한국수학사학회지 제20권 제3호(2007년 8월), 167-180

분석의 환원적 기능이 대수 발달에 미친 영향

서울대학교 대학원 김재홍
masshong@empal.com

경인교육대학교 산학협력단 권석일
steinein@dreamwiz.com

건국대학교 홍진곤
dion@konkuk.ac.kr

이 연구의 목적은 분석의 환원적 기능이 대수 발달 과정에 중요한 역할을 하였음을 밝히는 것이다. 이를 위하여 먼저 고대 그리스 시대의 분석을 환원적 분석과 파푸스식의 분석으로 나누어 정리하여 이 양자에서 모두 환원적 성격의 분석이 작용하고 있음을 보였다. 파푸스식의 분석 및 종합의 과정은 변환, 탐색, 작도, 논증의 네 단계로 나누어 볼 수 있으며, 이 중 변환은, 해법이 실제로 존재하는지의 여부와 별개로 주어진 문제가 풀리기 위한 조건을 또 다른 문제로 변환하는 과정을 일컫는 것으로 일종의 환원이라고 볼 수 있다. 수학자들은 분석의 환원적 기능에 힘입어 새로운 문제를 만들어내며, 역사의 어떠한 순간에 이르러서는 새로운 관점에서 수학을 바라볼 수 있게 된다. 기호 대수가 탄생하는 과정 이면에는 분석적 사고가 그 바탕을 이루고 있으며, 분석의 환원적 기능은 기호 대수의 발달에 있어 중요한 역할을 하였다.

주제어 : 분석, 환원적 분석, 대수, 방정식.

0. 서론

이 연구의 목적은 분석의 환원적 기능이 대수 발달 과정에서 중요한 역할을 하였음을 밝히는 것이다. 분석이 대수의 기원과 발달에 있어 중요한 역할을 했다는 것은 비교적 널리 알려진 사실이다. 대수의 기원 중 하나라고 할 수 있는 고대 바빌로니아 시대의 가정법(false position method)은 분석적 아이디어를 바탕으로 하고 있으며([5]), 이후 그리스 시대에 이르러서는 디오판토스(Diophantus, 약 250년경)가 미지수를 문자로 표현하는 것에서도 분석적 사고를 찾아볼 수 있고, 16세기에 비에트(Viéte, François, 1540-1603)에 의해 기호 대수가 탄생하는 과정에도 분석적 사고가 밑바탕에 놓여있다([13])고 알려져 있다. 그런데 여기서 이러한 각 과정에서 사용되는 분석적

사고는 '구체적으로' 무엇을 말하며 '어떻게' 대수 발달 과정에서 작용하였는가하는 질문이 생긴다.

이 질문에 대답하기 위해서는 우선 '분석'이라는 고대로부터의 방법론, 혹은 아이디어가 단일한 개념인지 아니면 개념적인 수준에서 구분해볼 수 있는 몇 가지 하위 단계의 복합체인지를 살펴보아야 한다. 만약 전자라면 분석을 명확하고 구체적으로 정의하는 것에서 논의를 출발하여야 하지만 후자라면 분석이라는 아이디어를 몇 가지 하위 단계, 내지는 개념으로 구분하여 분석이라는 아이디어를 좀 더 세밀한 수준에서 기술하는 것에서 논의를 시작하여야 하기 때문이다.

분석은 고대 그리스 시대에서부터 사용되었다. 헤론(Heron, 약 75년경)은 원론 제 II권의 주석에서 분석을 언급하면서, 분석을 이용하여 처음 13개의 정리를 증명하였고, 아폴로니우스(Apollonius, 기원전 약 262-190)는 그의 저서 원추곡선, 분할(Cutting-off of a Ratio) 등에서 분석을 사용하고 있다. 또한 아르키메데스(Archimedes, 기원전 약 287-212)는 구와 원기둥에 대하여(On the Sphere and Cylinder)의 2권의 모든 문제를 분석-종합으로 해결한다([13, p.386, p.392-393]).

이러한 분석-종합의 방법을 체계적으로 정리한 수학자는 파푸스(Papus, 약 320년경)이다. 그는 그의 저서 수학집성 제 VII권에서 분석-종합의 정의를 기술하고, 분석의 영역에 속하는 9개의 논문을 소개하고, 8개 논문에 대한 보조정리를 모아놓았다([9, p.70]). 파푸스의 기술에 따르면 분석은 이론적 분석과 문제적 분석으로 구분된다. 분석의 과정은 증명하고자 하는 것이나 구하고자 하는 것을 증명되었다거나 구하였다고 가정한 후, 이로부터, 이미 알려진 정리 혹은 제 1원리(공리, 공준, 정의)에 도달하면서 종료되고, 종합은 분석의 역순이 된다([7, p.8-10]).

현대에 들어 분석법에 대한 논의는 주로 파푸스의 분석-종합에 대한 기술을 바탕으로 하고 있다. 즉 증명하고자 하는 것이나 구하고자 하는 것을 증명되었다거나 구하였다고 가정하고 이로부터, 연역을 할 것인지, 그 전제를 찾아가야 하는 지에 대한, 분석 방향에 대한 것이 논의의 주요 방향이었다([2, p.52]). 그러나 이러한 논의는 종합에 대하여 비추어 본 분석에 대한 논의를 중심으로 하고 있어, 분석 이면에 있는 아이디어를 명확하게 드러내는 데 어려움이 있다. 이하에서 살펴보겠으나 분석이 하는 역할은 제 1원리에 근거한 엄밀한 논증이나 작도를 이끌어 내는 과정 이상의 것을 포함한다. 종합의 역순이라는 관점에서 벗어나 분석을 바라보게 되면, 후대의 다른 수학에 분석이 영향을 미친 바를 좀 더 명확하게 바라볼 수 있게 된다.

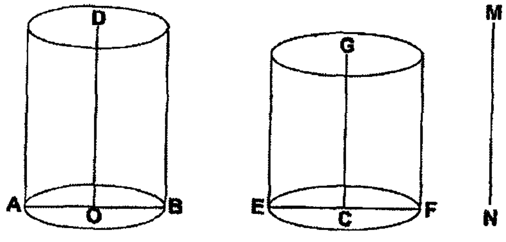
우리는 이하의 논의에서 고대 그리스 기하 분석-종합의 과정이 몇 가지 하위 과정으로 나뉘어질 수 있음을 밝히고, 그 중 환원이라고 부를 수 있는 과정이 분석의 근원적인 아이디어를 담고 있음을 드러낸 후, 분석의 환원적 기능이 기호 대수의 형성 과정에 중요한 역할을 하였음을 밝히고자 한다.

1. 그리스 시대의 환원적 분석

환원(reduction)은 하나의 문제 혹은 정리를, 만약 알려지거나 작도가능하게 되기만 한다면(해법을 찾을 수만 있다면) 원래의 문제 혹은 정리를 확증하게 되는 다른 문제나 정리로 변환하는 것을 말한다([12, p.167]). 고대 그리스의 수학자들은 환원된 문제를 해결함으로써 주어진 문제를 해결하고자 하였다([12, p.167]). 환원은 그리스 수학 초기부터 사용되었다. 유클리드의 원론이 탄생하여 기하가 공리 체계화되기 전에 이미 히포크라테스(Hippocrates of Chois, 기원전 약 440년 경) 등이 문제의 연구를 위하여 주어진 문제를 다른 문제로 환원하여 연구하였다는 기록이 있다. 실제로 히포크라테스는 그의 저서 활꼴의 구적(Quadrature of Lunes)에서, 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제를, 주어진 선 사이에 몇 가지 조건을 만족하는 적절한 선분을 삽입하는 문제로 환원하였다([11, p.332]). 기하가 공리-연역적으로 체계화되기 전인 그리스 수학 초기의 분석인 환원은 환원된 문제에 대한 지식과 풀이 기법이 부족하였기 때문에 그 풀이가 늘 보장되었던 것은 아니다. 그러나 이러한 환원적인 분석을 통해 고대 그리스 시대 수학자들은 문제 해결의 상대적인 출발점을 찾거나([3, p.6]), 구체적인 문제에서 일반적인 문제의 연구로 나아가는 기회를 얻곤 하였다([11, p.331]).

그리스 초기의 환원의 모습은 유클리드식의 기하학이 정립된 이후에도 아르키메데스 등에 의하여 사용된다. 다음은 아르키메데스의 구와 원기둥 제 2권, 명제 1에 나오는 환원을 중심으로 하는 분석의 과정이다.

하나의 원기둥이 주어졌을 때, 주어진 원기둥과 동일하면서(부피가 같으면서) 지름과 높이가 같은 원기둥을 작도하여라.



분석

문제가 해결되었다고 가정하면, 두 원기둥은 같으며, $EF=CG$이다.

그러면 $\dfrac{AB^2}{EF^2}=\dfrac{CG}{OD}=\dfrac{EF}{OD}$이다.

MN은 $EF^2=AB\cdot MN$을 만족한다고 하면 $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{EF}{MN}$이다.

그러나 또한 $\frac{EF}{OD}=\frac{AB^2}{EF^2}=\frac{AB^2}{AB\cdot MN}=\frac{AB}{MN}$이다. 그래서 $\frac{AB}{EF}=\frac{MN}{OD}$이다.

따라서 $\frac{AB}{EF}=\frac{EF}{MN}=\frac{MN}{OD}$이고, EF, MN은 AB와 OD사이의 두 비례중항이다.

종합

AB와 OD사이의 두 비례중항 EF, MN을 얻어서, 밑면이 지름 EF인 원이고, 높이 CG가 EF와 같은 원기둥을 그려라.

그러면, $\frac{AB}{EF}=\frac{EF}{MN}=\frac{MN}{OD}$이기 때문에, $EF^2=AB\cdot MN$이다.

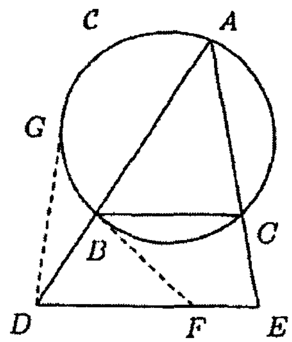
그러므로 $\frac{AB^2}{EF^2}=\frac{AB}{MN}=\frac{EF}{OD}=\frac{CG}{OD}$이다.: 따라서 두 원기둥의 밑면은 그 높이에 비례한다([3, p.7-8]).

이 분석에서는 지름과 높이가 같으면서, 주어진 원기둥의 부피와 같은 원기둥을 작도하는 문제가 두 양이 주어졌을 때, 두 선분 사이의 연속된 두 개의 비례중항을 찾는 문제로 환원된다. 여기서 환원된 문제는 주어진 문제 풀이의 제안을 하는 역할을 한다. 종합에서는 이 제안에 따라 주어진 두 선분 사이의 두 비례중항을 작도함으로서 주어진 문제를 해결한다. 환원을 중심으로 하는 분석이 파푸스식 분석과 구분되는 점은 분석과 종합의 과정의 한쪽 끝에 공리, 공준, 정의, 증명된 정리 등이 놓여있지 않다는 점이다. 즉, 환원은 해법의 존재성과 별개로 문제를 변환시키는 것 자체가 그 일차적인 목적이 된다. 환원은 기하가 유클리드 원론에 의하여 연역적 체계를 갖춘 기하학이 발전함에 따라 그 구조가 정교화된 파푸스식의 분석1)에서도 찾아볼 수 있다. 히드(Heath)의 논의에 따르면 파푸스식 문제적 분석과 종합은 각각 두 부분으로 나뉘어진다([6, p.141]). 파푸스식의 분석을 구체적으로 살펴보자. 파푸스의 수학집성 7권의 명제 107은 다음과 같다.

위치가 (주어진) 원 ABC와 두 (점) D, E에 대하여 (점) A에서 꺾이는 선 DAE를 그려 BC가 DE와 평행하도록 하여라.2)

1) 파푸스식의 분석은 다시 이론적 분석과 문제 분석으로 분류할 수 있다. 이 중 본 고에서 말하는 파푸스식 분석은 엄밀하게 말하여 문제 분석을 의미한다. 이론적 분석은 명제 증명에 관련된 것으로 변환과 논증의 두 단계로 구성되어 있는 분석 과정이다. 이 두 가지 분석 중 그리스 시대에 여러 저작물에 걸쳐 널리 사용된 방법은 문제 분석이었다([9, p.67]). 본 논문은 문제 분석의 환원적 기능을 주로 다루고 있기 때문에 이하에서 '파푸스식의 분석'은 파푸스의 문제 분석을 칭한다.

2) 괄호 안의 단어는 역자가 고대 그리스어에서는 그 의미가 명확하여 생략되었지만, 독자들의 이해를 위해 첨가한 것이며, 꺾은 괄호 안의 문구는 글의 흐름 상, 그 목적에 맞게 역자가 첨가한 것이다. 본 논문에서는 명제 107의 '분석과 종합'의 자세한 수학적 분석은 생략하였지



[1] 성취되었다고 하자. 그리고 B로부터 BF가 접선이 되도록 그려라, 그리고 BF가 접선이며, BC는 (원을)자르고, 각 FBC, 즉, 각DFB는 각 A와 같다. 그러므로 점 A, B, E, F는 한 원 위에 있다. 따라서 AD와 DB로 이루어지는 직사각형은 ED와 DF로 이루어지는 직사각형과 같다.

[2] 그러나 AD와 DB로 이루어진 직사각형은 주어져 있다. 왜냐하면 BD, DA로 이루어진 직사각형이 주어졌기 때문이다. 그러므로 또한 ED, DF로 이루어진 직사각형은 주어졌다. 그리고 DE가 주어졌다. 따라서 또한 DF 또한 주어졌다. 그러나 또한 그 위치도 주어졌다.: 그리고 D도 주어졌다. 그러므로 F 또한 주어졌다. 주어진 점 F로부터, 위치가 주어진 원으로 접선 FB를 그렸었다. 따라서 FB 또한 위치가 주어졌다. 또한 원 ABC 또한 위치가 (주어졌다). 그러므로 점 B는 주어졌다. D 역시 주어졌다. 따라서 AD는 위치가 (주어졌다.) 그 원 또한 위치가 (주어졌다.) 따라서 A가 주어졌다. E 역시 주어졌다. 그러므로 DA, AE 각각은 위치가 주어졌다.

[3] 문제의 종합은 다음과 같이 될 것이다. 원 ABC, 그리고 주어진 점들 D, E를 그려라. 그리고 ED와 DF로 이루어진 직사각형이 (D에서 그린)접선으로 이루어진 정사각형과 같게 하여라. 그리고 F로부터 직선 FB가 원 ABC에 <접하도록> 그려라. 그리고 DB를 이어라. 그리고 A를 만들어라. 그리고 AE와 BC를 이어라.

[4] 이제 BC는 DE와 평행하다고 말한다. ED와 DF로 이루어진 직사각형은 (D로부터의) 접선으로 이루어진 정사각형과 같기 때문에, <AD와 DB로 이루어진 직사각형은 역시 접선으로 이루어진 정사각형과 같다>. 따라서 각 A, 즉 각 CBF는 -BF는 접선이고, BC는 (원을) 자르므로- 각 BFD와 같다. 그리고 그것들은 엇각이다. 그러므로 BC는 DE와 <평행>이다([9], p. 238-240).

히드는 분석-종합에 대하여 논의하면서 분석은 변환(transformation)과 탐색(resolution), 종합은 작도(construction)와 논증(demonstration)으로 나눌 수 있다고 말하고 있다([6, p.141]). 위의 예에서 [1]은 변환, [2]는 탐색, [3]은 작도, [4]는 논증에 해당한다[3].

여기서 파푸스식의 분석을 특징지우는 부분은 바로 탐색이다. 분석에서 탐색의 역할은 변환에서 얻은 제안이 실행가능한 것인가를 탐색하는 것이다. 탐색에는 독특한 형식의 명제가 사용한다. 즉 "어떤 것의 위치, 크기, 종류가 주어진다면, 다른 것의 위치, 크기, 종류가 주어진다."는 형식의 명제를 사용한다. 이러한 명제들은 유클리드의 Data에 있는 것이다. Data는 위와 같은 형식의 명제들을 다루는데, 각 명제의 증명은 원론의 명제와 Data의 명제들의 명제를 이용하는 것으로서, 원론을 기반으로 하여, 원

만, 자세한 분석을 보기를 원하는 독자는 Behboud, A., Greek Geometrical Analysis, p.77-78을 참고하기 바란다.

3) 종합의 과정인 작도와 논증은 이 논문에서 자세하게 논의하지 않는다.

론의 응용 예들을 모아 놓은 것이다([3, p.11], [8, p.8-9]). 바로 이점이 유클리드 기하를 기반으로 하는 파푸스식 분석의 특징이다.

이제 다시 위의 문제로 돌아가 보자. 위의 문제는 원과 원 밖의 두 점이 주어졌을 때, 원 위에 한 점을 작도하여 그 점에서 원 밖의 두 점을 이은 직선들과 원과의 교점을 이은 직선이 원 밖의 두 점을 지나는 직선과 평행하도록 하는 것이다. 이 문제를 풀기 위한 첫 번째 단계는 바로 $AD \cdot DB = ED \cdot DF$라는 관계를 도출하는 것이며 바로 이 과정이 변환의 과정이다. 변환의 과정은 일종의 환원으로서 주어진 문제를 풀기 위하여 다른 문제를 만들어내는 과정이다. 즉, 파푸스식의 분석 속에는 환원과 더불어 $AD \cdot DB = ED \cdot DF$를 이용하여 A가 주어진 것, 즉 작도 가능하다는 것을 보이는 과정, (풀이의) 탐색과정이 덧붙여져 있다. 환원을 중심으로 그리스 분석의 발달 과정을 보자면, 순수한 환원을 거쳐 파푸스의 분석으로 발전한 것으로 볼 수 있다([2. p.29]).

이상에서 고대 그리스 시대의 분석을 환원적 분석과 파푸스식의 분석으로 나누어 정리하여 이 양자에서 모두 환원적 성격의 분석이 이루어지고 있음을 보였다. 파푸스식의 분석 및 종합의 과정은 변환, 탐색, 작도, 논증의 네 단계로 나누어 볼 수 있으며, 이 중 변환은, 해법이 실제로 존재하는지의 여부와 별개로 주어진 문제가 풀리기 위한 조건을 또 다른 문제로 변환하는 과정을 일컫는 것으로 일종의 환원이라고 볼 수 있다. 환원은 문제 풀이의 제안을 하지만, 파푸스식의 분석법에 비하여, 그 해를 보장하지는 못한다. 그러나 새로운 수학 연구를 이끈다는 점에서 수학 발달에 중요한 역할을 한다. 본 고에서는 분석의 이러한 측면을 분석의 환원적 기능이라고 일컬을 것이다. 분석의 환원적 기능은, 제 1원리나 알려진 정리로 나아가 그 역 과정을 통하여 연역적 논증을 만들어내는 분석의 연역적 논증 탐색의 기능과 구분된다.

2. 대수발달에 있어서 분석법의 영향

이 장에서는 대수의 발달에 있어 분석적 사고와 분석법이 구체적으로 어떠한 영향을 미쳤는지 살펴보고 기호 대수의 형성에 분석의 환원적 기능이 중요한 역할을 하였음을 드러내고자 한다.

2. 1. 고대 및 중세의 대수에서 사용된 분석적 사고

바빌로니아 시대에는 방정식을 가정법을 이용하여 해결하였다. 가정법은 임의의 숫자가 문제의 조건을 만족한다고 가정하고, 계산을 한 후 그 계산 결과와 원래 문제의 조건을 비교하여, 해를 찾는 방법이다. 그 과정을 구체적으로 예시하면 다음과 같다.

문제1

직사각형의 가로의 길이는 세로의 길이에서 $\frac{1}{4}$을 뺀 것과 같으며, 대각선은 40'이다. 이때 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구하여라.

풀이

세로의 길이의 임시값을 1° 라고 하자. 그 다음 1° 에서 $\frac{1}{4}$(즉 15')을 빼서 가로를 계산하면 45'이 나온다. 이때 (1°)2= 1° 이고, 두 변의 값을 제곱해서 합하면 1° 33'45''가 된다. 1° 33'45''의 제곱근을 취하면 1° 15'이다 이것은 대각선의 임시값이다. 대각선의 참값은 40'이므로 얻어진 대각선의 임시값보다 작다. 그 다음 대각선의 임시값 1° 15'의 역수를 계산하면 48'이 나오고 여기에 참값 40'을 곱한다. 그러면 32'이 되는데, 이것이 비례적 조정 요소이다. 이를 이용해 32'×1° =32'과 32'×45'=24'을 얻고, 이렇게 얻은 32'과 24'이 각각 세로와 가로의 길이의 참값이다 ([1. p.38-39]).

이와 같은 풀이에서 임시값 1° 를 놓는 행위는 오늘날의 방정식에서 미지수 x를 사용하는 것과 완전히 동일한 사고라고 볼 수는 없지만, 문제가 풀렸다고 보고 사고를 진행한다는 점에서 분석적 사고의 일종으로 볼 수 있다([14, p.16]에서 재인용). 또한 위 풀이에서 임시값 사용 이외의 또 다른 분석적 사고를 볼 수 있다. 풀이과정은 문제가 해결되었다고 보고, 임시값을 제시한 다음, 그로부터 뒤따라 나오는 것을 구하게 된다. 즉 임시값이 문제의 조건을 만족한다고 생각하며 계산을 하여, 그 결과값을 구하고 또 이로부터 어떻게 하면 주어진 것에 도달할 수 있는지를 추론하는 분석법의 과정과 흡사하다. 이것을 방정식의 의미에서 살펴본다면, $f(x)=a$가 문제의 조건일 때, 임시값 1° 로부터 좌변을 계산하여 그 결과 $f(1°)$에 도달하고, $f(1°)$로부터 어떻게 하면 문제에서 주어진 우변 a와 같게 될 수 있는지 생각하면서 즉 어떻게 하면 등식이 되는지를 생각하면서, $f(1°)$와 a의 관계를 살핀 후, 이 관계를 임시값 1° 에 적용하여 참값을 구하게 된다. 위 문제의 경우 $f(1°)$와 a가 비례관계, 기하적으로는 닮음 관계가 성립함을 이용하게 된다.

이러한 대수에서의 분석적 사고는 고대 그리스의 디오판토스에게서도 살펴볼 수 있다. 그는 방정식을 해결하는 방법으로서 가정법을 사용한다([10, p.156]). 그러나 바빌로니아 시대의 방정식 풀이와 다른 점은 미지수를 뜻하는 “arithme”라는 새로운 요소를 도입하고 기호 s로 나타낸다는 것이다.

문제2

어떠한 두 수가 있어서 두 수 중 임의로 한 수를 고르더라도, 그 수의 제곱에 다른 수를 더한 것이 제곱수가 되는 두 수를 찾아라.

풀이

먼저 첫 번째 수를 s, 다른 수를 $2s+1$이라고 하면 첫 번째 수의 제곱 더하기 두 번째 수는 제곱이다. 두 번째 수의 제곱 더하기 첫 번째 수는 $4s^2+5s+1$이다. 이것은 제곱이 되어야 한다. 나는 이 제곱을 $2s-2$로 만들겠다. 그러면 이것은 $4s^2+4-8s$가 되고 s는 $\frac{3}{13}$이고 첫 번째 수는 $\frac{3}{13}$, 두 번째 수는 $\frac{19}{13}$이 된다([15, p.101]).

여기서 디오판토스는 모든 수를 문제의 조건을 만족하는 s와 관련된 식으로 표현한다. 구하고자 하는 두 수를 s와 $2s+1$로 표현하여, 자연스럽게 $s^2+(2s+1)$이 제곱이 되게 하고, 문제의 또 다른 조건을 $(2s+1)^2+s=4s^2+5s+1$로서 표현한다. 그리고 이 식을 제곱으로서 보고, $as^2+bs+c=t^2$의 형식의 방정식을 해결하려고 한다. 디오판토스는 이러한 형식의 방정식을 다음 세 가지 방법으로서 다룬다([15, p.102]). 첫 번째 방법은 $a=e^2$이면, $t=es+m$으로 놓고, 대입을 하여, 양 변에서 as^2을 제거하여, s에 대한 일차 방정식을 만드는 것이다. 두 번째 방법으로서 $c=f^2$이면 $t=f+ms$를 대입하여 $gs^2=hs$ 형태의 방정식을 이끌어 낸 후, 그 해 $s=\frac{h}{g}$를 구한다. 세 번째 방법은 bs가 없는 형태의 방정식에 적용되는 것으로서 s 대신에 s+1을 대입하여 두 번째 형태의 방정식으로 변환하여 푼다([15, p.102]). 위에서 제시된 문제를 구체적으로 살펴보면, 디오판토스는 $4s^2+5s+1$이 제곱이 되는 s를 구하기 위하여 미지수 s가 포함된 제곱식을 생각하게 되는데, 임의로 s의 제곱식을 놓지 않는다. 즉 $4s^2+5s+1$에서 일차 방정식을 이끌어 내기 위해 s의 계수를 2로 놓게 되며 양의 근이 나오도록 $2s-2$의 제곱식 $(2s-2)^2=4s^2-8s+4$을 생각하게 된다. 디오판토스는 양 변을 비교해 가며 체계적으로 일차 방정식으로 변환하게 된다[4].

디오판토스의 문제 풀이는 문제가 해결되었다고, 미지수를 구하였다고 가정하여 미지수 s를 제시한 다음, 이로부터 뒤따라 나오는 것을 구하면서, 주어진 것, 이미 참이라고 알려진 것에 도달하려는 분석적 사고로서 진행되고 있다고 볼 수 있다. 문제의 조건을 만족하는 미지수 s가 있으며, 이로부터, 또 다른 해는 $2s+1$이 되며, 이로부터, 문제의 조건에 의해 $4s^2+5s+1$이 뒤따라 나오며, 제곱식 $(2s-2)^2=4s^2-8s+4$을 이용하여, 이미 알려진 일차 방정식에 도달하여 문제를 해결한다. 디오판토스의 문제 풀이는 바빌로니아 시대에 임시값을 사용한 문제 풀이법보다 진일보 한 것이었다. 미지수를 기호로 도입함으로서, 미지수로서 문제 조건을 파악하고, 미지수와 문제조건 사이의 관련성을 이용하여 문제를 해결한다. 위 문제에서 두 수 중 하나의 수를 미지

4) $2s-2$대신 $2s-3$을 선택하여 $4s^2+5s+1=(2s-3)^2=4s^2-12s+9$를 풀면, 1과 $\frac{8}{17}$의 또 다른 근을 얻게 된다.

수 $2s+1$로 표현되며, 다른 수는 문제의 조건인 이 수의 제곱에 더해졌을 때, 그 결과값이 제곱이 되도록 $2s+1$로 표현된다. 또한 $4s^2+5s+1$이 제곱수가 되어야 하는 문제의 조건에 있어서도 이를 미지수 s로 표현하려 하였으며, $4s^2+5s+1$와의 관계(일차 방정식을 유도하여 양근이 나오는 관계)를 고려하여 $(2s-2)^2$로 표현한다. 이러한 표현은 문제의 구조를 대수식으로 연구할 수 있게 해준다.

디오판토스의 풀이에서는 바빌로니아의 가정법과 같이 문제가 풀렸다고 가정하고, 그로부터 결론을 이끌어 낸 후, 즉 문제 조건에 맞게 계산을 하여, 주어진 것에 도달하려는 동일한 풀이 양상을 볼 수 있다. 다만 그 차이는 미지수 s를 도입함으로서, 문제 구조를 좀 더 체계적으로 연구할 수 있으며, 미지수와 문제조건사이의 관련 하에서, 문제의 구조를 연구하며 문제를 푼다는 것이다.

이상에서 우리는 고대 및 중세의 원시적인 대수의 발달 과정에 구하고자 하는 수를 이미 구하였다고 가정하고 미지의 수를 임시값이나 문자로 나타내어 문제의 조건에 맞게 나타내어 주어진 것 혹은 이미 증명된 것에 도달하는 분석적 사고를 볼 수 있었다. 가정법에서는 분석적 사고로 임시값($f(1^\circ)$)을 도출하여 문제를 해결하게 되며, 디오판투스식 풀이에서는 분석적 사고를 통하여 주어진 문제를 방정식으로 환원한다.

2. 2. 기호 대수

대수 발달에 있어 기호 대수의 출현 역시 분석법과 밀접한 관련을 맺고 있다. 대수적 절차를 기하 문제 해결의 분석법으로서 사용하고자 하는 경향이 나타나면서 비에트의 기호 대수가 출현하게 된다. 특히 이 과정에는 환원적 분석의 과정이 큰 부분을 차지하고 있다.

르네상스 시대, 그리스 원전이 유럽에 소개되면서, 파푸스의 분석법 또한 유럽의 수학자들에게 알려졌다. 수학자들이 분석법을 흥미를 가지고 연구하기 시작하면서 대수가 분석법으로 사용되기 시작한다. 이것은 산술 조작과 기하 조작 사이의 유사성에 의해 촉발된 것으로서, 산술에서의 덧셈과 뺄셈은 각각 기하에서 도형을 잇고, 절단하는 것으로 해석되며, 두 선분 a, b가 주어졌을 때, 곱셈은 두 선분으로 이루어지는 직사각형으로, 나눗셈은 주어진 도형 A와 선분 a에서 주어진 도형 A와 넓이가 같은 선분 a와 함께 직사각형을 구성하게 되는 선분 b를 찾는 것으로 해석된다. 이러한 유사성이 인식되면서 길이와 넓이는 측정단위에 대한 수로서 표현되어 산술에서의 조작은 실용기하에서 사용되기 시작하였다([4, p.125]). 그러나 산술에서의 조작은 수를 대상으로 하는 것으로서, 기하에 적용될 때, 곱셈과 나눗셈의 경우 그 결과는 조작 대상의 차원이 변화하게 된다. 이러한 차원의 변화는 직선과 넓이의 단위를 도입하여 다루어지지만, 수로서는 기하적 대상을 표현하는 데는 문제가 있었다. 즉 통약 불가능한 두 선분을 수로 표현할 수 없었으며, 무리수는 중세 아랍 수학자들이 수치적 방정식을 해결하는 법칙으로서 도입되었지만, 르네상스시대까지 수로서 인식되지 않았다. 따라서 대수 조작의 기하로의 적용은 차원에 대한 문제는 여전히 해결되지 않은 체 남아

있게 된다.

비에트는 수치적 맥락과 기하적 맥락에서 모순 없이 효과적으로 사용할 수 있는 기호대수를 개발하려고 하였다. 그의 기호 대수의 대상은 산술 맥락에서는 수를 의미하고, 기하 맥락에서는 기하 요소를 의미하는 추상적인 양이다. 이렇게 범주를 넘나드는 과정에서 분석의 환원적인 기능이 역할을 하게 된다. 비에트는 조작 대상의 본질과 관계없이 양에 적용되는 계산의 기호 절차를 창조하였고, 이를 위해 미지량뿐만 아니라 오늘날의 계수에 해당되는 것 역시 문자로 나타내었다([4, p.147]). 그의 추상량은 기호로 표현된다. 차원의 요소를 받아들여, 한 종에서 다른 종으로 비율적으로 오르내리는 양(magnitude)들을 scalar terms(거듭제곱되는 magnitude)라고 하였으며, 첫 번째 scalar term을 side 혹은 root라고 하였으며, 이후 차수에 대해 the square, the cube, the square-square, the square-cube, the cubo-cube 식으로 명칭지었다. 또한 비교되는 양 즉 상수항에 대하여, 위 scalar term과 같은 종류의 양을 length 혹은 breadth, plane, solid, plano-plane, plano-solid, solido-solid라고 하였다([16, p.16-17])[5].

다음에서, 비에트식의 분석의 예로서 카테발디(Ghetaldi)의 예를 살펴보자([4, p.103-104]).

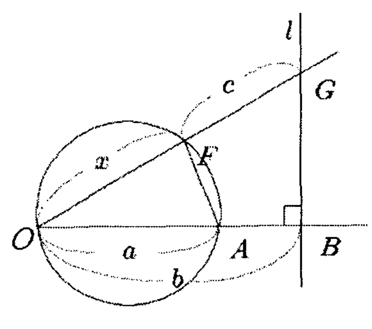
지름 OA인 반원이 주어져 있다. OA의 길이는 a이다. 이때, OA의 연장선과 점 B에서 직교하는 직선 l이 주어져 있으며, OB의 길이가 b라고 하자. F와 G에서 각각 반원과 직선 l과 만나면서 FG의 길이가 c가 되는 직선을 구하여라.

분석

1. 구하였다고 가정하자: OF를 x라고 하고, AF가 그려졌다고 하자.
2. 닮음 삼각형에 의해, $x:a=b:(x+c)$이고, 따라서 $x^2+xc=ab$.
3. 그러므로 $x=\sqrt{\frac{c^2}{4}+ab}-\frac{1}{2}c$, 따라서 x는 주어진 것이다.

작도

1. 지름이 OB인 반원을 그려라: OB에 수직인 AC를 그려라. OC를 그려라.
   [$OC=\sqrt{ab}$의 작도]
2. $CD=\frac{1}{2}c$가 되도록 BCD를 그려라. OD를 그려라
   [$OD=\sqrt{CD^2+OC^2}=\sqrt{(\frac{1}{2}c)^2+ab}$]



5) 이 부분은 한글로 번역하였을 경우 그 맥락이 훼손될 것을 우려하여 영어로 기술한다.

3. 중심이 D이고 반지름이 DC인 원을 그려라. OD와의 교점을 E라고 하자.

[$OD=\sqrt{(\frac{1}{2}c)^2+ab}$에서 $ED=\frac{1}{2}c$를 뺀 것이다. 따라서 $OE=x$이다.]

4. 주어진 반원 위에 $OF=OE$가 되도록 F를 표시하여라.

[$OF=x$의 위치를 지움] OF를 연장하여, L과 만나는 점을 G라고 하자.

5. OFG는 구하고자 하는 선이다. 즉 $FG=c$이다.

비에트는 궁극적으로 조작에 대하여 어떠한 의미도 부여하지 않으려고 하였으나 실제 문제를 분석할 때는 수치적 문맥과 기하적 문맥의 조작의 해석이 필요하였다. 그는 세 단계의 분석 기술인 번역(zetetics), 변환(poristics), 역-번역(exegetics 혹은 rhetics)을 제시하였다([16, p.11-14]). 여기서 번역은 문제를 대수 방정식으로 번역하는 것이며, 변환은 대수적 비례식(proportionalities)와 등식(equallities)을 조작하는 것이고, 역-번역은 방정식을 산술과 기하문맥에서 번역하는 것이다. 기하 문제의 분석에서는 주어진 요소와 구하고자 하는 요소 사이의 관계를 탐구하고, 그 관계를 통해서 구하고자하는 요소를 구하게 된다. 이러한 기하 문제가 방정식으로 환원되면 방정식은 근(구하고자 하는 요소)과 계수(주어진 요소)사이의 관계를 나타내게 된다. 첫 번째 단계인 번역에 의해 산술 문제와 기하문제가 방정식으로 환원되면서 문제에서 구하고자 하는 양과 주어지는 양은 방정식에서는 근(root)과 계수로 새로운 대수적 관계를 수립하게 되는 것이다. 비에트의 '번역'은, 구하고자 하는 대상과 주어진 대상 사이의 관계적 구성에 도달하는 것이다([13, p.404]). 이렇게 도달된 관계는 새로운 일반적인 문제를 형성하게 된다. 이것은 1장에서 본 바와 같이 주어진 조건을 만족하는 원기둥을 작도하는 문제가 주어진 두 양 사이의 연속된 두 비례중항을 구하는 문제로 환원되는 것과 유사하다. 주어진 양 사이의 연속된 두 비례중항을 구하는 문제는 원기둥 작도문제와 상대적으로 별개의 것이다. 요컨대 그 문제 자체만을 연구하는 것이 가능한 동시에 그 문제의 해법을 원기둥의 작도로 역-환원하여 해석할 수 있다. 분석의 환원적 기능이라는 측면에서 비에트의 연구를 바라보면, 비에트가 이룩한 바는 기하적인 맥락에서 이루어지는 분석을, 새로운 도구를 사용하여 미지량과 기지량 사이의 대수적 관계를 해결하는 새로운 문제로 환원하였다는 것이다. 환원된 문제는 그 문제 자체로 연구의 대상이 될 가능성이 생긴다. 비에트는 실제로 다음과 같은 종류의 정리를 만들었다.

정리 I

만약 $A^2+AB=Z^2$에서 세 비율[6])이 있어서 Z가 내항이고, B는 외항들의 차라면, A는 작은 외항이 된다.

6) 현대적인 용어를 사용하자면, 등비수열을 이루는 세 항 a, ar, ar^2을 말한다. 이때, Z는 등비중항을 의미한다.

(중략)

Z가 세 비율의 내항이고, B를 외항들의 차라면, 작은 외항은 얻을 수 있다. 이것을 A라고 하자. 그러면 큰 외항은 $A+B$이며 두 외항을 곱하면 A^2+BA이 된다. 세 비율에서 두 외항의 곱은 내항의 제곱과 같기 때문에 $A^2+BA=Z^2$가 된다([16, p.161-162]).

정리 I을 통해 비에트는 거듭제곱항이 있는 방정식 $A^2+AB=Z^2$의 구조를 보여주고 있다. 이 방정식에서 B는 두 외항의 차이며, Z는 내항이고 A는 외항 중, 작은 양을 의미하고 있는 비를 이르고 있는 세 항의 관계를 나타내고 있으며, 이러한 관계를 이용하여 방정식을 해결할 수 있게 된다. 예를 들어 방정식 $x^2+10x=144$의 풀이에서 144는 내항의 제곱을 의미하므로, 12를 내항으로 하면서 두 외항의 차가 10이 되는 수 중, 작은 값을 찾는 것이다.

이와 같은 발전은 제 1장에서 살펴본 바와 같이 고대 그리스 시대 수학자들이 환원적인 분석을 통해 문제 해결의 상대적인 출발점을 찾거나, 구체적인 문제에서 일반적인 문제의 연구로 나아가는 기회를 얻었던 상황과 유사하다. 결국 분석의 환원적 기능은 우선 기하적인 문맥에서 그리스 시대에 연구되어왔던 여러 가지 문제를 비에트의 시대에 이르러 새롭게 해석함으로써 다양한 형태의 새로운 관계식을 생산하는 데 영향을 미쳤고, 동시에 그 문제 자체로 연구의 중심이 넘어가게 하는 데 도움을 줌으로써 기호 대수의 발달에 있어 중요한 역할을 하였다고 볼 수 있다.

3. 결론 및 제언

우리는 분석이 대수의 기원과 발달에 있어 분석적 사고가 구체적으로 어떠한 영향을 미쳤는가를 살펴보았다. 이를 위하여 먼저 고대 그리스 시대의 분석을 환원적 분석과 파푸스식의 분석으로 나누어 정리하여 이 양자에서 모두 환원적 성격의 분석이 이루어지고 있음을 보였다. 새로운 문제 풀이를 제안하는 환원의 생산적인 힘을 분석의 환원적 기능이라고 말한다면, 이는 제 1원리나 알려진 정리로 나아가 그 역 과정을 통하여 연역적 논증을 만들어내는 분석의 연역적 논증 탐색의 기능과 구분된다. 기호 대수의 발달 과정에서 이루어졌던 진보는 고대 그리스 시대 수학자들이 환원적인 분석을 통해 문제 해결의 상대적인 출발점을 찾거나, 구체적인 문제에서 일반적인 문제의 연구로 나아가는 기회를 얻었던 상황과 유사하다. 분석의 환원적 기능은 우선 기하적인 문맥에서 그리스 시대에 연구되어왔던 여러 가지 문제를 비에트의 시대에 이르러 새롭게 해석함으로써 다양한 형태의 새로운 관계식을 생산하는 데 영향을 미쳤고, 동시에 그 문제 자체로 연구의 중심이 넘어가게 하는 데 도움을 줌으로써 기호 대수의 발달에 있어 중요한 역할을 하였다고 볼 수 있다.

분석은 고대 기하나 원시 대수의 연구에서뿐만 아니라 현대에 이르기까지[7] 계속적으로 중요한 역할을 하는 일종의 거대한 수학적 아이디어이다. 분석을 구하고자 하는 것을 구하였다고 가정하는 사고방식으로만 정의하는 것은 분석이라는 아이디어를 연구함에 있어 충분하지 못하다. 분석은 몇 가지의 서로 다른 관점에서 살펴볼 필요가 있는 방법이자 아이디어이다. 이는 함수에 대하여 단일한 수학적 정의가 가능하지만 구체적인 함수 개념의 연구에 있어서는 서로 다른 측면에서 접근하는 것이 좀 더 용이한 것과 같다고 할 수 있다. 이 연구에서 우리는 분석의 여러 측면 중 환원적인 측면에 초점을 맞추어 기호 대수 발달에서의 분석의 역할을 구체적으로 살펴보았다. 분석이라는 아이디어 안에 존재하는 다른 여러 가지 측면은 무엇이며 그 각각의 측면들이 어떻게 수학의 발달 과정에 작용하고 있는지를 구체적인 수준에서 살펴보는 연구는 앞으로도 계속적으로 필요할 것이다.

참고 문헌

1. 김성준, 대수의 사고요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대 박사학위 논문, 2003.
2. Behboud, A., *Greek Geometrical Analysis*, Centaurus, 37 (1994) 52-86.
3. Berggren, J. L., van Brummelen, G., *The role and development of geometric analysis and synthesis in ancient Greece and medieval Islam,* In P. Suppes, J. M. Moravcsik, H. Mendell (Eds). Ancient & Medieval translations in the exact sciences (pp.1-31), CSLI Publications, 2000.
4. Bos, H. J. M., *Redefining geometrical exactness: Descartes' transfornation of the early modern concept of construction*, Springer-Verlag, 2001.
5. Furinghetti, F., Somaglia, A., *The method of analysis as a common thread in the history of algebra: Reflections for teaching*, In H. Chick, K. Stacey & J. Vincent (Eds). Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: the future of the teaching and learning of algebra, 2000.
6. Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary vol I*, Dover Publications, 1956.
7. Hintikka, J., Remes, U., *The method of analysis*, D. Reidel Publishing Company, 1974
8. Ito, S., *The medieval latin translation of the Data of Euclid*, University of Tokyo Press, 1980.
9. Jones, A., *Pappus of Alexanderia Book 7 of the Collection part 1,* Springer-Verlag, 1986.
10. Klein, J., *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Dover

7) 방정식 풀이에서 구하고자 하는 것을 x로 놓는 것은, 구하고자 하는 것을 이미 구한 것으로 가정하는 전형적인 분석적 사고이다.

Publications, 1968.
11. Mahoney, M. S., *Another look at Greek Geometrial analysis*, Archive for History of Exact Sciences, 5 (1968), 318-348.
12. Morrow, G. R., *Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements,* Princeton University Press, 1970.
13. Panza, M., *Classical sources for the concepts of analysis and synthesis*, In M. Otte & M. Panza (Eds.), Analysis and synthesis in mathematics (pp.365-414). Kluwer Academic Publlishers, 1997.
14. Radford, L., *The historical origin of algebraic thinking,* In R. Sutherland, et al. (Eds.), Perspectives on school algebra (pp.13-36). Kluwer Academic Publishers, 2001.
15. Van der Waerden, B. L., *Geometry and algebra in ancient civilizations,* Springer-Verlag, 1983.
16. Viéte, F., *The analytic art(T. R. Witmer, Trans),* The Kent state university press. 1983.

Analysis by reduction in the development of algebra

Seoul National University, Graduate **Kim, Jae Hong**
Gyeongin National University of Education **Kwon, Seok-Il**
Konkuk University **Hong, Jin-Kon**

In this study, we explored the role of analysis in the algebra development. For this, we classified ancient geometric analysis into an analysis by reduction and a Pappusian problematic analysis. this shows that both analyses have the function of reduction. Pappus' analysis consists of four steps: tranformation, resolution, construction, demonstration. The transformation, by which conditions of given problem is transformed into other conditions which suggest a problem-solving, seems to be a kind of reduction. Mathematicians created new problems as a result of the reductional function of analysis, and became to see mathematics in the different view. An analytical thinking was a background at the birth of symbolic algebra. the reductional function of analysis played an important role in the development of symbolic algebra.

Key words: analysis, analysis by reduction, algebra, equation.

2000 Mathematics Subject Classification: 01-99

ZDM Subject Classification: H10

논문 접수: 2007년 6월 심사 완료: 2007년 7월