}$$

$$\eta_i^{(l)} = P_1 \sqrt{gh} \tag{10}$$

$$\eta_i^{(r)} = P_2 \sqrt{gh} \tag{11}$$

$$T^* = P_3 \sqrt{\frac{h}{g}} \tag{12}$$

식 (9)에서 t_0 는 쇄파시작 시각을 의미한다. 와점성 계수를 결정하기 위한 매개변수는 δ, P_1, P_2 와 P_3 이며, Kennedy 등은 기본값으로서 $\delta=1.2, P_1=0.65, P_2=0.15, P_3=5.0$ 을 권장하였으나 정확한 값은 쇄파가 발생하는 각 경우마다 개별적으로 실험 데이터 등을 이용하여 결정할 필요가 있다(전 등, 2005, 2006). 본 연구의 경사면 파동장 계산에서는 수치실험을 통하여 $P_1=0.90$ 으로 정하였으며 이를 제외한 나머지 매개변수들은 상기 기본값들을 그대로 사용하였다.

3. 저파수통과 공간필터의 전달 특성

본 장에서는 FFT 필터, 가우스 필터 그리고 Shapiro 필터의 각각에 대하여 유한차분 적용을 위한 방법을 수립하고 각 필터의 입력 시그널 파수의 변화에 따른 전달 특성을 파악하기로 한다.

3.1 FFT 필터

임의 공간역 x 에서 이산(discrete) 시그널 $X(x/\Delta x)$ 에 포함된 고파수(미소파장) 잡음을 제거하기 위해서는 Fig. 1과 같은 일종의 공간필터인 저파수통과 필터를 적용할 수 있다. 저파수통과 필터는 절단(cut-off) 파장을 λ_c 라 할 때 파장영역에서

$$R(\lambda/\Delta x) = \begin{cases} 1.0 & ; \lambda/\Delta x \geq \lambda_c/\Delta x \\ 0.0 & ; \lambda/\Delta x < \lambda_c/\Delta x \end{cases} \tag{13}$$

과 같은 전달함수(원 시그널에 대한 필터 적용된 시그널의 진폭비)를 가진다.

필터적용은

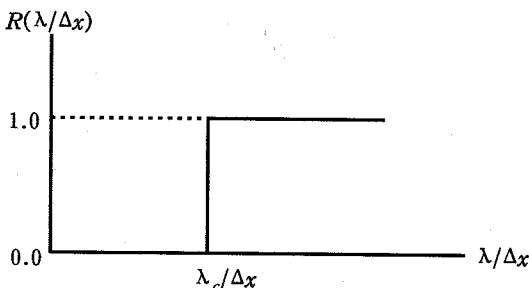


Fig. 1. Transfer function of FFT filter.

$$X' = F^{-1}\{F(X)R(\lambda/\Delta x)\} \tag{14}$$

와 같이 데이터 X 에 대한 푸리에변환(F)과 그리고 $F(X)R$ 에 대한 역 푸리에변환(F^{-1})의 과정을 거쳐 잡음이 제거된 형태의 X' 을 생성하게 된다. Fig. 1에서 볼 수 있듯이 절단파장 $\lambda_c/\Delta x$ 에서 전달함수가 0에서 1로 변하기 때문에 $\lambda_c/\Delta x$ 이하의 파장은 완전히 제거되나 $\lambda_c/\Delta x$ 이상의 파장은 그대로 보존되는 특성을 갖는다.

상기 FFT 필터의 적용은 푸리에 변환 시 FFT 루틴을 사용하기 때문에 데이터 X 의 개수가 2ⁿ인 경우에 국한한다. 그러나, 일반적으로 계산영역의 크기를 2ⁿ에 맞추어 설정하기는 현실적으로 매우 어렵다. 물론, 임의의 데이터 개수에 대하여 DFT(discrete Fourier transformation) 루틴을 사용할 수도 있으나 계산시간이 현저하게 증가하게 된다. 이와 같이, FFT 필터는 잡음을 제거하기 위한 가장 이상적인 필터로 볼 수 있으나 데이터의 개수에 대한 현실적인 제약이 따른다.

3.2 가우스 필터

잡음을 포함하는 임의의 일차원 공간 자료(spatial data)에 대하여 $x=0$ 에 위치한 특정 데이터 및 그 주변을 평활화하기 위해서 다음과 같은 가우스 분포 형태의 필터를 적용할 수 있다(Castleman, 1996; Jain, 1989; Gonzalez and Wintz, 1987).

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{15}$$

여기서, σ 는 필터의 표준편차이며 필터의 폭을 결정한다. σ 를 필터의 절단파장 λ_c (절단파수의 역수)와 매개변수 α 를 이용하여

$$\sigma = \frac{\alpha\lambda_c}{\sqrt{2\pi}} \tag{16}$$

와 같이 나타내고 이를 식 (15)에 대입하면,

$$G(x) = \frac{1}{\alpha\lambda_c} e^{-\pi\left(\frac{x}{\alpha\lambda_c}\right)^2} \tag{17}$$

와 같다.

식 (17)을 Fourier 변환하면, 파수 $k(=1/\lambda)$ 에 대한 전달함수는

$$R(k) = e^{-\pi\alpha^2\lambda_c^2 k^2} \tag{18}$$

이 된다. $R(k)$ 도 역시 가우스 분포이며 $k=0$ 에서 최대 값 $R(0)=1$ 을 가지며 전후로 값이 감소하는 일종의 저 파수통과 필터의 성향을 갖는다. 식 (18)을 파장 λ 의 함수형태로 표현하면

$$R(\lambda/\Delta x) = e^{-\frac{\pi\alpha^2(\lambda/\Delta x)^2}{(\lambda_c/\Delta x)^2}} \quad (19)$$

이 된다. 따라서, 매개변수 α 는 절단파수에서의 시그널 진폭의 전달율과 관계가 있다. 즉, 임의의 절단파장에서 전달율 $p\%$ 와 α 의 관계는 식 (19)에서 $0.01p = e^{-\pi\alpha^2}$ 이므로 α 는

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln(0.01p)^{-1}}{\pi}} \quad (20)$$

와 같이 구할 수 있다. 만약, $R(\lambda_c)=1\%$ 를 위해서는 $\alpha=1.2107$ 이, 그리고 $R(\lambda_c)=50\%$ 를 위해서는 $\alpha=0.4697$ 이 되어야 한다. 가우스 필터도 식 (14)와 같이 대상 시그널 X 와 전달 함수 $R(\lambda/\Delta x)$ 에 대하여 푸리에변환 및 역 푸리에변환을 적용할 수도 있으나 이 역시 FFT를 적용할 수 있는 데이터 수의 제한(2ⁿ개)을 받는다. 따라서, 일반적으로는 식

(15)를 소정의 픽셀을 갖는 디지털필터로 구현하고 이를 대상시그널에 회적(convolution)시키는 방법을 많이 사용한다. 통상적으로 필터의 픽셀 수 n_p 는 다음과 같이 정할 수 있다.

$$n_p = 2n + 1 \quad (21)$$

$$n = \text{NINT}\{3.7(\sigma/\Delta x) - 0.5\} \quad (22)$$

NINT는 괄호 안 숫자에 가장 근접한 정수를 의미한다. 식 (22)에 식 (16)을 대입하면,

$$n = \text{NINT}\left\{3.7 \frac{\alpha\lambda_c}{\Delta x\sqrt{2\pi}} - 0.5\right\} \quad (23)$$

와 같다. $\alpha=0.4697$ 에 대해서 표준편차 σ 의 변화에 따른 λ_c , n_p 및 각 픽셀에서의 필터 값 G_k 를 Table 1에 제시하였다. G_k 는 중앙값 G_0 을 중심으로 좌우 대칭을 이룬다. 필터적용은 다음 식과 같다.

$$X'_i = \sum_{k=-np/2}^{np/2} X_{i+k}G_k \quad (24)$$

Table 1. Properties of Gaussian filter and pixel values ($\alpha=0.4697$)

$\sigma/\Delta x$	$\lambda_c/\Delta x$	n_p	$G_k; k = -\text{INT}(n_p/2) \sim + \text{INT}(n_p/2)$
0.5	2.6683	3	0.1080, 0.7979, 0.1080
1.0	5.3367	7	0.0044, 0.0540, 0.2420, 0.3989, 0.2420, 0.0540, 0.0044
1.5	8.0050	11	0.0010, 0.0076, 0.0360, 0.1093, 0.2130, 0.2660, 0.2130, 0.1093, 0.0360, 0.0076, 0.0010
2.0	10.6733	15	0.0004, 0.0022, 0.0088, 0.0270, 0.0648, 0.1210, 0.1760, 0.1994, 0.1760, 0.1210, 0.0648, 0.0270, 0.0088, 0.0022, 0.0004
2.5	13.3417	19	0.0002, 0.0010, 0.0032, 0.0090, 0.0216, 0.0444, 0.0777, 0.1159, 0.1473, 0.1595, 0.1473, 0.1159, 0.0777, 0.0444, 0.0216, 0.0090, 0.0032, 0.0010, 0.0002
3.0	16.0100	23	0.0002, 0.0005, 0.0015, 0.0038, 0.0087, 0.0180, 0.0331, 0.0547, 0.0807, 0.1065, 0.1258, 0.1330, 0.1258, 0.1065, 0.0807, 0.0547, 0.0331, 0.0180, 0.0087, 0.0038, 0.0015, 0.0005, 0.0002

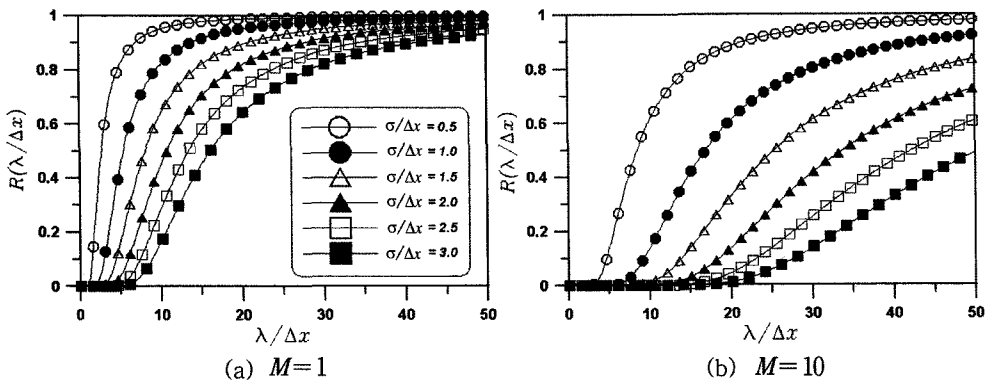


Fig. 1. Transfer function of FFT filter.

Table 1에서의 각 $\sigma/\Delta x$ 에 대한 전달함수 $R(\lambda/\Delta x)$ 의 변화를 Fig. 2에 도시하였다. 그림(a)와 그림(b)는 필터의 통과수(pass number) M 을 달리한 것이다. 그림(a)를 보면 $\sigma/\Delta x$ 가 증가할수록 0~5 $\lambda/\Delta x$ 범위내의 비교적 짧은 파장에 대한 필터링 효과는 좋아지나 그 이상의 파장에 대한 전달율도 아울러 감소함을 알 수 있다. 더욱이, 동일 데이터에 대하여 필터의 통과수 M 을 증가시키면 전달율은 R^M 이 되며 그림(b)에서 알 수 있듯이 전 파장대에서 전달율은 현저히 감소하게 된다. 따라서, 적절한 $\sigma/\Delta x$ 및 통과수를 선정하기 위해서는 필터링에 의하여 주 대상 시그널의 진폭이 감소되는지의 여부를 사전 검토할 필요가 있다.

3.3 Shapiro 필터

Shapiro(1970)는 수치계산 중 발생하는 잡음을 제거하기 위하여 3점 필터링을 평활요소의 개수에 따라 순차적으로 적용하는 다음과 같은 저주파 통과필터를 제시하였다.

$$1 \text{ 요소: } X_i^{(1)} = (1-S_1)X_i^{(0)} + 0.5S_1(X_{i-1}^{(0)} + X_{i+1}^{(0)})$$

$$2 \text{ 요소: } X_i^{(2)} = (1-S_2)X_i^{(1)} + 0.5S_2(X_{i-1}^{(1)} + X_{i+1}^{(1)})$$

$$N \text{ 요소: } X_i^{(N)} = (1-S_N)X_i^{(N-1)} + 0.5S_N(X_{i-1}^{(N-1)} + X_{i+1}^{(N-1)}) \quad (25)$$

여기서, $N=2, j=0, 1, 2, \dots$ 이며, 변수 S_K 는 다음 식에 의하여 정한다.

$$(2S_K)^{N/2} = -1; K = (II+1), \dots, N; II = \text{INT}(N/2) \quad (26)$$

식 (26)의 해는

$$S_K = \frac{1}{2} \{ \cos(\theta_k) + i \sin(\theta_k) \}; i = \sqrt{-1} \quad (27)$$

$$\theta_k = \frac{2\pi}{N} + k \left(\frac{4\pi}{N} \right); k = K - (II+1), \dots, (II-1) \quad (28)$$

와 같다. 예를 들면, $N=1$ 이면 $S_1 = 1/2$ 이고, $N=2$ 이면 $S_2 = -1/2$ 이며, $N=4$ 이면 $S_2 = +i/2$, $S_4 = -i/2$ 이다.

식 (25)는 각 평활요소에 대하여 공히 3점 필터링을 수행하나 각 요소들을 통합하여 다점 필터링의 식으로도 구성할 수 있다. 그러나, 다점 필터링은 데이터의 시점과 중점 근방의 값들에 적용할 경우 경계외측의 값들을 추정하여 사용하여야 하며 필터를 반복 적용할 경우 이 추정 오차가 내부로 전파되어 증폭되는 문제가 있다. 따라서, 본 연구에서는 다점 필터링보다는 식 (25)에서처럼 3점 필터링을 반복 수행하였다.

Shapiro에 의하면 요소 수 N 의 필터 (25)를 M 회 통과시키는 경우의 전달율은 다음과 같다.

$$R_N(\lambda/\Delta x) = \left[1 - \left\{ \sin \left(\pi \frac{\lambda x}{\lambda} \right)^{2N} \right\} \right]^M \quad (29)$$

필터요소 수 N 과 통과수 M 의 변화에 따른 전달율의 변화를 Fig. 3에 도시하였다. 모든 곡선이 공히 Nyquist 파수(재현가능한 최소 파수)에 해당하는 $\lambda/\Delta x = 2.0$ 이하에서는 전달율이 영으로 나타난다. 그러나, M 이 증가하면서 $\lambda \leq 10$ 에서의 비교적 짧은 파장에서는 전달율이 탁월하게 감소하나 긴 파장에서의 전달율 역시 감소하며 이 현상은 M 이 작을수록 현저하게 나타난다. 전반적으로 $N \leq 4$ 인 경우에는 고파수 잡음의 제거에는 효과적이나 아울러 대상 시그널도 필터적용에 의하여 감소될 수 있다. 이에 반하여 $N \geq 8$ 에서는 비교적 λ 의 변화에 따른 전달율의 기울기가 급하게 나타남을 볼 수 있으며 $N=8$ 에서는 $\lambda/\Delta x \leq 6$ 에서, $N=16$ 에서는 $\lambda/\Delta x \leq 4$ 에서, 그리고 $N=32$ 에서는 $\lambda/\Delta x \leq 3$ 에서 잡음의 완전제거가 가능하다.

$N=1, M=1$ 에서는 가우스 필터의 $\sigma/\Delta x = 0.5$ 인 경우와 매우 유사함을 볼 수 있다. 그러나, Shapiro 필터에서는 수식적으로 $\lambda/\Delta x \leq 2.0$ 의 잡음을 완벽히 제거하나 가우스 필터에서는 미미하나마 잔존하는 차이가 있다.

4. 저파수통과 필터의 성능분석

4.1 계산조건

경사면 천수변형 및 쇄파발생에 대한 Hansen과 Svendsen (1979)의 수리실험결과를 이용하여 상기 필터의 적용성을 고찰하였다. 본 수리실험은 Fig. 4에서 보이는 바와 같이 수심 $h_1 = 0.36$ m에서 시작하여 수심 $h_2 = 0.043$ m에 이르는 경사도 1:34.26을 갖는 경사면에 발생하는 규칙파의 파고변화를 측정한 것이다. 본 연구에서는 본래의 세가지 파랑조건 중 주기 2.0초, 입사파고 3.6 cm인 조건을 선별 이용하였다. 이 파랑조건에 대한 평탄수심 0.36 m에서의 파장은 $L = 3.53$ m, 파속은 1.77 m/s, 그리고 군속도는 1.56 m/s이다. 수치조파기와 스펜지층의 위치는 Fig. 4에서 보이는 바와 같다. 계산절점의 개수는 FFT필터의 사용을 위하여 2,048개로 고정하였으며 우측 스펜지층의 폭은 이에 맞추어 5.95 L로 정하였다. 절점간격은 $\Delta x = 0.05$ m로 동일하게 유지하였으며 시간분은 CFL 조건에 의하여 $\Delta t = 7.804 \times 10^{-3}$ s로 취하였다.

본 파동장 계산에서 필터는 입사파의 매 N_f 주기 마다, 그리고 쇄파가 N_B 번째 연속 발생할 때마다 적용하며, 필

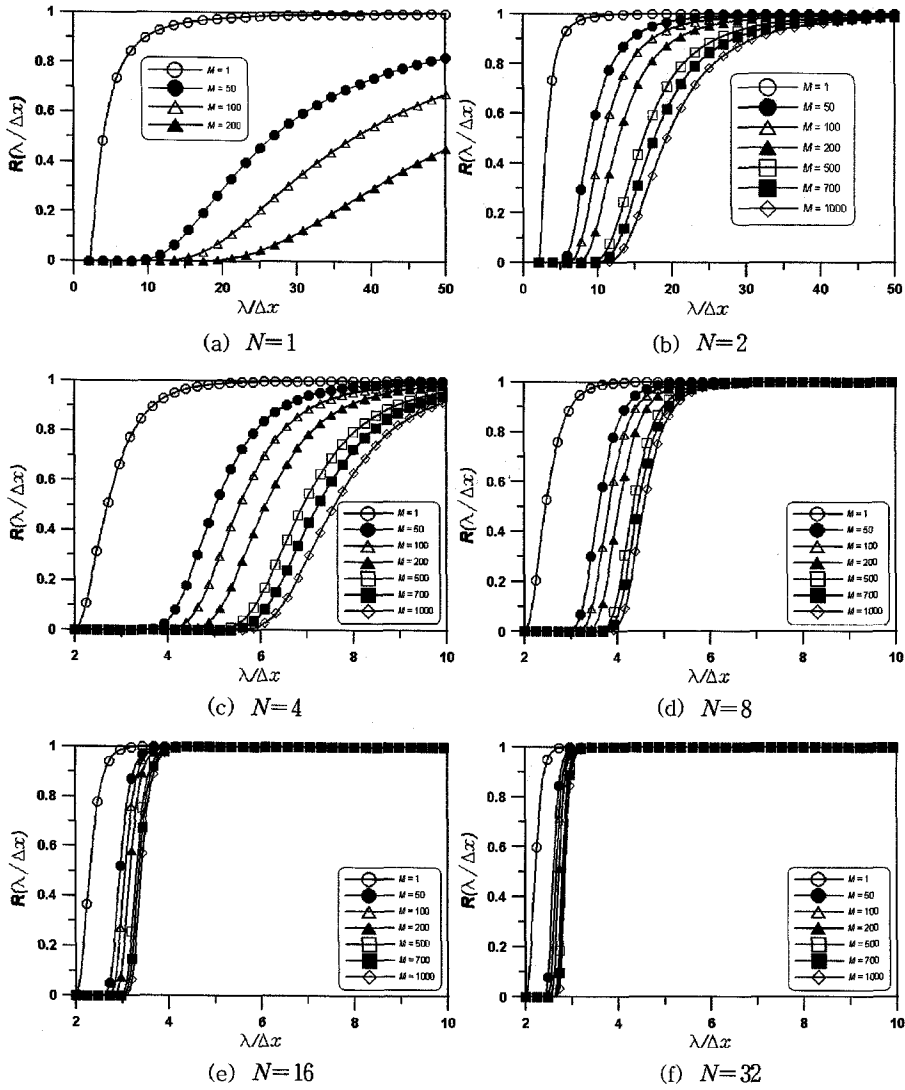


Fig. 3. Transfer function of Shapiro filter.

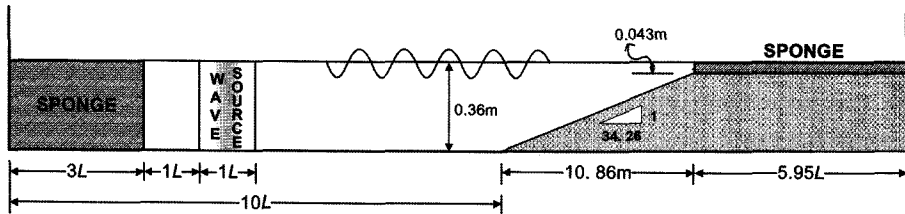


Fig. 4. Calculation domain.

터의 통과수 M 은 임의로 조절할 수 있도록 하였다. 각 필터의 성능분석을 위한 실험조건은 Table 2와 같다. 상기 수치실험은 규칙과 조건에서 수행되었으나 수치해석은 수치필터의 포괄적 고찰을 위하여 불규칙과 조건에 대해서

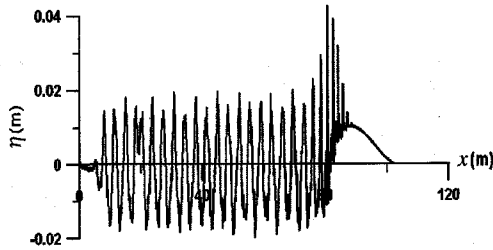
도 수행하였다.

4.2 필터의 성능분석

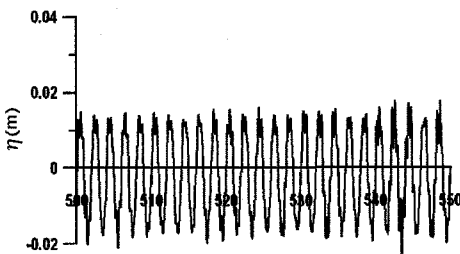
Fig. 5는 규칙과 조건에서의 스펙파형과 그리고 경사면

Table 2. Experimental conditions of filter analysis

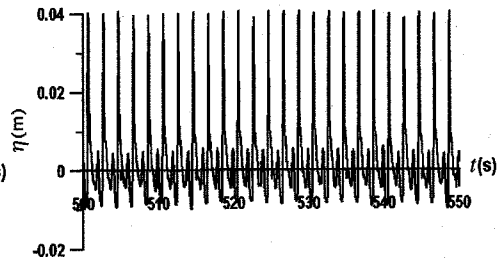
구분	필터	필터 적용간격		M (필터 통과수)
		N_T (시간 / 입사파 주기)	N_B (연속 쇄파발생 횟수)	
규칙파	FFT filter	3	200	1
	Gaussian filter	3	200	1
	Shapiro filter	3	200	1, 50, 1000
불규칙파	Shapiro filter	3	1	1, 50, 1000
			200	1 50



(a) Snap wave profile



(b) Beginning point



(c) Ending point

Fig. 5. Snap wave profile and the time series at the beginning and ending points of the slope (FFT filter, $\lambda_c/\Delta x = 4$, $M = 1$, $N_B = 200$).

시점($x = 70.6$ m)과 종점($x = 81.4$ m)에서의 파형 시계열이다. 본 파형 계산에서는 잡음제거를 위하여 FFT필터($\lambda_c/\Delta x = 4.0$)를 사용하였으며 총 계산시간은 550초(275 주기)로 하였다. 본 그림에서 경사면은 70.6 m~81.4 m에 위치하며, 경사면에서 각각 천수변형과 쇄파가 발생함을 볼 수 있다. 그림(c)에서는 쇄파 및 수심감소에 따른 비선형 파랑변형에 의하여 파장이 작은 파들(superharmonics)이 생성되어 있다. 그림(a)의 쇄파대 부근에서는 파형이 전체가 정수면 위에 위치하는데 이는 set-up효과에 의한 것이다. 파고는 수면변위 시계열에 zero-up-crossing법을 적용하여 계산하되 고주파수 파의 영향을 배제하기 위하여 유의파고를 취하였다.

FFT 필터($\lambda_c/\Delta x = 5.0$)를 적용하여 경사면 상 파형 시계열을 계산한 다음, 여러 다른 분석시간구간을 정하고 각각에 대한 경사면 파고분포를 계산하여 실험치와 함께

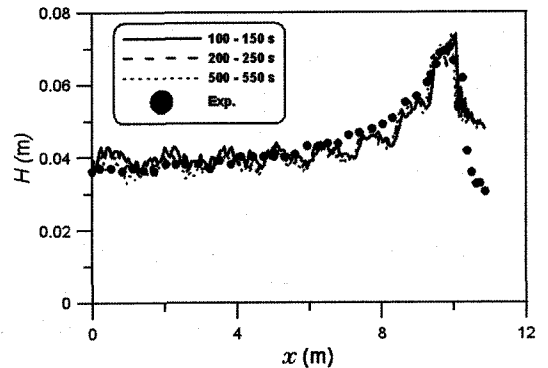


Fig. 6. Comparison of wave height variations for the different time segment of the analysis (FFT $\lambda_c/\Delta x = 4.0$, $M = 1$, $N_B = 2000$).

Fig. 6에 제시하였다. 시간구간에 관계없이 파고분포가 거의 유사하게 나타남을 볼 수 있다. 따라서, 이하 계산에

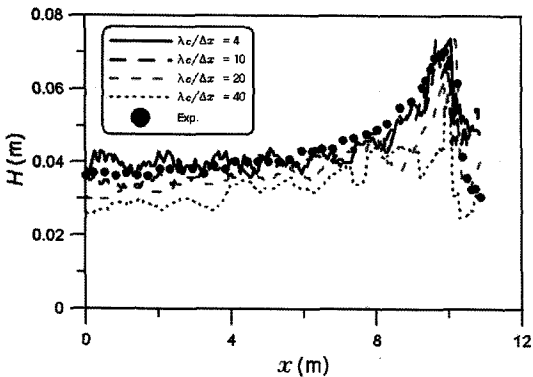


Fig. 7. Wave height variation for the change of $\lambda_c/\Delta x$ in FFT filter ($M = 1, N_B = 200$).

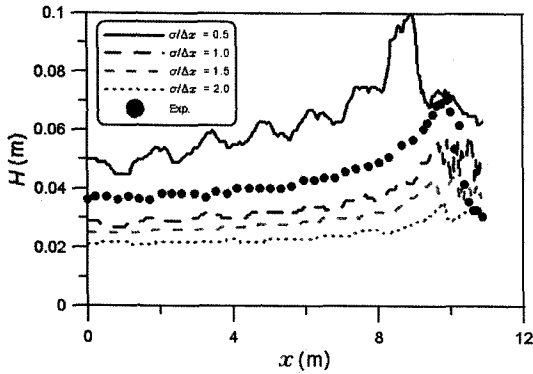


Fig. 8. Wave height variation for the change of $\sigma/\Delta x$ in Gauss filter ($M = 1, N_B = 200$).

서는 파고의 분석구간을 100~150초로 국한하였다. Fig. 6의 쇄파역에서 계산파고와 측정파고간의 다소의 차이는 사용된 쇄파모형의 특성에 기인된 것으로 보인다.

Fig. 7은 $\lambda_c/\Delta x$ 의 여러 조건에 대하여 FFT 필터를 적용한 결과이다. $\lambda_c/\Delta x=2$ 에서는 해가 발산하였다. $\lambda_c/\Delta x=4$ 에서 실험치와의 일치정도가 비교적 양호하나 $\lambda_c/\Delta x$ 가 증가하면서 실험치와의 차이가 증가함을 볼 수 있다. 이는 사용된 $\lambda_c/\Delta x$ 값이 과도할 경우 주 시그널을 감쇠시킬 수 있기 때문이다. 결과적으로, 쇄파에 따른 잡음을 효과적으로 제어하면서 주 시그널의 진폭을 보존하기 위해서는 $\lambda_c/\Delta x=4$ 정도의 절단파장을 사용하는 것이 바람직한 것으로 보인다.

한편, 가우스 필터의 적용결과인 Fig. 8을 보면 사용된 $\sigma/\Delta x$ 의 값에 따라서 상당한 차이를 보인다. Table 1에서 볼 수 있듯이 각 $\sigma/\Delta x$ 에 상응하는 $\lambda_c/\Delta x$ 가 20이내의 값 들임에도 불구하고 FFT 필터의 결과와 비교하여 볼 때 상대적으로 필터링에 의한 감쇠가 과도하게 나타나는 성향

이 있다. 이는 FFT 필터의 전달함수가 절단 파수에서 돌연적인 변화를 보이는 반면, 가우스 필터는 전달함수의 변화가 비교적 완만하여 주 시그널도 감쇠시키기 때문이다. 이에 반하여 $\sigma/\Delta x=0.5$ (또는 $\lambda_c/\Delta x=2.67$)에서는 계산파고가 실험치보다 월등 크게 나타나 있다. 이는 해가 발산하는 과정으로 보여 지며 가우스 필터가 FFT 필터 또는 Shapiro 필터와는 달리 최소한 $\lambda/\Delta x < 2$ 인 잡음(Nyquist 파장 이하)도 완벽하게 제거하지 못하기 때문인 것으로 보인다.

Fig. 9는 Shapiro 필터의 통과수 $M=1$ 에 대해서 필터 요소 수 N 을 달리하여 계산한 파고변화이다. $N \geq 2$ 에서는 계산치들이 유사하며 실험치와 대체적으로 잘 일치하는 반면, $N=1$ 에서는 실험치보다 작은 값들을 보이고 있다. 한편, Fig. 10과 Fig. 11은 각각 $N=2$ 와 $N=4$ 에 대하여 M 을 달리하여 계산한 파고변화이다. $N=2$ 에서는 M 이 증가할수록 평활효과는 좋아지나 파고감소가 커지며, $N=4$ 에서는 파고변화가 거의 M 에 무관함을 볼 수 있다. Fig. 3에서 보이듯이 N 이 증가할수록 M 의 효과가 감소하기 때문이다.

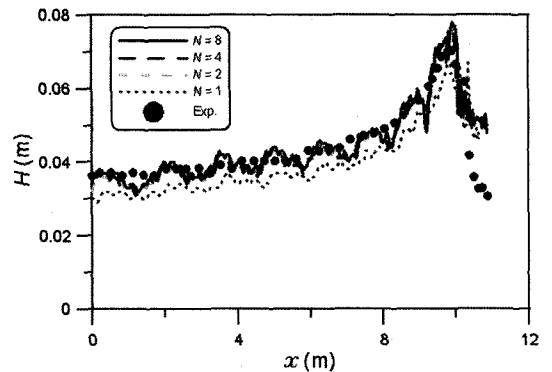


Fig. 9. Wave height variation for the different number of filter element in Shapiro filter ($M = 1, N_B = 200$).

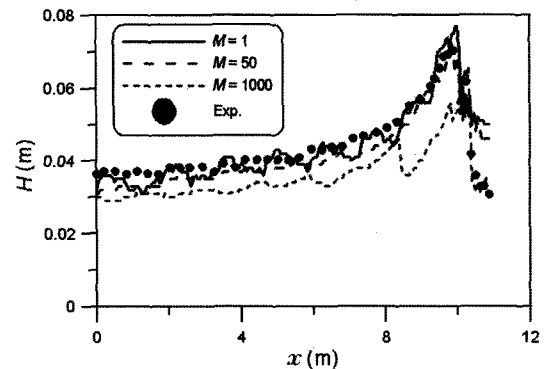


Fig. 10. Wave height variation for the different pass numbers of Shapiro filter ($N = 2, N_B = 200$).

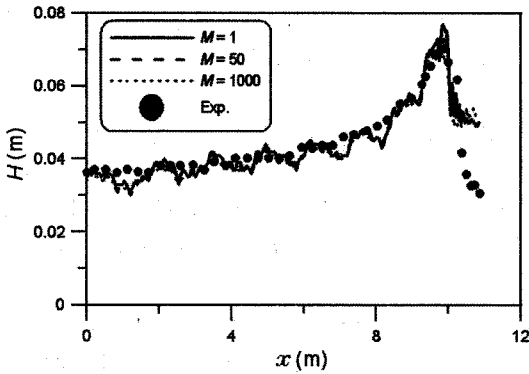


Fig. 11. Wave height variation for the different pass numbers of Shapiro filter ($N=4, N_B=200$).

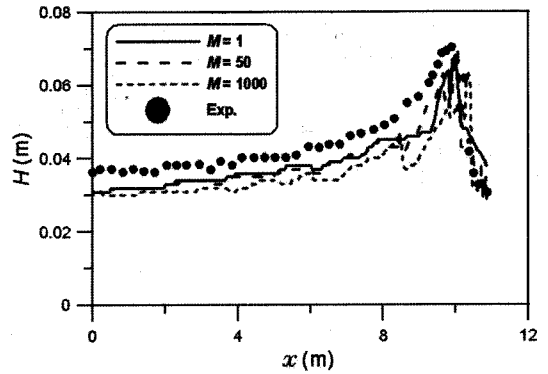


Fig. 13. Wave height variation for the different pass numbers of Shapiro filter ($N=2, N_B=1$).

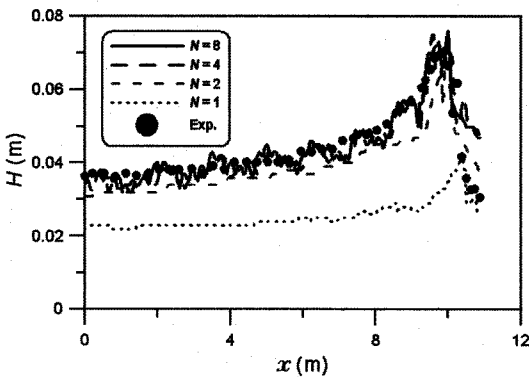


Fig. 12. Wave height variation for the different number of filter element in Shapiro filter ($M=1, N_B=1$).

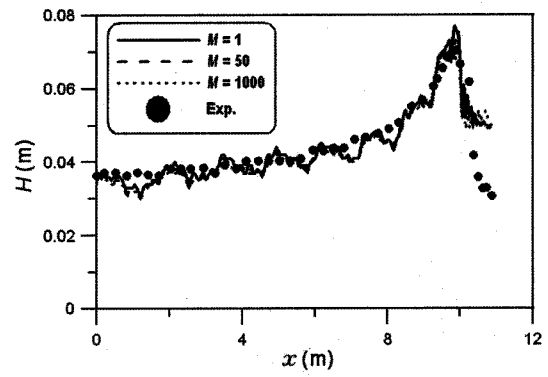


Fig. 14. Wave height variation for the different pass numbers of Shapiro filter ($N=4, N_B=1$).

쇄파에 대한 필터의 적용주기를 $N_B=1$ 로 대폭 축소하여 수행한 계산결과를 Fig. 12에 제시하였다. N 이 작을수록 파고가 감소하는 정도가 $N_B=200$ 의 경우보다 현저함을 알 수 있다. $N=2$ 에서 M 을 달리하며 계산한 Fig. 13을 보면 Fig. 10에 비해 평활효과는 제고되었으나 전반적으로 파고감소정도가 증가되어있다. 그러나, Fig. 14와 Fig. 11의 비교에서 알 수 있듯이 $N=4$ 에서는 M 의 증가에 따른 파고감소가 미미하게 나타났다. 계산시간은 $N_B=200$ 의 경우보다 현저히 증가하였다.

불규칙파의 경우에는 동일한 N 값에서 M 값을 크게 설정할수록 절단파장이 증가되어 결과적으로 작은 파장의 성분과 파고를 감쇠시킬 수 있는 가능성이 증가한다. 또한, 이와 같은 가능성은 N 값이 작을수록 증가한다. 따라서, 불규칙파의 경우에는 쇄파에 따른 잡음의 파장대와 불규칙파의 성분과 파장을 동시에 고려하여 절단파장을 정할 필요가 있다.

Fig. 15는 상기 규칙파의 경우와 동일한 유의파 체원을 갖는 Bretschneider-Mitsuyasu 스펙트럼(0.2~5.0 Hz)을 조파하여 $N=4$ 의 조건에서 계산한 스넵파형의 일례이다. 규칙파의 경우와 유사한 천수변형과 쇄파의 양상을 보이고 있다. 그러나, $M=1$ 과 $M=50$ 의 각각에 대한 파고변화와 규칙파 실험결과를 도시한 Fig. 16을 보면, 규칙파의 경우(Fig. 11) 보다는 미미하나 그 차이가 작음을 알 수 있다. 또한, 규칙파의 경우와 비교하여 천수변형 및 쇄파 고가 작게 나타나 있으며 Goda(1985)의 해석결과와 잘 부합하고 있다.

위에서 검토한 바와 같이 Shapiro 필터는 전달함수의 파장에 대한 기울기가 FFT 필터와 가우스 필터의 중간에 위치한다. 필터요소 수를 증가시킬수록 기울기가 증가하며, 동일한 요소수에서는 필터 통과수를 증가시킬수록 절단파장이 증가한다. 전반적으로 필터의 요소 수가 감소할수록, 그리고 통과수가 증가할수록 잡음의 제거효과는 증

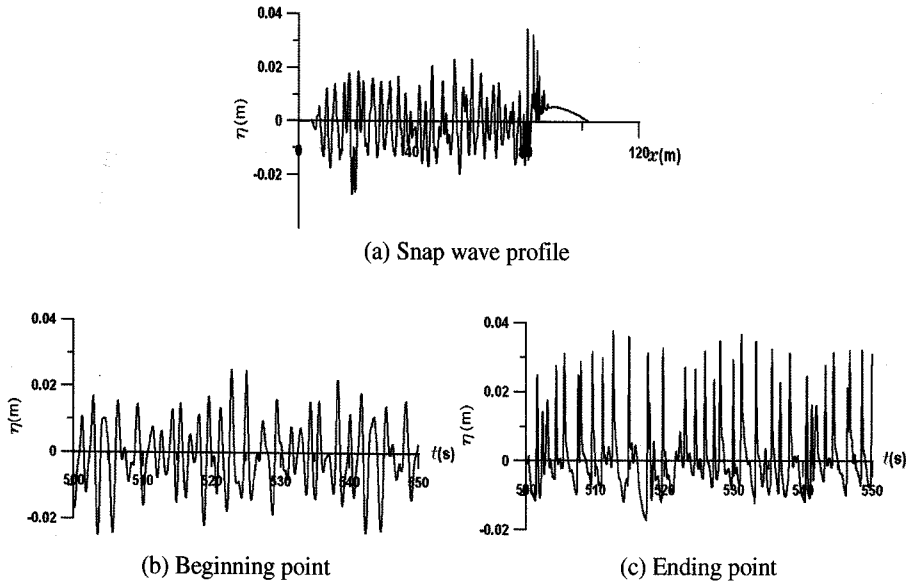


Fig. 15. Snap wave profile and the time series at the beginning and ending points of the slope (irregular wave, $N = 4$, $M = 50$, $N_B = 200$).

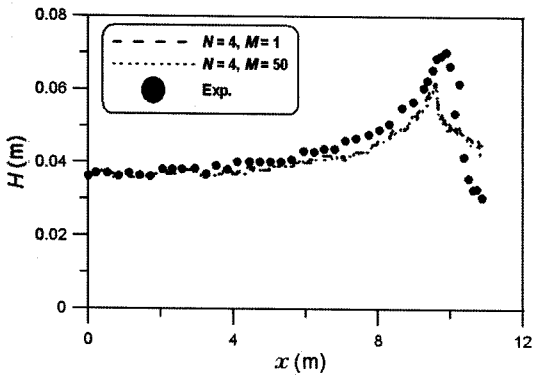


Fig. 16. Wave profile and wave height variation of random wave by Shapiro filter ($M = 4$, $N_B = 200$).

가하나 주 시그널의 감쇠효과 역시 증가한다. 이와 같이 잡음의 제거효과와 주 시그널의 보존은 일종의 교환관계 (trade-off)를 보인다. 또한, 계산시간 측면에서는 필터 요소수와 통과수가 증가할수록, 그리고 필터의 적용주기를 짧게 할수록 계산시간이 증가하며, 특히, 통과수와 적용 주기가 계산시간에 미치는 효과가 매우 크다. 본 연구에서 검토한 경사면 파동장에서는 요소수 4와, 50이내의 필터 통과수, 그리고 필터의 적용주기를 100~200 연속 쇄파 발생 시로 설정하는 것이 계산의 정확도 및 계산시간 측면에서 바람직한 것으로 나타났다. 그러나, Boussinesq

모델의 일반적 적용에서는 쇄파 잡음의 파장대가 각 쇄파 경우마다 다양하게 나타날 것이기 때문에 필터 사양 선정의 일반적 기준을 제시하기는 매우 어려우며 계산시간을 고려한 일종의 시행착오과정을 거쳐야 될 것으로 판단된다.

5. 결 론

일반적인 시간의존 비선형방정식의 수치해석을 수행하면 관련변수들의 비선형 상호작용에 따른 잡음이 발생하며 이를 효과적으로 제어하지 않으면 해가 급속히 발생하게 된다. Boussinesq 방정식을 이용한 파랑전파 계산에서도 이와 같은 잡음이 발생하게 되며 더욱이 쇄파발생에 따라 또 다른 형태의 잡음이 발생하게 된다. 따라서, 쇄파가 발생하는 파동장에서는 쇄파 잡음의 제거를 위한 추가적인 고려가 포함되어야 한다. 본 연구에서는 수치계산 중 발생하는 미세파장의 잡음을 제거하기 위하여 세가지 형태의 저파수통과 필터의 특성에 대하여 고찰하였다. 필터의 효능은 잡음제거효과, 주 시그널에 대한 감쇠 여부, 그리고 필터 적용시간에 대하여 검토하였으며 세부적 결론은 다음과 같다.

- FFT 필터는 주어진 입사파장의 범위 내에서 절단 (cut-off) 파장을 임의로 설정할 수 있는 장점이 있으며 적

용결과도 상당히 안정적이다. FFT 루틴을 사용하기 때문에 필터적용은 매우 빠르나 대상 데이터의 개수를 2의 멱수로 맞추어야 한다. 따라서, FFT 필터는 데이터 개수의 조절이 가능한 경우에 국한하여 적용하는 것이 바람직하다.

- 가우스 필터는 절단(cut-off) 과정에서 전달함수의 기울기가 매우 완만하여 미소파장의 잡음의 제거 효과는 탁월하나 주 시그널의 파고도 감쇠시킬 가능성이 높다. 따라서, 계산시간은 매우 짧게 소요되나 반복적 수치계산의 중간에 사용하는 것은 바람직하지 않다.

- Shapiro 필터에서는 필터요소 수를 증가시킬수록 파장에 대한 전달함수의 기울기가 증가하며, 동일한 요소 수에서 필터 통과수를 증가시킬수록 절단파장이 증가한다. 전반적으로 필터의 요소 수가 감소할수록, 그리고 통과수가 증가할수록 잡음의 제거효과는 증가하나 주 시그널의 감소효과 역시 증가한다. 계산시간 측면에서는 필터 요소 수와 통과수가 증가할수록, 그리고 필터의 적용주기를 짧게 할수록 계산시간이 증가한다. 경사면 파동장의 경우, 요소 수 4에 대하여 50이내의 통과수와 100~200 정도의 적용주기가 타당한 것으로 판단된다. 그러나, Boussinesq 모델의 일반적 적용에서 계산의 정확성과 적절한 계산시간을 달성하기 위해서는 적정 필터 매개변수 설정을 위한 시행착오적 계산이 요구된다.

사 사

본 연구는 한국해양연구원에서 수행하는 2006년도 이어도 종합해양과학기지의 활용연구 중 “비선형 불규칙 파랑전파모델의 쇄파거동에 대한 수치해석” 사업의 결과중 일부를 발췌한 것임.

참고문헌

- 전인식, 성상봉, 김귀동, 심재설 (2005). Boussinesq 방정식을 이용한 수중 천퇴에서의 파랑변형 및 파랑류 계산, 한국해양·해양공학회지, 17(3), 202-212.
- 전인식, 김귀동, 심재설 (2006). 수중 천퇴에서의 쇄파거동 예측을 위한 Boussinesq 방정식 모델의 적용, 한국해양·해양공학회지, 18(2), 154-165.
- Castleman, K.R. (1996). Digital image processing, Prentice Hall.
- Goda, Y. (1985). Random Seas and Design of Maritime Structures, University of Tokyo Press, 68-87.
- Gonzalez, R.C. and Wintz, P. (1987). Digital Image processing, Addison-Wesley.
- Hansen, J.B. and Svendsen, I.A. (1979). Regular waves in shoaling water experimental data, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark.
- Jain, A.K. (1989). Fundamentals of digital image processing, Prentice Hall.
- Kennedy, A.B, Chen, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (2000). Boussinesq modelling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D., J. Wtrwy, Port, Coast. and Oc. Engrg., 126, 39-47.
- Nwogu, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation, J. Wtrwy., Port, Coast. and Oc. Engrg., ASCE, 119(6), 618-638.
- Shapiro, R. (1970). Smoothing, filtering, and boundary effects, Review of geophysics and space physics, 8(2), 359-386.

Received January 4, 2007

Accepted September 3, 2007