한국수학사학회지 제20권 제3호(2007년 8월), 147-166

코사인 법칙의 발달과정 분석과 논증을 통한 확장에 대한 연구*

경상대학교 수학교육과 **권영인**
yikwon@gnu.ac.kr
경상대학교 대학원 **서보억**
eukeuk@hanmail.net

본 연구에서는 코사인 법칙의 역사적 기원에 대해 생각해 보고, 코사인 법칙이 역사적으로 어떻게 발전되고 변천되었는지에 대한 수학사적인 분석을 실시한다. 이러한 분석을 통해 코사인 법칙의 구면과 사면체로의 확장을 탐구한다. 또한, 삼각형에서의 코사인법칙을 바탕으로 일반적인 다각형에서 코사인 법칙이 성립함을 논증적 방법을 통해 어떻게 정당화되어질 수 있는지에 대해 구체적으로 살펴본다.

주제어 : 수학사, 코사인법칙, 구면 코사인법칙, 코사인법칙의 일반화

I. 서론

수학사의 중요성에 대해서는 많은 학자들의 연구결과와 교육현장을 통해 쉽게 확인할 수 있다. 수학교육을 위해서는 현대수학을 이해하는 것이 필요하고 현대수학을 이해하기 위하여 수학사를 보아야 한다고 지적하고 있다([2]). 실제로 최근 10년 동안 수학사를 주제로 하는 논문이 340여 편이 발표되어지는 등 활발한 연구가 이루어지고 있다. 그 중에서 수학교육에서 교수학습의 방법적 측면으로서의 수학사의 이용이 320여 편으로 대다수를 차지하고 있다. 이러한 생각의 바탕에는 '수학을 학습하면서 학생들은 인류가 수학적 지식을 획득하면서 지나왔던 길을 짧게 반복한다' 는 수학의 역사-발생적 원리가 큰 영향을 미치고 있다. 즉, 역사-발생적인 원리는 어떤 개념이 어떤 실제적인 문제에서 발생되었으며 어떻게 사용되었는가에 대한 고찰을 통해 수학적 개념의 도입에 대한 근거를 부여할 수 있다는 논리이다([4]).

이러한 필요성에 의해 한 가지 수학적 개념인 '코사인 법칙'을 본 연구의 주제로 선택하였다. 왜냐하면, 오랜 시간동안 인간의 문명은 천문학과 수학의 도움을 많이 받았고, 이러한 수학과 천문학의 발달이 인간의 문명을 좌우했다고 평을 하는데 이러한

* 이 연구는 2007년도 경상대학교 학술진흥사업 연구비에 의하여 수행되었음(RPP-2007-054)

수학과 천문학의 발전 사이에 가장 다양하게 활용되어진 것 개념 중의 한 가지가 코사인 법칙이기 때문이다.

또한, 박홍경([2])은 수학을 위해 부여된 수학사의 역할을 두 가지로 나누었는데 그 중의 한 가지가 미래를 예측하는 활동이라고 보고 있다. 이것은 우리가 수학사를 연구하는 과정에서 그리고 수학사적 사실을 분석 후에 새롭게 알게 된 사실로부터 어떤 수학적 개념을 확장하고 일반화할 것인가에 대한 고찰이 필요하다는 것이다. 그리고 이러한 개념이 어떻게 발전될 것인가에 대한 제언을 필요로 한다는 것을 알 수 있다([5]). 따라서, 본 연구에서는 한 가지 수학적인 사실인 '코사인 법칙'이 역사적으로 어떻게 변천, 발전하였는지에 대한 과정을 살펴보고, 이 개념이 어떻게 확장되어질 것인가에 대한 고찰과 함께 다양한 제언을 통해 코사인법칙이 어디로 나아갈 것인가에 대한 방향을 제시하고자 한다.

코사인 법칙에 대한 선행연구를 살펴보면, 권영인, 서보억([1])에 의해 '코사인 제 2 법칙의 다양한 증명방법 분석', 한인기([6])에 의해 '유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구', Lee, J. R([11])에 의한 'The Law of Cosines In a Tetrahedron' 가 있다. 첫째는 다양한 방법으로 증명방법을 체계화시켰고, 둘째는 유추를 통해 코사인정리를 다각형으로 일반화하고 그 사실을 벡터를 도입하여 증명하고 있고, 마지막은 사면체에서의 코사인법칙을 수학적인 입장에서 소개하고 있다.

II. 코사인 법칙의 수학사적 발달과정의 분석

코사인법칙에 대한 최초의 문헌상의 기록은 기원전 3세기로 거슬러 올라간다. 최초의 코사인법칙에 대한 기록을 살펴보고, 이를 바탕으로 그리스후기, 로마·이슬람시대, 근대로 나누어 코사인법칙이 어떻게 발전, 변화하였는지 살펴본다.

1. 최초의 코사인 법칙

코사인법칙에 대한 최초의 문헌은 유클리드가 저술한 <원론>이다. 이 책의 2권 12, 13번째 명제에서 코사인법칙에 대해 서술하고 있다. 이 문헌에서의 코사인 법칙은 대수적인 식이나 삼각함수의 형태는 존재하지 않았고 단지 기하학적인 명제로 구성되어져 있었다([1]). 구체적으로 유클리드의 <원론>에 제시된 내용은 다음과 같다.

[정리1] 둔각삼각형에서 둔각의 대변 위의 정사각형은 둔각을 끼는 두 변 위의 정사각형의 합보다, 둔각을 끼는 변의 하나와 이 변에 수선이 내려지고, 이 둔각에의 수선에 의해서 외부에 잘려진 선분으로 에워싸인 직사각형의 2배만큼 크다(<원론> 2권 명제12).

[정리2] 예각삼각형에서 예각의 대변 위의 정사각형은 예각을 끼는 두 변 위의 정사각

형의 합보다, 예각을 끼는 변의 하나와 이 변에 수선이 내려지고, 이 예각에의 수선에 의해서 외부에 잘려진 선분으로 에워싸인 직사각형의 2배만큼 작다(<원론> 2권 명제13).2. 그리스시대

유클리드의 <원론>에 나타난 코사인 법칙은 상당히 보편적으로 많은 수학자와 천문학자들에 의해서 사용되었을 것으로 생각되어진다. 실제로 그리스 후기에 활동하였던 수학자의 업적과 그리스와 폭넓은 교류를 하였던 인도의 수학자의 업적을 통해 그 사실을 쉽게 확인할 수 있다.

첫째, 그리스의 수학자 헤론(Heron, 10~75)은 '헤론의 공식'을 발견하기 위해서 코사인 법칙을 폭넓게 사용하였을 것이다. 또한, 인도의 수학자 브라마굽타(Bramagupta, 598~670)는 헤론의 공식을 사각형으로 확장시켰다. 이 공식의 발견과 증명을 코사인 법칙을 이용하였을 것으로 추측되어지는데, 실제로 헤론의 공식과 브라마굽타 공식을 한인기([4])는 코사인법칙을 이용하여 자연스럽게 확장시켜주고 있다.

둘째, 그리스의 수학자이자 천문학자인 톨레미(Ptolemy, 85~165)는 알마게스트(Almagest, 수학대계)에서 평면기하를 넘어서는 구면기하에 대해 서술하고 있다. 그가 구면기하를 서술한 이유는 평면삼각법으로는 천문현상에 대한 분석이나 해석이 불가능하다는 사실을 인식하였고, 우주 질서의 해석을 위해서 구면기하가 중요하다는 사실을 깨닫고 그것에 대해 서술하였다. 비록 평면에서의 코사인 법칙을 대체할 수 있는 더 향상된 법칙이 필요하다는 것을 깨달았지만 실제로 알아내지는 못하고 말았다. 하지만, 코사인 법칙을 공간으로 확장해야 함을 인식하고 있었음은 분명하다.

3. 로마·이슬람시대

당대 최고의 천문학자중의 한 사람이었던 톨레미에 의해 필요성이 인식되었던 코사인 법칙의 구면으로의 확장은 그리스시대에는 그 결실을 보지 못한다. 결국 그리스시대에서는 유클리드의 두 정리를 능가하는 발전된 형태의 코사인 법칙은 나타나지 않았다. 로마시대는 실용성을 강조하는 사회적인 흐름으로 수학과 천문학은 역사적 발전을 이루지 못하지만, 중세 이슬람 수학자들을 통해 코사인 법칙은 평면을 넘어 구면으로 확장되는 중요한 수학적 업적과 더불어 고대 그리스 수학을 근대 유럽으로 전달하는 중요한 교량의 역할을 감당하게 된다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 톨레미의 정신을 이어 받아 구면 기하에 대해 깊은 관심을 보였던, 10세기초 터키지역에서 활동한 수학자이자 천문학자인 알-바타니(al-Battani, 868~929)가 있다. 그는 1년이 365일 5시간 46분 24초임을 삼각법을 이용하여 최초로 밝혀내었고, 톨레미의 연구결과들을 종합하여 유클리드의 <원론>에 나오는 코사인 법칙에 대한 두 정리를 구면 기하로 확장하는데 큰 기여를 하였다. 그는 최초로 'sinvers'라는 기호를 사용하였는데 이 기호는 오늘날의 코사인과 같은 의미를 가지는 것으로 다음과 같다.

$$\sin vers(A) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

비록 구면에서의 코사인 법칙을 형식화시키는 데는 조금은 부족하였지만, 평면에서의 코사인 법칙을 구면으로 확장하는데 위대한 업적을 남겼다([9]).

둘째, 알-카리리(Al-Khalili, 1320~1380)는 14세기 후반 시리아의 다마스커스에 살았던 수학자이자 천문학자다. 그는 이슬람 교인들이 기도할 시간을 결정하는 것을 비롯해 시간과 관련된 일을 맡았다. 이러한 일을 수행하기 위해 가장 중요하게 사용한 것 중의 하나가 구면에서의 코사인 법칙에 관한 것이다. 그는 알-바타니의 업적을 이어 받아 천문학에서 구면에 대한 문제를 풀기 위한 표를 만들었는데 이 표가 구면에서의 코사인 법칙과 유사한 방법을 사용하였다는 것이다. 그는 구면에서의 코사인 법칙을 완벽하게 사용할 줄 알았다고 볼 수 있다([15]).

셋째, 천문학자이자 수학자인 알-카시(al-Kashi, 1380~1429)는 가정의 빈곤으로 인해 방랑생활을 하였는데, 사막켄트 등지에서 당대 최고의 천문학자 및 수학자와 어울렸고 그 결과 현대 역사학자들에 의해 제 2의 톨레미라고 불릴 만큼 삼각법에서 큰 업적을 남겼고, 코사인 법칙을 이용하여 거의 완벽한 삼각표를 완성하였다. 이러한 그의 업적으로 인해 프랑스에서는 지금도 코사인 법칙을 알-카시의 정리(The theorem of Al-Kashi)라고 부를 만큼, 그는 코사인법칙에 있어서 위대한 업적을 남겼다.

이제 구면에서의 코사인 법칙에 대해 구체적으로 살펴보자. 구면삼각법은 구면에 있는 삼각형에서 다루어지는 삼각법을 의미한다. 고대의 경우 우주는 지구를 중심으로 천구 상에서 움직이는 것처럼 보였기 때문에 실제로 그렇다고 생각하였다. 모든 천체는 이 천구 상에 한 개의 점으로 나타나는데, 매일 이러한 점들이 지구를 회전하고 그 위치를 조금씩 다르게 하고 있다. 천구 상에서 이러한 점들의 관계를 살피기 위해 코사인 법칙은 매우 유용한 도구로 인식하였을 것이다. 그리고, 이러한 주제는 8세기부터 14세기까지에 걸쳐 이슬람교에서 메카의 위치를 찾기 위해 중동, 북아프리카, 스페인의 이슬람교도들에 의해서 큰 발전을 이룩하였다. 구면에 세 점 A, B, C가 결정이 되면 선분AB는 구의 중심을 원의 중심으로 하는 대원의 일부분이 된다. 이렇게 만들어진 삼각형에서의 코사인 법칙을 이슬람 수학자들이 발견한 것이다(그림1).

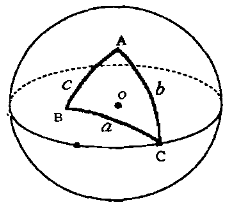

그림 1

[정리3] (구면코사인 법칙) 구면삼각형 ABC에서 다음 식이 성립한다([7]).

$$\cos\alpha = \cos\beta \times \cos\gamma + \sin\beta \times \sin\gamma \times \cos A$$

(단, $\angle A$는 변 b, c가 이루는 각, α, β, γ는 대원에서 세 변에 대한 중심각의 크기)

(증명) 구면삼각형을 이용하여 코사인법칙을 증명해 보자(그림2). 구면삼각형ABC에서 꼭지점 A를 임의의 한 평면에 접하게 하고 두 점 B, C를 지나는 대원을 그린다. 그리고, 선분 OB와 선분 OC의 연장선이 접평면과 만나는 점을 각각 B′, C′이라고 하

고, 구면삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 한다. 세 변들의 대원에 대한 중심각의 크기를 α, β, γ라고 하면, $\alpha=\frac{a}{R}, \beta=\frac{b}{R}, \gamma=\frac{c}{R}$이다. 이 때, 두 삼각형OB'C'과 AB'C'의 공통변 B'C'로부터 코사인 법칙을 적용하여 원하는 식을 유도할 수 있다. 네 변의 길이 OB', OC', AB', AC'을 구해 보자.

$\overline{OB'}=\frac{R}{\cos\gamma}$이고, $\overline{OC'}=\frac{R}{\cos\beta}$이고, $\overline{AB'}=R\tan\gamma$ 이고, $\overline{AC'}=R\tan\beta$ 이다. 여기서, 두 삼각형에서 코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

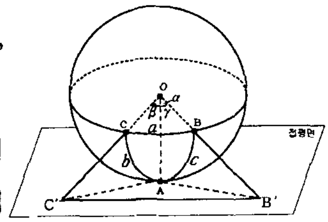

그림 2

$$(B'C')^2=(OB')^2+(OC')^2-2OB'\cdot OC'\cdot\cos\alpha$$

$$=(\frac{R}{\cos\gamma})^2+(\frac{R}{\cos\beta})^2-2\frac{R^2}{\cos\gamma\cdot\cos\beta}\cos\alpha$$

$$=R^2(1+\tan^2\gamma)+R^2(1+\tan^2\beta)-2\frac{R^2}{\cos\gamma\cdot\cos\beta}\cos\alpha \quad ------①$$

$$(B'C')^2=(AB')^2+(AC')^2-2AB'\cdot AC'\cdot\cos A$$

$$=(R\tan\beta)^2+(R\tan\gamma)^2-2R^2\tan\beta\cdot\tan\gamma\cdot\cos A$$

$$=R^2\tan^2\beta+R^2\tan^2\gamma-2R^2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cdot\cos A \quad ------②$$

①과 ②식을 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$1-\frac{1}{\cos\gamma}\frac{1}{\cos\beta}\cos\alpha=-\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos A$$

양변에 $\cos\gamma\cdot\cos\beta$ 를 곱하여 $\cos\alpha$에 대해 정리하면, 다음 코사인법칙을 얻는다.

$$\cos\alpha=\cos\beta\times\cos\gamma+\sin\beta\times\sin\gamma\times\cos A\ .\ ■$$

구면에서의 코사인 정리를 살펴보면 변의 길이와 관계가 없는 것처럼 보인다. 실제적인 예를 통해 구면에서의 코사인 법칙도 변의 길이에 대한 것임을 확인하여 보자.

[문제4] 러시아의 모스크바와 우리나라 대구사이의 거리를 구하시오.

(풀이) 그림에서 점 B를 모스크바라고 하고, 점 C를 대구라 하자. 모스크바는 동경 37.42, 북위55.45에 대구는 동경128.35, 북위35.52에 위치한다. 두 점 B, C사이의 최단거리는 두 점을 지나는 대원의 호 BC의 길이가 된다. 점 A를 북극점이라고 하고, 직선AB가 적도와 만나는 점을 B', 직선 AC가 적도와 만나는 점을 C'이라고 한다. 이제 삼각형ABC가 생겼고 이 세 변의 길이를 a, b, c라고 한다. 다음 공식에서 $\angle$A, 중심각 b, c를 구해야 한다(편의상 지구의 반지름을 1로 보자).

$$\cos(a) = \cos(b)\times\cos(c) + \sin(b)\times\sin(c)\times\cos(A)$$

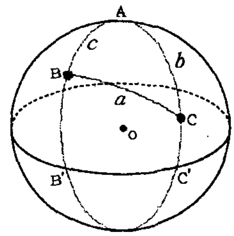

그림 3

첫째, ∠A의 크기는 대구의 경도에서 모스크바의 경도를 빼면 되므로, $128.35 - 37.42 = 90.93°$이다. 둘째, 선분AB의 중심각 c는 34.55°이다. 셋째, 선분AC의 중심각 b는 54.48°이다. 이 값을 코사인 법칙에 적용하면,

$$\cos(a) = \cos(54.48)\times\cos(34.55) + \sin(54.48)\times\sin(34.55)\times\cos(90.93)$$

$$= 0.4785 + (-0.0075) = 0.4710$$

따라서, a의 각의 크기는 61.90°이고, 모스크바로부터 대구사이의 거리는 지구의 둘레 40076km의 비율로 구하면, 6890km 이다. ■

4. 코사인 법칙이 형식화 및 구체화되는 근대

첫째, 중세 유럽에서의 수학과 과학의 경시현상으로 고대 그리스의 전통은 영원히 사장될 위기 속에서도 이슬람제국의 많은 수학자들에 의해서 고대 그리스의 전통은 이어져 내려왔다. 이러한 이슬람 제국의 수학자들의 정신을 이어 받아 코사인 법칙을 상당히 구체적으로 형식화시킨 근대 초기 몬테이너스(Montanus, 1436~1476)가 있다.

둘째, 16세기말이 되면 기호대수학이 비에트(Viete, 1540~1603)에 의해 급속하게 발전하게 되고 이를 통해 코사인 법칙도 지금과 같은 형태를 지니는 큰 계기를 마련하게 된다. 비에트와 거의 동시대에 살았던 피티스쿠스(Pitiscus, 1561~1613)는 상당한 수학적 능력을 가지고 있었고 삼각법 및 코사인 법칙의 사용에 있어서는 탁월한 성과를 보였다([14]). '삼각법'이라는 용어도 1595년 그가 최초로 사용한 것으로 알려져 있다. 그가 쓴 책에서 언급된 'Trigonometria'가 오늘날의 삼각법(Trigonometry)이란 용어의 기원이 된다. 그가 사용한 코사인 법칙을 보면 다음과 같다([1]).

삼각형ABC에서 꼭지점 C를 중심으로 한 변 $\overline{BC}$를 반지름으로 하는 원을 그린다. 이 때, 원과 삼각형과의 교점을 각각 D, F라고 하고, 변 AC의 연장선이 원과 만나는 점을 E라 하자. 꼭지점 C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 G라 하고, $\overline{GB} = x$라고 두자. 이 때, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ 라고 하면 $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$ 이 된다 (그림4).■

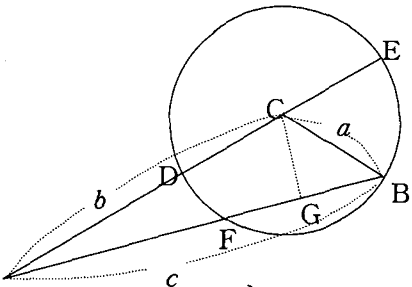

그림 4

셋째, 영국의 수학자 건터(Gunter, 1581~1626)는 1620년 여각에 대한 사인이 코사인과 같다는 사실을 사용하였다. 즉, $\cos A = \sin(90 - A)$을 제시한 것이다. 그의 이러

한 표기의 사용은 유클리드의 큰 틀에서 벗어나지 못하던 코사인 법칙을 오늘과 조금 더 익숙한 형태로 나타나게 하는데 큰 계기가 되었다.

넷째, 카르노(Carnot, 1753~1823)는 1803년 '위치기하학'에서 도형의 상관관계를 넓게 확장했고, 이 저작으로 몽주와 함께 현대 순수기하학의 창시자가 되었다. 수학의 진보는 더욱 고도의 일반화를 계속 추구하는 것을 특징으로 삼아왔다. 카르노의 업적은 이런 의미에서 중요했다. 카르노의 일반화에 대한 경향은 평면기하학에서 유명한 정리와 유사한 아름다운 정리를 유도했다. 잘 알려진 삼각법의 코사인 정리 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 는 유클리드 시대부터 알려졌으나 카르노는 이 오래 된 정리를 사면체의 경우까지 확장하여 관계식을 유도했다([3]). 즉, 평면 삼각형에서 성립하는 이 성질을 공간으로 확장하여 사면체에서도 코사인 법칙이 성립한다는 사실을 밝혀 코사인 법칙의 새로운 확장에 성공하였다.

다섯째, 플레이페어(Playfair, 1748~1819) 는 1804년의 'Elements of Geometry'의 마지막부분에서 오늘날과 똑같은 형태의 코사인 법칙을 사용하였다. 드디어 완벽하게 지금과 동일한 형태의 코사인 법칙이 유클리드 이후 2000여년만에 이루어진 것이다.

여섯째, 웬트워스(Wentworth, 1835~1906)는 1895년 그가 쓴 'Plane and spherical trigonometry, surveying and tables'에서 코사인법칙이란 용어를 사용하였다. 그림5에서는 그의 책에 소개된 코사인법칙을 나타낸 것이다. 그는 이 책에서 코사인법칙에 대해 다음과 같이 서술하고 있다([13]).

'삼각형에서 임의의 한 변의 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이의 제곱의 합에서 이 두 변의 길이와 이들의 두 변의 끼인각에 대한 코사인 값에서 두 배한 값을 뺀 것과 같다.

This law gives the value of one side of a triangle in term of the other two sides and the angle included between them.

In Figs. 31 and 32, $a^2 = h^2 + \overline{BD}^2$.

In Fig. 31, $BD = c - AD$;

in Fig. 32, $BD = AD - c$;

in both cases, $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2c \times AD + c^2$.

Therefore, in all cases, $a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 + c^2 - 2c \times AD$.

Now, $h^2 + \overline{AD}^2 = b^2$,

and $AD = b\cos A$.

Therefore, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$. [26

In like manner, it may be proved that

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

The three formulas have precisely the same form, and th law may be stated as follows:

The square of any side of a triangle is equal to the sum oj the squares of the other two sides, diminished by twice thei product into the cosine of the included angle.

그림 5

이것에 대해 밀러(Miller)는 코사인법칙(The law of cosines)이란 수학용어의 최초의 사용이 바로 이 책부터라고 제시하고 있다. 즉, 웬트워스에 의해서 법칙의 형태뿐만 아니라 그 이름까지 오늘날과 같은 모습을 갖추게 된다([10]).

이제 여기서 카르노에 의해 확장에 성공한 사면체에서 코사인 법칙이 어떻게 성립하는지 구체적으로 살펴보자. 공간도형에서는 변의 길이 대신 면의 넓이가 사용되어지고, 두 변 사이의 각이 아니라 두 면이 이루는 이면각으로 대체되어진다.

[정리5] 사면체ABCO에서 W를 △OBC의 넓이, X를 △OAB의 넓이, Y를 △ABC의 넓이, Z를△OAC의 넓이라고 하고, ∠OA, ∠OB, ∠OC를 각각의 면이 이루는 이면각이라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$W^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY\cos\angle AB - 2YZ\cos\angle AC - 2ZX\cos\angle OA$$

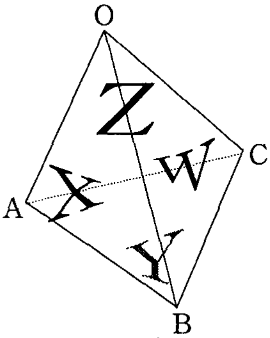

그림 6

(증명) 이 문제를 해결하기 위해서 이면각의 크기를 이용하여야 하는데 이면각을 얻을 수 있는 가장 손쉬운 방법은 공간상에서 평면의 정사영을 구하는 것이다. △ABC를 밑면으로 하는 사면체에서 나머지 세면을 밑면에 내린 정사영의 합은 △ABC의 넓이와 같아진다. 따라서, 아래 식을 얻을 수 있다.

$$Y = X\cos\angle AB + W\cos\angle BC + Z\cos\angle AC \quad ---①$$

같은 방법으로 △OAB, △OBC, △OAC를 밑면으로 하는 삼각형으로부터,

$$X = W\cos\angle OB + Z\cos\angle OA + Y\cos\angle AB \quad ---②$$

$$Z = X\cos\angle OA + Y\cos\angle AC + W\cos\angle OC \quad ---③$$

$$W = X\cos\angle OB + Y\cos\angle BC + Z\cos\angle OC \quad ---④$$

을 얻을 수 있다. ①~④식의 양변에 각각 Y, X, Z, W을 곱하면 다음 식을 얻는다.

$$Y^2 = XY\cos\angle AB + YW\cos\angle BC + YZ\cos\angle AC \quad ---①'$$

$$X^2 = XW\cos\angle OB + XZ\cos\angle OA + XY\cos\angle AB \quad ---②'$$

$$Z^2 = XZ\cos\angle OA + YZ\cos\angle AC + ZW\cos\angle OC \quad ---③'$$

$$W^2 = XW\cos\angle OB + YW\cos\angle BC + ZW\cos\angle OC \quad ---④'$$

④'식에서 ①', ②', ③'식을 모두 빼고 정리하면 다음과 같다.

$$W^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY\cos\angle AB - 2YZ\cos\angle AC - 2ZX\cos\angle OA. \ ■$$

5. 발달과정의 고찰을 통한 분석이 주는 의미

먼저 간단하게 코사인(cosine)이란 기호의 역사에 대해 간단히 살펴보자. 토마스 핀케(Thomas Fincke)는 그의 저작 'Geometria rotundi'(1588)에서 코사인 기호로 'sin. com.'을 사용하고 있다. 건터(Gunter)는 1620년에 'co-sinus'를 사용하였다. 조나스 무어(Jonas Moore)는 1674년에 'Cos.'을 사용하였다. 사무엘 제크(Samuel Jeake)는 1696년에 'cos.'을 사용하였다. 오일러(Euler)는 1729년에 'cos'란 기호를 사용한 것으로 보고 있다([8]).

이처럼 한 개의 기호의 발생과정을 보더라도 몇 백년이란 시간에 걸쳐 변화하고 소멸하고 생성되어 오늘날에 최종적인 형태로 전해졌다. 또한, 이러한 형태가 100년뒤에 어떻게 될 것이라고 아무도 알지 못한다. 다양한 필요와 요구에 의해 지금보다 전혀 다른 형태의 기호로 새롭게 태어날 수도 있을 것이다.

한 개의 기호의 역사가 이러한데 중요한 수학적 개념의 발달과정이란 이루 말할 수 없는 많은 변화를 겪을 수밖에 없을 것이다. 우리가 살펴본 발달과정은 다음과 같이 간단히 요약될 수 있다. 첫째, 유클리드에 의한 발생단계로 코사인 법칙의 태동시대, 둘째, 헤론과 톨레미, 브라마굽타 등의 수학자들에 의한 정착단계로 평면 코사인 법칙의 시대, 셋째, 알-바타니, 알-카리리, 알-카시등에 의한 구면으로의 확장되는 구면 코사인 법칙의 시대, 넷째, 몬테이너스에 의한 구체적인 형식화, 피티스쿠스에 의한 삼각법의 창시, 건터에 의한 코사인 성질 규명, 카르노에 의한 공간으로 확장, 플레이페어에 의한 완벽한 형식 구성, 웬트워스에 의한 코사인 법칙의 명명으로 이어지는 코사인 법칙의 현대화 시대(근대)로 분명하게 구분할 수 있다. 이러한 각 시대별로 주는 구체적인 의미는 다음과 같다.

첫째, 코사인 법칙의 소개에 대한 최초의 문헌은 유클리드의 <원론>이다. 이 책이 저술된 시기에 수의 의미는 선분의 길이를 의미하고, 제곱은 정사각형의 넓이를 의미하였다. 따라서, $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2+2\overline{AD}\ \overline{AC}$, $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\ \overline{BD}$ 은 우리에게 아주 익숙한 형태를 가지는데, 그것은 <원론>의 47번째 명제인 피타고라스와 유사하다. 즉, 피타고라스 정리가 직각에서 성립한다면 코사인 법칙은 직각이 아닌 경우에 성립하는 관계인 것이다. 따라서, 코사인 법칙의 태동은 피타고라스 정리에 대한 확장에서 출발한 것으로 알 수 있다. 이것은 수학적 활동의 중요한 측면인 일반화의 추구에 대한 지적인 열망과 지적인 필요성에 의해 코사인 법칙이 등장한 것으로 보여 진다. 따라서, Heath([12])가 지적한 그리스 수학의 전통인 논증적 추론에 의해서 얻어지는 논증기하학적 창조의 일환인 지적사유의 과정에서 나타난 것으로 볼 수 있다.

둘째, 고대 그리스 및 인도의 수학자들에 의해 널리 활용되어진 평면 코사인 법칙 시대에서는 새로운 수학적 개념인 코사인 법칙이 수학의 다양한 분야로 적용되었다는 점과 그 적용의 한계에 대한 대안을 찾기 위한 노력에 주목할 필요가 있다.

헤론의 공식의 발견이나 브라마굽타의 공식의 발견은 당대에서는 코사인 법칙이 있었기에 가능했던 새로운 개념으로 보아도 타당할 듯하다. 이러한 적용은 고대 그리스

시대가 아니더라도 충분히 다양한 사례를 찾아볼 수 있다. 우리는 코사인 법칙을 이용하여 파푸스 정리, 피타고라스 역정리, 삼각형의 중점연결 정리, 코사인의 합 공식, 나폴레옹 정리 등에 대한 증명도 할 수 있다. 심지어 코사인 법칙을 이용하여 복소수에 대한 형식적 정의를 내리는 것도 가능하다. 또한, 이 시기는 평면 코사인 법칙의 한계에 대한 인식이 있었다. 톨레미는 평면삼각법으로는 천문현상에 대한 해석이 불가능하다는 사실을 알았다는 것이다. 비록 더 향상된 코사인 법칙을 알아내지는 못하였지만, 평면 코사인 법칙 그 이상의 것에 대한 필요성을 자각하였다.

Heath([12])는 헤론을 이론보다는 실제적인 활용에 목적을 두었다라고 언급한다. 이것은 그리스 후기에 오면 실용적인 요구와 필요성에 의해서 코사인법칙이 폭넓게 다루어졌다는 것을 추측할 수 있다.

셋째, 이슬람 주축의 구면 기하학시대에는 구면에서 성립하는 코사인 법칙을 얻기 위해 많은 수학자들의 지속적인 노력이 점진적으로 결실을 맺어졌다는 것이다. 알-바타니에 의한 코사인과 같은 의미를 가지는 'sinvers'의 사용, 알-카리리에 의해 코사인 법칙과 유사한 방법의 적용으로 만든 구면 문제를 풀기 위한 표의 작성, 알-카시에 의해 거의 완벽한 삼각표의 완성이 이루어진다. 즉, 평면의 한계를 극복하고 새로운 상황에 적용되는 발전된 형태의 코사인 법칙이 많은 수학자들에 의해 순차적으로 발전하게 된다. 결국, 이 시기는 메카의 위치를 찾고, 기도할 시간을 정하는 종교적인 이유와 천문학이라는 학문적인 요구에 대한 필요성에 의해 코사인 법칙이 널리 사용되었다고 볼 수 있다.

넷째, 코사인 법칙의 현대화 시대(근대)에는 가장 아름다운 수학공식을 얻기 위한 형식화에 대한 끊임없는 노력과 확장과 일반화를 위한 노력이다.

피티스쿠스에 의해 '삼각법'이란 용어가 사용할 당시만 하여도 코사인 법칙은 $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$의 모양을 가졌다. 이것은 기호나 표현 면에서 크게 향상되었지만 기본 틀은 여전히 유클리드에서 크게 벗어나지 못하고 있다. 건터에 의해 제시된 $\cos A = \sin(90 - A)$으로 인해 우리에게 보다 익숙해졌고, 플레이 페어에 의해 오늘날과 똑같은 형태의 가장 아름다운 코사인 법칙이 갖추어 지게 되었다. 이러한 과정은 가장 시각적으로 아름다운 공식을 얻기 위한 끊임없는 노력의 결과였다.

또한, 이 시기는 코사인 법칙을 구면으로 발전시킨 것과 유사한 이차원 삼각형에서의 코사인 법칙을 삼차원 사면체로의 확장이 이루어진다. 결국, 수학의 진보는 일반화와 확장을 계속 추구하는 것을 특징으로 한다는 점에서 사면체로의 확장은 수학적인 큰 의미를 지닌 것으로 볼 수 있다.

III. 논증을 통한 코사인법칙의 확장

우리는 [정리5]인 사면체의 코사인 법칙의 증명에서 정사영이라는 개념을 이용하였

다. [정리5]에 사용된 방법을 유추하여 사각형 및 n각형에서 코사인 법칙이 성립함을 확인해 보자. 또한, 수학적 귀납법을 통해 순차적으로 n각형에서 코사인 법칙이 확장되어짐을 구체적으로 확인해 본다. 확장하기 앞서 먼저 삼각형에서의 코사인 법칙을 통해 사용된 기호에 익숙하도록 하자.

[정리6] 삼각형ABC에서 세 변 AB, BC, CA 의 길이를 각각 a, b, c라 하고, 두 변 BC와 CA가 이루는 각의 크기를 (bc)라고 하면, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(bc)$ 이다.

1. 정사영의 개념을 통한 코사인 법칙의 확장

여기에서는 정사영의 성질을 이용하여 n각형에서의 코사인 법칙을 증명한다. 여기서 정사영의 성질은 코사인 제1법칙의 n각형으로의 확장이라고 볼 수 있다.

[정리7-1] 사각형ABCD에서 네 변의 길이를 a_1, a_2, a_3, a_4이라고 하고, 임의의 두 변의 이면각을 $(a_1a_2), (a_1a_3), (a_1a_4), (a_2a_3), (a_2a_4), (a_3a_4)$ 라고 하면, 다음이 성립한다.

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) - 2a_1a_3\cos(a_1a_3) - 2a_2a_3\cos(a_2a_3)$$

(증명) 사각형에서 네 변의 길이를 a_1, a_2, a_3, a_4이라고 하고, 임의의 두 변이 이루는 각의 크기를 $(a_1a_2), (a_1a_3), (a_1a_4), (a_2a_3), (a_2a_4), (a_3a_4)$ 라고 하자. 한 변을 기준으로 나머지 세 변을 정사영하면 다음 식을 얻을 수 있다(정리5의 증명 참조).

$$a_4 = a_1\cos(a_1a_4) + a_2\cos(a_2a_4) + a_3\cos(a_3a_4)$$
$$a_1 = a_2\cos(a_2a_1) + a_3\cos(a_3a_1) + a_4\cos(a_4a_1)$$
$$a_2 = a_1\cos(a_1a_2) + a_3\cos(a_3a_2) + a_4\cos(a_4a_2)$$
$$a_3 = a_1\cos(a_1a_3) + a_2\cos(a_2a_3) + a_4\cos(a_4a_3)$$

위의 각 식에 좌우변에 같은 값을 곱하면, 다음과 같다.

$$a_4^2 = a_1a_4\cos(a_1a_4) + a_2a_4\cos(a_2a_4) + a_3a_4\cos(a_3a_4)$$
$$a_1^2 = a_1a_2\cos(a_2a_1) + a_1a_3\cos(a_3a_1) + a_1a_4\cos(a_4a_1)$$
$$a_2^2 = a_1a_2\cos(a_1a_2) + a_2a_3\cos(a_3a_2) + a_2a_4\cos(a_4a_2)$$
$$a_3^2 = a_1a_3\cos(a_1a_3) + a_2a_3\cos(a_2a_3) + a_3a_4\cos(a_4a_3)$$

첫 번째 식에서 나머지 식을 빼면, 다음을 얻는다.

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) - 2a_1a_3\cos(a_1a_3) - 2a_2a_3\cos(a_2a_3). \blacksquare$$

[정리8-1] n각형에서 n개의 변의 길이를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라고 하고, 임의의 두 변이

이루는 각의 크기를 $(a_1a_2), (a_1a_3),\cdots, (a_1a_n),\cdots, (a_{n-1}a_n)$ 라고 하면, 다음과 같다.

즉,

$a_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}a_ia_j\cos(a_ia_j)$ 이다.(증명) n각형에서 n개의 변의 길이를 $a_1, a_2,\cdots, a_n$이라고 하고, 임의의 두 변이 이루는 각의 크기를 (a_1a_2), $(a_1a_3),\cdots, (a_1a_n),\cdots, (a_{n-1}a_n)$ 라고 하자. 한 변을 기준으로 나머지 $(n-1)$개의 변을 정사영하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$a_n=a_1\cos(a_1a_n)+a_2\cos(a_2a_n)+\cdots+a_{n-1}\cos(a_{n-1}a_n)$$
$$a_1 = a_2\cos(a_2a_1) + a_3\cos(a_3a_1) + \cdots + a_n\cos(a_na_1)$$
$$\cdots$$
$$a_{n-1}=a_1\cos(a_2a_{n-1})+\cdots+a_{n-2}\cos(a_{n-2}a_{n-1})+a_n\cos(a_na_{n-1})$$

위의 각 식에 좌우변에 같은 값을 곱하면, 다음과 같다.

$$a_n^2=a_1a_n\cos(a_1a_n)+a_2a_n\cos(a_2a_n)+\cdots+a_{n-1}a_n\cos(a_{n-1}a_n)$$
$$a_1^2 = a_1a_2\cos(a_2a_1) + a_1a_3\cos(a_3a_1) + \cdots + a_1a_n\cos(a_na_1)$$
$$\cdots$$
$$a_{n-1}^2=a_1a_{n-1}\cos(a_2a_{n-1})+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}\cos(a_{n-2}a_{n-1})+a_{n-1}a_n\cos(a_na_{n-1})$$

첫 번째 식에서 나머지 식을 빼면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}a_n^2 &=a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-\cdots-2a_1a_{n-1}\cos(a_1a_{n-1})\\ &\quad-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-\cdots-2a_{n-2}a_{n-1}\cos(a_{n-2}a_{n-1})\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}a_ia_j\cos(a_ia_j)\quad .\blacksquare\end{aligned}$$

2. 수학적 귀납법을 통한 코사인 법칙의 확장

[정리8-2] n각형에서 n개의 변의 길이를 $a_1, a_2,\cdots, a_n$이라고 하고, 임의의 두 변이 이루는 각의 크기를 (a_ia_j) 라고 하면,(단, $1\le i, j\le n$, $n\ge3$) 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}a_n^2 &=a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-\cdots-2a_1a_{n-1}\cos(a_1a_{n-1})\\ &\quad-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-\cdots-2a_{n-2}a_{n-1}\cos(a_{n-2}a_{n-1})\\ &=\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}a_ia_j\cos(a_ia_j)\end{aligned}$$

(증명) 다음 (1) ~ (6)의 각 단계에 의해 증명되어진다.

(1) n=3 일 때, [정리6]에 의해서 당연히 성립한다.

즉, 삼각형에서 세 개의 변의 길이를 a_1, a_2, a_3이라고 하고, 두 변이 이루는 각의 크

기를 (a_1a_2)라고 하면, $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2)$ 이다.

(2) $n=4$ 일 때, [정리7-1]과 다음에 의해서 성립한다.[정리7-2] 사각형ABCD의 네 변의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하고, 이들 변이 이루는 각의 크기를 (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)라고 하면, 다음이 성립한다.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2bc\cos(bc)$$

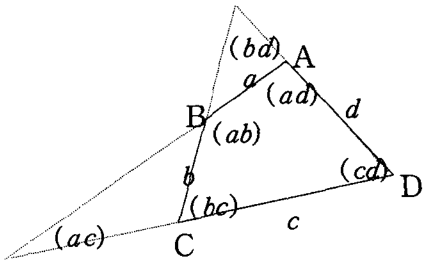

그림 7

(증명) 사각형 ABCD에서 대각선 AC를 그으면, 삼각형 ACD를 얻는다. 따라서,

$d^2 = c^2 + \overline{AC}^2 - 2c \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\angle ACD)$ ------①

위 식에서 다음 두 가지만 구하면 된다.

첫째, $\overline{AC}^2$의 값을 구한다.

삼각형ABC에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab)$ ------②

둘째, $AC \cdot \cos(\angle ACD)$ 의 값을 구한다.

그림8에서 꼭지점 A에서 밑변에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $AC \cdot \cos(\angle ACD)$의 값은 $\overline{CH}$의 길이와 같다. 또, 꼭지점 B를 지난 변 CD에 평행인 선분을 긋고, 꼭지점 B에서 변 CD에 내린 수선의 발을 F라고 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

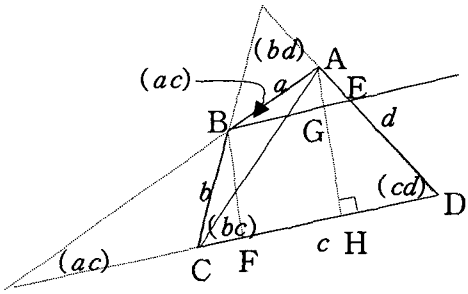

그림 8

$$\overline{CH} = \overline{CF} + \overline{FH} = \overline{CF} + \overline{BG}$$

그런데, $\overline{CF} = b\cos(bc)$ 이고, $\overline{BG} = a\cos(ac)$ 이므로, 다음 값을 얻는다.

$AC \cdot \cos(\angle ACD) = \overline{CH} = b\cos(bc) + a\cos(ac)$ ------③

②식과 ③식의 값을 ①식에 대입하면, 다음 결론을 얻는다.

$$\begin{aligned} d^2 &= c^2 + \overline{AC}^2 - 2c \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\angle ACD) \\ &= c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab) - 2bc\cos(bc) - 2ac\cos(ac) \end{aligned}$$

즉, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2bc\cos(bc)$ 이다. ■

(3) $n=5$ 일 때, 다음에 의해서 성립한다.[정리9] 다음 그림9와 같이 오각형 ABCDE의 다섯 변의 길이를 각각 a, b, c, d, e라고 하고, 이들 변이 이루는 각의 크기를 각각 (ab), (ac), (ad), (ae), (bc), (bd), (be), (cd), (ce) , (de)라고 하면, 다음이 성립한다.

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2ad\cos(ad)$$
$$- 2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd) - 2cd\cos(cd)$$

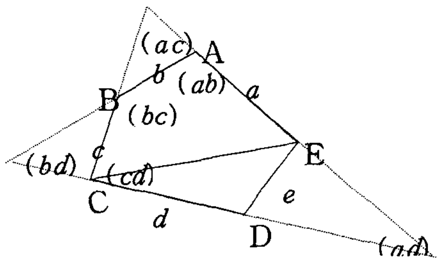

그림9

(증명) 오각형 ABCDE에서 대각선 CE를 그으면, 삼각형 CDE를 얻는다. 이 삼각형에서 코사인 법칙이 성립하므로 다음과 같다.

$e^2 = d^2 + \overline{CE}^2 - 2d \cdot \overline{CE} \cdot \cos(\angle ECD)$ ---①

위 식에서 우리는 다음 두 가지만 구하면 된다.

첫째, $\overline{CE}^2$의 값을 구한다. 사각형ABCE에서 코사인 법칙을 적용하면, 다음과 같다.

$CE^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2bc\cos(bc)$ ---②

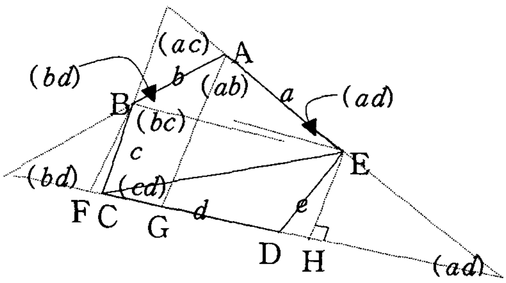

그림10

둘째, $\overline{CE} \cdot \cos(\angle ECD)$ 의 값을 구한다. 그림10에서 꼭지점 A, B, E에서 밑변에 내린 수선의 발을 각각 G, F, H하고, 꼭지점 A, B, E를 지나고 변 CD에 평행인 선분을 긋는다. 그러면, $\overline{CE} \cdot \cos(\angle ECD)$의 값은 $\overline{CH}$의 길이와 같다. 그런데, $a\cos(ad) = \overline{GH}$ 이고, $b\cos(bd) = \overline{FG}$이고, $c\cos[180-(cd)] = -c\cos(cd) = \overline{CF}$이므로, $c\cos(cd) = -\overline{CF}$ 이다. 이 세 값을 서로 더하면, 다음 식을 얻는다.

$$a\cos(ad) + b\cos(bd) + c\cos(cd) = \overline{GH} + \overline{FG} - \overline{CF}$$
$$= \overline{CH} = \overline{CE} \cdot \cos(\angle ECD) \quad ---③$$

②식과 ③식의 값을 ①식에 대입하면, 다음 결론을 얻는다.

$$e^2 = d^2 + \overline{CE}^2 - 2d \cdot \overline{CE} \cdot \cos(\angle ECD)$$
$$= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2bc\cos(bc)$$
$$- 2d[a\cos(ad) + b\cos(bd) + c\cos(cd)]$$

즉, 다음을 얻는다.

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2ad\cos(ad)$$
$$- 2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd) - 2cd\cos(cd). \quad ■$$

(4) $n=6$ 일 때, 다음에 의해서 성립한다.

[정리10] 육각형ABCDEF의 여섯 변의 길이를 각각 a, b, c, d, e, f라고 하고, 이들 변이 이루는 각의 크기를 각각 $(ab), \cdots, (ae), \cdots, (be), \cdots, (ce), (de)$라고 하면, 다음이 성립한다.

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
$$- 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2ad\cos(ad) - 2ae\cos(ae)$$
$$- 2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd) - 2be\cos(be)$$
$$- 2cd\cos(cd) - 2ce\cos(ce) - 2de\cos(de)$$

(증명) 육각형 ABCDEF에서 대각선 DF를 그으면, 삼각형 DEF를 얻는다. 이 삼각형에서 코사인 법칙이 성립하므로 다음과 같다.

$$f^2 = e^2 + \overline{DF}^2 - 2e \cdot \overline{DF} \cdot \cos(\angle FDE) \quad --- ①$$

위 식에서 우리는 다음 두 가지만 구하면 된다.

첫째, $\overline{DF}^2$의 값을 구한다. 오각형ABCDF에서 역시 코사인 법칙이 성립하므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{DF}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2ad\cos(ad)$$
$$- 2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd) - 2cd\cos(cd) \quad --- ②$$

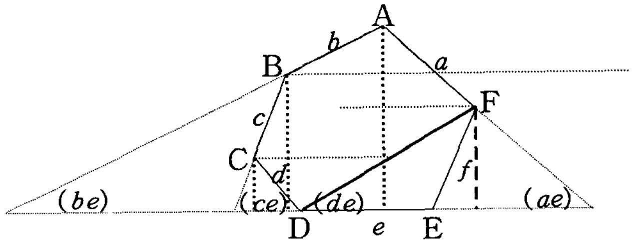

그림 11

둘째, $\overline{DF}\cdot\cos(\angle FDE)$ 의 값을 구한다. 육각형의 임의의 두 변이 만드는 각의 종류는 모두 열 가지 이다. 이 중에서 여섯 가지는 이미 첫 번째에서 $\overline{DF^2}$의 값을 구하기 위해 사용되었고, 사용하지 않은 각은 변 $\overline{DE}$와 이루는 각 $(ae),(be),(ce),(de)$ 이다. 꼭지점 A, B, C, F에서 밑변에 수선의 발을 내리고, 꼭지점 A, B, C, F를 지나고 변 DE에 평행인 선분을 긋는다. 그러면, $\overline{DF}\cdot\cos(\angle FDE)$의 값은 다음가 같다.

$$a\cos(ae)+b\cos(be)+c\cos(ce)+d\cos(de)=\overline{DF}\cdot\cos(\angle FDE) \quad ---③$$

②식과 ③식의 값을 ①식에 대입하면, 다음 결론을 얻는다.

$$f^2=e^2+\overline{DF^2}-2e\cdot\overline{DF}\cdot\cos(\angle FDE)$$
$$=e^2+a^2+b^2+c^2+d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)-2ad\cos(ad)$$
$$-2bc\cos(bc)-2bd\cos(bd)-2cd\cos(cd)$$
$$-2e[a\cos(ae)+b\cos(be)+c\cos(ce)+d\cos(de)]$$

즉, 다음을 얻는다.

$$f^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)-2ad\cos(ad)-2ae\cos(ae)$$
$$-2bc\cos(bc)-2bd\cos(bd)-2be\cos(be)$$
$$-2cd\cos(cd)-2ce\cos(ce)-2de\cos(de).\ \blacksquare$$

(5) $n=k-1$일 때, $(k-1)$각형에서 $(k-1)$개의 변의 길이를 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$이라고 하고, $(k-2)$개의 변 중 임의의 두 변이 이루는 각의 크기를 $(a_1a_2),\cdots,(a_1a_{k-2})$, $(a_2a_3),\cdots,(a_2a_{k-2}),\cdots,(a_{k-3}a_{k-2})$ 라고 하면, 다음이 성립한다고 가정하자.

$$a_{k-1}^2=a_1^2+\cdots+a_{k-2}^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-\cdots-2a_1a_{k-2}\cos(a_1a_{k-2})$$
$$-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-\cdots-2a_{k-3}a_{k-2}\cos(a_{k-3}a_{k-2})$$
$$=\sum_{i=1}^{k-2}a_i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{k-3}\sum_{j=i+1}^{k-2}a_ia_j\cos(a_ia_j)$$

(6) $n=k$일 때, k각형에서 k개의 변의 길이를 $a_1,a_2,\cdots,a_k$이라고 하고, $(k-1)$개의 변 중 임의의 두 변이 이루는 각의 크기를 $(a_1a_2),\cdots,(a_1a_{k-1}),(a_2a_3),\cdots,$ $(a_2a_{k-1}),\cdots,(a_{k-2}a_{k-1})$ 라고 한다. 이 때, 다음이 성립함을 증명하자.

$$a_k^2=a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-\cdots-2a_1a_{k-1}\cos(a_1a_{k-1})$$
$$-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-\cdots-2a_{k-2}a_k\cos(a_{k-2}a_{k-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1}a_ia_j\cos(a_ia_j)$$

(증명) [정리7-2], [정리9], [정리10]의 증명 방법으로부터 유추하여 증명하여 보자. 그림12에서와 같이 두 점을 연결한 대각선 $\overline{A_1A_{k-1}}$ 를 긋는다. 그러면, $(k-1)$각형과 삼각형 $A_1A_{k-1}A_k$ 가 생긴다. 따라서, 삼각형에서 코사인 법칙이 성립하므로, 다음 식을 얻는다.

$$a_k^2 = a_{k-1}^2 + \overline{A_1A_{k-1}}^2 - 2a_{k-1} \cdot \overline{A_1A_{k-1}} \cdot \cos(\angle A_1A_{k-1}A_k)$$

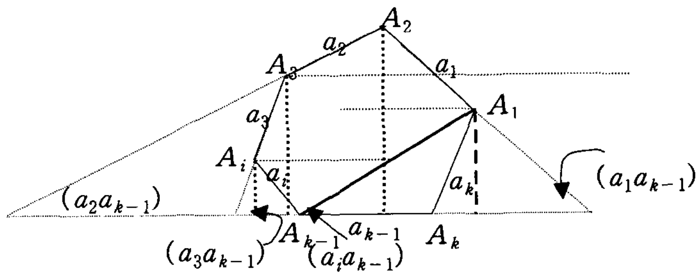

그림 12

첫째, $(k-1)$각형에서 성립함을 가정하였으므로, 다음 식을 얻는다.

$$\overline{A_1A_{k-1}}^2 = a_1^2 + \cdots + a_{k-2}^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) - \cdots - 2a_1a_{k-2}\cos(a_1a_{k-2})$$
$$-2a_2a_3\cos(a_2a_3) - \cdots - 2a_{k-3}a_{k-2}\cos(a_{k-3}a_{k-2})$$

둘째, $\overline{A_1A_{k-1}} \cdot \cos(\angle A_1A_{k-1}A_k)$ 의 값은 [정리7-2], [정리9], [정리10]에 의해서, 다음 식을 얻는다.

$$\overline{A_1A_{k-1}} \cdot \cos(\angle A_1A_{k-1}A_k) = a_1\cos(a_1a_{k-1}) + \cdots + a_{k-2}\cos(a_{k-2}a_{k-1})$$

이 두 값을 원래의 식에 대입하면, 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} a_k^2 &= a_{k-1}^2 + a_1^2 + \cdots + a_{k-2}^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) - \cdots - 2a_1a_{k-2}\cos(a_1a_{k-2}) - 2a_2a_3\cos(a_2a_3) \\ &\quad - \cdots - 2a_{k-3}a_{k-2}\cos(a_{k-3}a_{k-2}) - 2a_{k-1}[a_1\cos(a_1a_{k-1}) + \cdots + a_{k-2}\cos(a_{k-2}a_{k-1})] \\ &= a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) - \cdots - 2a_1a_{k-1}\cos(a_1a_{k-1}) - 2a_2a_3\cos(a_2a_3) \\ &\quad - \cdots - 2a_2a_{k-1}\cos(a_2a_{k-1}) - 2a_3a_4\cos(a_3a_4) - \cdots - 2a_{k-2}a_{k-1}\cos(a_{k-2}a_{k-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} a_ia_j\cos(a_ia_j) \end{aligned}$$

따라서, (1), (2), (3), (4), (5), (6)에 의해서 n각형에서 코사인 법칙이 성립한다.■

IV. 결론 및 제언

1. 결론

우리는 지금까지 코사인 법칙의 발달과정을 분석하였고, 이러한 분석을 바탕으로 코사인 법칙의 확장에 대해 살펴보았다. 이러한 분석과 확장에 대한 결론은 다음과 같다.

첫째, 코사인 법칙의 태동시기를 통해 우리는 하나의 수학적 개념의 완성이 완성 그것으로 그치는 것이 아니라 새로운 개념 형성을 위한 출발점으로 삼아야 한다는 사실을 알 수 있었다. 우리가 수학사에서 발견한 많은 사실들은 발견한 것으로 만족하는 것이 아니라 새로운 개념의 확장과 심화를 위한 밑거름으로 삼는 수학적 태도의 습득이 수학사 연구의 중요한 영역이라는 사실이다.

둘째, 평면 코사인 법칙 시기에서는 한 가지 수학적 개념이 정착하고 뿌리를 내리는 과정에서 다양한 활용가능성에 대해 충분한 고려가 필요하였다는 사실이다. 한 가지 수학적 개념이 다른 수학적 개념과 어떤 관련이 있고, 그 영역에서 어떻게 새로운 방법으로 접근할 수 있는지에 대한 고려가 중요하다. 특히, 수학교육적인 입장에서 보면 학생들에게 한 가지 개념으로 다양한 활용가능성을 시사한다는 면에서 큰 교육적 의의를 지닐 수 있다. 또한 그 개념이 가지는 한계상황이 무엇인지 깨닫고 그 한계상황에 적용될 수 있는 보다 발전된 형태의 필요성에 대한 자각도 요구된다.

셋째, 한계상황의 깨달음은 결국 새로운 상황에 적용할 수 있는 발전된 형태의 발견으로 이어진다는 것이다. 평면에서 성립하던 성질을 구면으로 옮기기 위해 평면의 코사인 법칙을 바탕으로 구면에 적용되는 새로운 코사인 법칙을 발견하는데 성공하였다. 이러한 수학적인 도전은 수학적 개념을 더욱 아름답게 만들고 더 다양한 활용가능성을 제공한다는 점에서 수학적 의미가 크다고 하겠다.

넷째, 카르노가 지적했던 것처럼 수학의 진보는 확장과 일반화를 위한 지속적인 노력을 특징으로 한다는 것이다. 코사인 법칙이 평면에서 삼각형에서 성립하던 것을 공간의 사면체로 확장한 것처럼 수학적 개념에 대한 끊임없는 확장과 일반화를 위한 노력이 필요하다는 사실을 알 수 있다.

마지막으로, 우리는 마지막 시기의 전통을 이어받아 코사인 법칙의 일반화에 대해 고찰하였다. 카르노는 삼각형에서의 코사인 법칙을 사면체로 확장하였다. 사면체로 확장된 코사인 법칙을 증명하기 위해 우리는 정사영이라는 방법을 사용하였는데, 이 방법이 평면 삼각형의 코사인법칙 증명에도 의미가 있음을 알 수 있었다. 그래서, 이 정사영 방법을 사각형, 오각형, 육각형 등에 다시 적용하여 보았다. 이러한 적용결과로부터 일반적인 n각형에서의 코사인 법칙을 논증을 통해 정당성을 확보하였다. 또한, 수학적 귀납법을 이용하여 코사인 법칙의 확장을 정확하게 증명할 수 있었다.

2. 제언

우리는 이러한 연구결과를 바탕으로 몇 가지 제언을 다음과 같이 하고자 한다.

첫째, 코사인법칙의 다양한 활용에 대한 역사적 고찰이 필요하다. 코사인 법칙을 이용하여 적용되어질 수 있는 다양한 수학적 상황에 대한 분석이 필요하다. 한 가지 수학개념이 다양한 풀이방법에 대한 분석과 더불어 그 개념이 어떻게 활용되는가에 대한 분석은 의미있는 연구로 생각되어진다. 앞에서 밝힌 것과 같이 피타고라스의 역정리 증명을 위한 활용 등과 같은 수학적 상황에서의 활용에 대한 구체적인 분석은 의미있는 연구로 생각되어진다.

둘째, 다양한 수학개념을 유도하기 위한 코사인법칙의 활용가능성에 대한 고찰이 필요하다. 수학개념은 한가지로부터 유도되어지지는 않는다. 다양한 수학적 접근이 가능하다는 것이다. 예를 들어, 복소수의 형식적인 정의를 위해 코사인 법칙을 사용할 수 있다는 것은 우리에게 시사해 주는 바가 크다. 수학교육적인 면에서 수학적 개념의 유도를 위한 다양한 활용 가능성에 대한 구체적인 사례 연구가 필요하다.

셋째, 사인법칙의 발달과정 분석 및 확장에 대한 고찰이 가능하다. 코사인 법칙과 동일하게 교육되어지는 개념으로 사인법칙이 있다. 역사적으로 사인 법칙이 어떻게 발생하고 어떻게 발전되고 확장되었는가에 대한 구체적인 분석을 통해 새로운 발전가능성에 대한 탐구와 교육적인 활용이 필요하다.

넷째, 공간도형에서 코사인법칙이 성립하는 다면체에 대한 고찰이 가능하다. 사면체와 같은 공간도형 모두가 이러한 코사인 법칙을 만족할 것인가에 대한 물음이다. 정다면체는 모두 이러한 법칙에 만족한다. 각기둥도 모두 이 법칙을 만족한다. 그렇다면 어느 다면체가 이러한 만족하는가에 대한 연구가 가능하리라 생각되어진다.

다섯째, n차원공간에서 가장 간단한 도형에서 코사인법칙에 대한 고찰이 가능하다. 평면에서 가장 간단한 도형이 삼각형이다. 삼차원에서 가장 간단한 도형이 사면체이다. m차원 공간에서 가장 간단한 도형을 정의하고 그 도형에서도 이러한 코사인 법칙이 성립하는가의 문제와 어떤 형태로 나타날 것인가에 대한 연구가 가능하리라 생각되어진다.

참고 문헌

1. 권영인, 서보억, 코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E<수학교육 논문집>제18집 제2호(2004).
2. 박홍경, 수학사를 활용한 수학교육, 2000중등수학과일급정교사자격연수교재, 대구광역시교육연수원, 2000.
3. 양영오, 조윤동 역, B. 보이어, 수학의 역사 상, 하, 경문사, 2000.
4. 한인기, 교사를 위한 수학사, 교우사, 2003.
5. 한인기, 한 가지 수학 문제의 교육적 분석 및 관련된 문제의 체계화에 대한 연구,

한국수학교육학회지 시리즈 A<수학교육>42(1)(2003).

6. 한인기, 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E<수학교육 논문집>제21집 제1호(2007).
7. Amrita Aranake, *CELESTIAL MECHANICS*, NJGSS 2003 Journal, 2003.
8. Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover P.I. (1993).
9. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Harcourt Brace, 1962
10. Jeff Miller, www.pballew.net/lawofcos.htm (2007).
11. Lee, J. R., *The Law of Cosines in a Tetrahedron*, J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. B : Pure Appl. Math. 4(1997), 1-6.
12. Tomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Dover P.I, 1981.
13. Wentworth, G. A., *Plane and spherical trigonometry*, Ginn and Company Publishers, 1895.
14. Web1 : www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Al-Khalili.html
15. Web2 : www.pballew.net/lawofcos.htm

The Analysis of the Development Process of the Law of Cosines and the Study of the Extension through the Demonstration

Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University **Young In Kwon**
Gyeongsang National University Graduate School **Bo Euk Suh**

This study is about the law of cosines. It dealt with its historical origin and the developmental process of the age of Greece, Islam and Modern age. Especially, we tried to find out how the extension of the law of cosines for spherical triangles and tetrahedron from the law of cosines for plane was done. On the basis of this analysis, we investigated how the law of cosines was generated and proved it through the logical demonstration and mathematical induction. This made us find out the mathematical meaning of mathematical concepts.

Key words: history of mathematics, The law of cosines, The law of cosines for spherical triangles, generalization of the law of cosines

2000 Mathematics Subject Classification :01A02

논문 접수 : 2007년 5월　　　심사 완료 : 2007년 6월