수학적 개념의 유형과 효과적인 개념학습 - 벡터이론을 중심으로

대구한의대학교 인터넷정보학과 박홍경
hkpak@dhu.ac.kr
대구한의대학교 기초과학연구소 김태완
nwtwkim@hanmail.net
대구한의대학교 자산운용학과 이우동
wdlee@dhu.ac.kr

본 논문에서는 수학적 개념을 어떻게 가르쳐야 할 것인가를 고려한다. 특히 개념학습에 있어서 수학적 직관에 의해 개념이해, 계산기능, 응용의 3가지 요소를 균형적이고 통합적으로 달성하는 것을 목표로 삼는다. 이를 위한 방안으로 수학적 개념을 3종류의 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 의거하여 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 분류한다. 또한 벡터이론의 중요한 9가지 개념을 통하여 유형의 차이에 대해 실제적인 고찰을 한다. 이로부터 벡터이론의 효과적인 개념학습을 위해서 요구되는 학습의 순서와 강조점을 제안한다.

주제어 : 개념학습, 수리철학, 직관주의, 논리주의, 형식주의, 선형대수학, 벡터이론

1. 서론

선형대수학과 미적분학은 대학에서 교양과정의 수학과목이다. 벡터이론은 행렬이론과 더불어 선형대수학의 기본적이고 중요한 이론으로서 통상 대학 1학년과정에서 학습한다. 선형대수학은 연립1차(선형대수)방정식의 문제해결에서 시작하여 벡터이론과 행렬이론을 중심으로 체계화되고 추상화된 대수학의 한 분야이다. 이것은 오늘날 현대수학 전반에 걸쳐 활용되고 있기 때문에 기초적인 분야라 할 수 있다. 이론뿐만 아니라 응용의 측면에 있어서도 이공계를 위시하여 경제학, 사회학, 심리학과 같은 사회과학 등에 광범위하게 쓰이고 있다([6], [10], [12]).

대학에서는 선형대수학의 수업에 있어서 대체로 구체적인 계산중심이거나 형식적 개념중심의 많은 새로운 추상적인 주제와 개념을 다룬다. 이러한 학습에 대해 학생들은 종종 지나친 계산이나 형식적인 개념으로 인해 이해에 큰 어려움을 겪는다. 그러

면 선형대수학을 어떻게 가르쳐야 할 것인가? 이러한 물음에 답하기 위해 본 논문에서는 수학적 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 나누어 고찰한다. 이러한 분류의 근거와 기준은 20세기 초에 등장한 3가지 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 의거한다. 게다가 개념의 3가지 유형이 개념학습에 어떤 역할을 담당하는지를 고려한다.

또한 실제적인 고찰을 위해 구체적으로 벡터이론의 중요한 9가지 개념을 든다. 그것은 벡터이론의 여러 개념들이 3가지 유형사이의 차이를 잘 보여주는 좋은 사례이기 때문이다. 본 논문에서는 벡터이론의 중요한 9가지 개념에 대해 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 순으로 고찰한다. 하지만 어느 순서로 진행해도 곤란하지 않도록 유형별로 독립적으로 구성되어 있다. 결론으로서 벡터이론의 효과적인 개념학습을 위해서 요구되는 개념학습의 순서와 강조점에 대해 제안한다.

2. 수학적 개념학습의 목표

대학에서의 수학교육은 통상 개념중심의 개념학습을 강조한다. 주로 현대수학의 엄밀성, 체계성, 형식성, 추상성을 강조하는 형식주의 (또는 이를 계승한) 입장을 따른다. 계산은 개념을 이해하고 숙달을 위해 행해진다. 반면에 1980년대 이후 확산된 문제해결학습의 강조로 대학에서도 계산중심의 개념학습은 개념중심에 못지않게 활발히 이루어지고 있다. 한편 20세기 후반부터 수학의 응용에 대한 여러 이론적 발전이 일어남으로써 교육에 있어서도 응용분야에 대한 비중이 범위나 수준에 있어서 점차 커지고 있다. 지금은 쓸모 있는 수학을 강조하는 응용중심의 개념학습도 일어난다.

이에 반해 중등수학교육은 개념학습보다는 상대적으로 문제해결학습을 강조한다. 어렵고 딱딱한 개념을 바로 접하기 보다는 문제를 통하여 접근해간다. 문제의 수준과 방향은 쉬운 것에서 어려운 것으로, 익숙한 것에서 새로운 것으로, 구체적인 것에서 추상적인 것으로 나아간다. 그리하여 문제해결을 통하여 개념을 이해하고 응용할 수 있도록 한다. 우리나라에서도 제6차 교육과정부터 문제해결학습을 적극 도입하고 있다. 또한 제7차 교육과정에서는 응용에 관한 내용도 개념 및 계산과 더불어 어느 정도 균형적으로 할애되어 있다. 하지만 현재 중등수학은 지나친 입시위주의 교육으로 인해 크게 왜곡되어 있는 형편이다. 대학수학도 학생 수의 감소와 취업위주의 교육으로 인해 많은 수학과의 폐지나 수학 관련과목의 폐강이 속출하고, 개설된 과목은 균형적인 학습을 기대하기 어렵다.

수학교육에서 개념학습은 필연적으로 수학적 구조와 관계한다. 다른 학문과는 달리 수학은 수학 자체의 구조, 즉 수학적 지식을 내적으로 조직하고 상호연관성을 짓는 틀을 갖고 있기 때문이다. 말하자면 개념학습은 수학적 구조를 본질적으로 이해할 수

있어야 하며 다양한 문제해결에 정확하고 유연하게 응용할 수 있어야 한다. 이러한 점에서 개념이해, 계산 기능, 그리고 응용은 개념학습의 주된 요소이며 이들은 균형적이고 통합적으로 형성되어야 한다.

먼저 균형성은 매우 중요하다. 현대수학은 엄밀성, 명확성, 체계성, 형식성, 추상성 등의 특징을 갖고 있다. 가령 중등수학에 있어서 개념치중의 불균형적인 학습은 수학의 엄밀함이나 명쾌함에 대해서는 효과적이지만 기초부터 알아가지 않으면 안되는 것, 하지만 지나치게 틀에 박힌 현실과는 동떨어진 무미건조한 것으로 여기게 한다. 계산치중의 학습은 문제해결에서 정확한 답이 나올 때에는 그에 따른 희열을 느끼지만 개념이해가 부족한 경우에는 해결원리나 개념습득에 많은 어려움을 겪는다. 응용은 치중이라 할 것도 없이 양적으로 아직 도입이 미미한 실정이며 접근방식에 있어서도 개념이나 계산 이후에 다루어진다. 하지만 지나치게 개념이나 계산만을 강조하는 이론중심의 학습에서 벗어나 발생배경이나 응용과 같은 동기부여를 위해 생활 속에서의 수학적 경험에 관계하는 이야깃거리의 필요성에 대한 인식은 점차 커지고 있다. 사실 이러한 응용에 대한 비중의 강화는 시대적 요청일 뿐만 아니라 학교현장에서는 학생들의 개념학습을 위한 균형성을 도와주고 사회적으로는 수학의 대중화에 크게 기여한다.

이들 3가지 요소가 균형적이기만 하면 자칫 산발적으로 형성될 우려가 있다. 이들이 균형적이면서도 유기적으로 잘 통합되기 위해서는 통합의 주체가 필요하다. 그것은 바로 개인의 수학적 직관이다. 결국 효과적인 개념학습을 위해서는 수학적 직관에 의해 개념, 계산, 응용이 상호연관성을 갖고 적절하게 균형적으로 통합되어야 한다.

3. 수학적 개념의 유형과 수리철학

전절에서 제기한 교육현실의 문제점을 해결하고 효과적인 개념학습을 달성하기 위해서는 어떻게 해야 할 것인가? 이 물음에 답하기 위해 여기서는 수학적 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 분류한다. 이것은 20세기 초에 형성된 3가지 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 의거한다. 이들의 특징이나 강약점을 간단히 비교하면 다음과 같다([1], [2], [3]).

직관주의 : 직관주의는 Brouwer, Heyting, Weyl에 의해 형성되었다. 이것은 무한에 관한 이해에서 출발한다. 자연수의 집합과 같은 무한집합은 모든 수학의 기초가 되는 매우 중요한 수학적 존재이지만 실제로 지금까지 어느 누구도 무한의 존재성을 직접 증명한 사람은 없었다. 이점에 주목하여 Brouwer는 무한의 존재성을 증명하는데 사용되는 간접증명, 삼분법 등을 수학에서 배제하고자 하였다. 그는 언어나 논리는 수학의 전제조건일 수 없으며 따라서 수학상의 원리나 공리는 임의적인 것이 아니고 오로지

직관에 의해 파악되며, 또한 수학적 성질은 완성된 것이 아니라 단지 논리적 추론에 의해 발견하는 것이 아니라 직관을 통해 직접 구성하는 것으로 파악한다.

그들은 기존의 수학 일반이나 논리학에서 배중률의 적용을 유한한 대상으로 제한해야 한다고 주장한다. 이로 인해 무한의 논리가 유한의 경우와는 다른 새로운 것임을 인식하는 데는 공헌을 하였지만, 기존의 수학을 너무도 좁은 틀 속에 가둬두는 결과가 되었다. 또한 이것은 수학에 대한 직관적 창조의 절대적인 자유를 인정해야 한다. 하지만 수학이론도 사회적 산물이다, 즉 하나의 정신이 아니라 많은 정신들의 변증법적인 상호작용에 의해 창조되고 발전한다.

논리주의 : 논리주의는 Dedekind의 수에 대한 개념을 정립하려는 시도와, Peano의 자연수의 공리계를 세우려는 시도, 이후에 Frege, Russell 등에 의해 형성되었다. 이것은 수학을 논리로 환원하려는 입장이다. Russell은 수학이란 임의의 대상과 임의의 성질에 대해 항상 성립하는 사실을 형식적으로 연구하는 학문으로 규정하고 수학의 모든 원리는 논리학의 원리 및 집합과 논리의 관계로 환원시킬 수 있다고 여겼다.

이로 인해 기본적인 개념을 단순화하고 명확히 하는 데에는 크게 공헌하였다. 하지만 논리주의에 입각한 기초는 체계가 지나치게 복잡하고 번거로울 뿐만 아니라 그들이 사용한 환원공리나 무한집합의 존재공리, 선출공리 등은 논리법칙으로부터 연역될 수 없음이 나중에 밝혀졌다.

형식주의 : 형식주의는 Cantor의 집합론으로 인해 야기된 역리와 직관주의에서의 기존 수학의 포기와 같은 수학적 위기를 극복하려는 노력에서 비롯하였다. 이러한 시도로 제안된 Hilbert 프로그램은 역사, 철학, 신학에서 많은 물의를 일으켜온 실무한의 개념을 포함하여 기존의 모든 결과를 인정하기 위해 기존 수학을 완전한 공리적 체계 안에서 형식적으로 건설하고 그 체계 안에서 무모순성을 밝히는 계획이었다. 그리하여 수학에서 사용하는 기호나 개념에서 철학적(주관적) 의미를 철저하게 제거하고자 하였다. 비록 Gödel에 의해 실패로 끝났지만 접근방법이 매우 현실적이었고 또 무엇보다도 기초를 확립한다는 점에서 수학적이었기 때문에 현재도 수학자들에게는 가장 보편적이다.

<표1> 3가지 수리철학의 비교

기본 철학	직관주의	논리주의	형식주의
특징	감각 중시 경험적 이해 지식발생의 원천	방법 중시 합리적 계산 논리 환원주의	형식성 무모순성 추구 공리적 체계 확립
강점	구성적 이론 강조	방법적 확실성	수학의 기초 마련
약점	지나치게 제한적 직관의 상대성 문제	동기, 응용 미약 환원의 한계 문제	직관성, 구체성 약화 완전성 한계 문제

그러면 이러한 수리철학으로부터 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념으로 구분하는 기준은 무엇인가? 먼저 인간의 활동이나 사고의 측면에서 이들 3가지 개념들을 비교할 수 있다. 직관적 개념은 감각적, 정서적, 신체적 활동이나 사고와 분명한 연계성을 가져야 한다. 그 연계성이 기원에서든 응용에서든. 공간의 입장에서는 볼 때 감각적 공간과 수학적 공간 사이에 유클리드 공간이 있다. 따라서 이러한 연계성은 특히 2차원, 3차원 유클리드공간에서 고려되어질 때 자연스럽게 형성된다.

논리적 개념은 직관적 개념이 갖는 불확실성이나 오류가능성을 제거하기 위하여 다루고자 하는 대상과 그들 사이의 관계를 명백하게 논리적으로 기술하는 것이다. 그러기 위해서는 대상이 명확히 기호화되어야 한다. 이러한 논리적 개념은 통상 고차원 공간에서 구체적인 성분표시로 주어진다. 실제 현대수학의 기초인 집합론은 공리적 체계에 입각하여 수리논리에 의해 전개된다.

형식적 개념은 직관적으로 파악할 수 없고 논리적으로 해결할 수 없는 추상성을 반영한다. 수학적 추상화는 공리계에 의해 규정된다. 이로 인해 공간이나 대상의 개별적인 성질에서 벗어나 공통된 성질을 규정함으로써 현실에서와는 달리 부분과 전체를 분리하여 고려할 수 있다. 가령 기하학에 있어서 곡면의 추상적 정의는 그 곡면을 둘러싸고 있는 전체로서의 공간과 독립적으로 규정된다. 이것은 그 곡면을 둘러싼 공간이 무엇이라도 가능하다는 것을 의미한다. 하지만 수학이 단지 형식적 학문에 그치지 않고 실제로 응용가능한 것은 많은 연구를 통해 곡면과 둘러싼 공간 사이의 관계를 정확히 규명하기 때문이다.

표현기법에 있어서도 개념의 3가지 유형은 차이를 보인다. 직관적 개념은 개인의 감각을 통해 수학적 개념을 이해하는 방식을 따른다. 이를 위해 여러 형태의 다이어그램, 표, 함수(방정식)의 그래프 등의 다양한 그림에 의해 표현한다. 논리적 개념은 수리논리를 바탕으로 논리적 사고에 의해 이해한다. 개념에 포함되는 대상을 기호화하고 이들 사이의 관계를 논리식이나 수식 등의 논리적 관계에 의해 명확히 표현한다. 끝으로 형식적 개념은 공리적 체계에 따라 개념을 이해하는 방식이다. 공리적 체계는 공리주의에 입각하여 개념을 4단계로 나뉘는데, 무정의 개념, 무증명 개념(공리), 정의된 개념(정의), 증명된 개념(정리)이 그것이다. 집합론에 입각하여 집합과 그것을 만족하는 성질에 의해 개념을 추상적이고 형식적으로 규정한다.

<표2> 3가지 유형의 개념 비교

유형	직관적 개념	논리적 개념	형식적 개념
기본 철학	직관주의	논리주의	형식주의
활동과 사고 측면	감각적 활동, 사고 → 수학적 활동, 사고 연결	수학적 활동, 사고에서 직관의 불확실성, 오류가능성 제거	수학적 활동, 사고 → 형식적 활동, 사고 이행
공간	저차원 공간	고차원 공간	추상적 공간
표현기법	다양한 그림 함수(방정식)의 그래프	수식, 논리식 도형의 방정식(함수)	집합과 성질 구조

그러면 개념의 3가지 유형은 개념학습에 어떤 역할을 담당하는가? 특히 개념의 유형과 개념이해, 계산 기능, 응용의 3가지 요소와의 관계를 중심으로 고려해보자.

직관적 개념은 개념이해에 있어서 동기를 부여한다. 동기부여는 역사적으로나 현재 시점이거나, 보편적이거나 개인적이거나, 학술적이거나 생활상이거나, 다양한 방식이 가능하다. 계산 기능에는 의미를 부여한다. 그래서 계산이 단지 기계적으로 행해지지 않고 의미를 통하여 개념이해를 돕는다. 또한 응용에 대한 다양한 아이디어를 제공한다. 이것은 동기부여로 환원하거나 실제적 필요성에 따라 새롭게 제기되기도 한다.

논리적 개념은 직관적 개념과 더불어 개념이해를 더욱 명확히 해준다. 직관적 이해만으로는 개념이 불완전하며 오류를 범할 위험성이 항상 내재한다. 이를 상보적으로 보완하는 것이 논리적 개념이다. 계산 기능에 실제적인 힘을 부여한다. 훈련과 연습은 이러한 기능을 더욱 강화시킨다. 응용에 있어서는 이론적 객관적 근거를 제공한다.

형식적 개념은 다른 학문과 비교할 때 수학의 독특성에 기인한다. 형식적 개념으로 세워진 공리적 체계는 수학이 순수학문으로서 합리성을 추구하기 때문이다. 개념이해에 있어서는 체계성, 형식성, 추상성을 보장한다. 계산 기능에 대해서는 구체적인 계산을 직접 돕지는 않지만 보다 일반적이고 보다 추상화된 증명으로 나아가도록 한다. 또한 응용을 위한 체계적이고 형식화된 모델을 제공하는 역할을 한다.

4. 유형에 따른 개념 구현을 위한 준비 : 벡터이론 중심

저차원의 기하학은 유클리드 내적을 가진 유클리드 공간에서 다루어지므로 고려하는 벡터이론에서도 내적의 개념을 포함하기로 한다. 혼란이 없다면 앞으로 2차원 및 3차원의 유클리드 공간은 각각 평면, 공간이라 부른다. 여기서는 벡터이론의 모든 개념을 논의하는 대신, 대학에서 접하는 선형대수학에서 중요하고 기본적인 9가지 개념을 중심으로 3가지 개념유형 사이의 차이점을 비교하는데 역점을 두고 논의한다.

(1) 공간으로서 평면 및 공간
(2) 공간내의 고려대상으로서 벡터 및 스칼라
(3) 기본적 연산으로서 선형연산
(4) 부분공간, 생성
(5) 선형독립, 선형종속
(6) 직합과 사영
(7) 기저
(8) 내적
(9) 내적과 관련된 개념 : 내적공간, 기하학적 측도(길이, 각, 거리, 체적), 부분(내적)공간, 직교보공간과 정사영, 정규직교기저(직교화)

유클리드 기하학은 물론 실수와 복소수를 함께 고려할 수 있다. 하지만 통상 실수 범위에서 취급하는 것이 직관적이므로 직관적 개념과 논리적 개념에서는 복소수에 관한 내용을 배제한다. 형식적 개념에서는 이해의 어려움이 별로 없을 뿐만 아니라 이론적으로 필요할 뿐만 아니라 효과적이므로 실수와 복소수를 함께 취급한다.

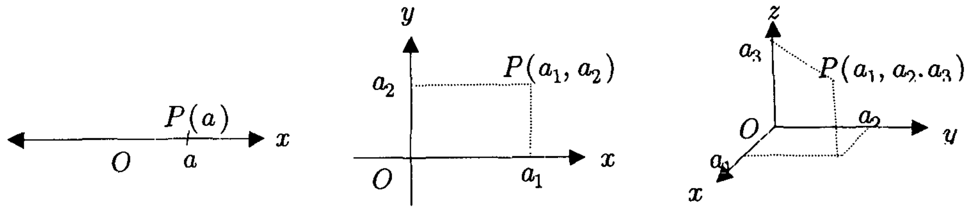
본 논문에서는 직관적, 논리적, 형식적 개념의 순서로 논의를 전개한다. 이러한 순서를 택한 것은 이것이 역사적 순서에 부합할 뿐만 아니라([4]) 이론적 체계에 있어서도 구체적이고 직관적인 내용에서 논리적이고 추상적인 내용으로 나아가는 것이 학습에 보다 효과적이기 때문이다. 또한 평면이나 공간은 실제 세계의 감각적 공간에서 익숙하므로, 직관적 개념에서 감각적 사고, 활동과 수학적 사고, 활동과의 연계성이 가장 잘 일어난다.

5. 직관적 개념

(1) 평면, 공간

가장 먼저 고려해야 할 것은 다루어지는 유클리드 공간이다. 특히 감각적 공간을 표현하는 수학적 대상으로서 3차원까지의 저차원 유클리드 공간이다. 유클리드 공간의 형식적 개념은 Weyl 공리계에 의해 규정되지만, 직관적으로는 이를 논의하는 사항들이 전부 가능한 공간으로 간주한다. 가령, 점, 선, 면, 공간, 직선도형이나 곡선도형을 다룰 수 있으며 길이, 각, 거리, 면적, 체적과 같은 기하학적 측도가 가능하다. 또한 벡터, 좌표계, 부분공간, 평행성 등을 고려할 수 있다.

편의상 익숙한 직교좌표계를 도입하자. 그러면 직선 $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, 평면 $\mathbb{R}^2$, 공간 $\mathbb{R}^3$에 대해 <그림1>과 같이 수직선, 좌표평면, 좌표공간을 도시한다.



<그림1>

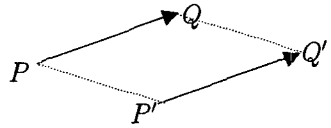
(2) 벡터와 스칼라

직관적으로 벡터는 크기와 방향을 가진 양으로 스칼라는 크기만을 갖는 양으로 정의한다. 가령 물리학에서 힘, 속도, 가속도는 벡터이고 시간, 질량, 온도는 스칼라이다.

벡터는 <그림2>과 같이 (유클리드)공간에서 유향선분으로 도시할 수 있다. 단 유향선분으로서 평행이동에 의해 겹쳐지는 것은 같은 벡터로서 동일시한다. 즉

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Leftrightarrow PP'Q'Q$가 평행사변형

이다. 또한 이것은 시점이 같지 않는 두 벡터의 합성을 고려할 때 유용하다.



$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$로 표시

<그림2>

한 점 O를 정해두면, 임의의 점 A와 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}$는 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$에 의해 일대일대응이 된다. 이 때 $\boldsymbol{a}$를 A의 위치벡터라고 한다.

이제 공간에 직교좌표계 $O-xyz$를 (오른손계에 따라) 택하자. 그러면 벡터는 좌표를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다. 시점이 $P(p_1, p_2, p_3)$, 종점이 $Q(q_1, q_2, q_3)$인 유향선분으로 표현되는 벡터는

(5.1) $$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

으로 정의한다. 이를 벡터의 성분표시라고 한다.

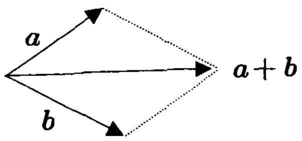
이러한 성분표시는 좌표계의 선택에 따라 달라진다는 것에 주의해야 한다. 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$가 상등이라는 것은 그 성분이 같을 때이다, 즉

(5.2) $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3.$$

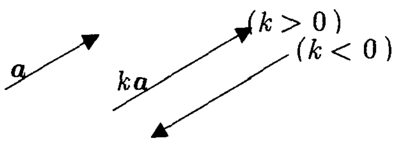
(3) 선형연산

경험적으로 힘의 합성의 평행사변형 법칙은 물리학에서 자연스럽게 고려된다. 또한 힘의 확대 및 축소, 방향전환도 일상적인 활동에서 흔히 일어난다.

이로부터 벡터에 다음과 같은 2가지 기본적인 작용을 도입한다. 벡터의 합과 스칼라와의 곱의 정의를 도시하면 각각 <그림3>와 <그림4>과 같다. 여기서 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$는 벡터이고 k는 스칼라, 특히 $k \in \mathbb{R}$(실수)라고 하자.



<그림3>



<그림4>

<그림3>와 <그림4>에 의해 정의된 벡터의 작용은 연산으로 표현할 수 있다. 좌표계를 도입하여 이를 성분표시로 나타내면, 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대해 합과 스칼라 곱은 각각

(5.3) $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3), \quad k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$$

으로 정의한다. 이로부터 선형연산의 성질을 쉽게 얻는다. 증명은 도형의 성질을 이용하거나 성분표시에 의해서도 가능하다.

[정리1] 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$와 스칼라 $k, l \in \mathbb{R}$에 대해 다음이 성립한다.

(i) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,

(ii) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,

(iii) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(iv) $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$, $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,

(v) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$, $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$.

(4) 부분공간, 생성

경험적으로 종종 공간은 보다 더 큰 공간의 부분공간이 된다. 가령 직선은 평면의 부분공간이며 평면은 공간의 부분공간이다. 이러한 관찰로부터 직관적으로 부분공간은 공간의 선형연산이 보존되는 부분집합으로서 정의한다.

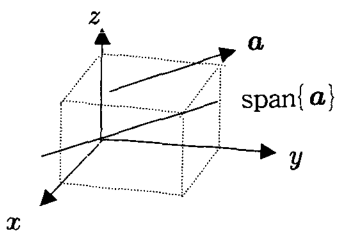
좌표계를 도입하자. 가령 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에는 4가지 종류의 공간이 있다.

(5.4) 원점 $\{\boldsymbol{0}\}$, 원점을 지나는 직선 $\mathbb{R}^1$, 원점을 지나는 평면 $\mathbb{R}^2$, 공간 자신 $\mathbb{R}^3$.

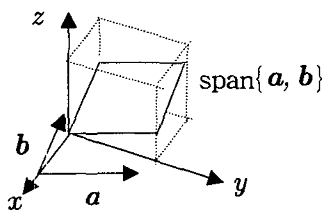
이들은 모두 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 된다. 사실 이외의 다른 형태의 부분공간은 존재하지 않음을 알 수 있다.

또한 주어진 벡터로부터 공간을 생성할 수 있다. 생성된 공간은 부분공간이 된다. 다음의 3가지 경우가 가능하다.

좌표계를 도입하자. 벡터 $\boldsymbol{a}$에 의해 생성되는 공간 span$\{\boldsymbol{a}\}$는 $\boldsymbol{a}$에 평행하고 원점을 지나는 직선이다(<그림5>). 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$에 의해 생성되는 공간 span$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$는 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 모두에 평행하고 원점을 지나는 평면이다(<그림6>). 마찬가지로 하여 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$에 의해 생성되는 공간 span$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$는 공간 자신이다(<그림8>).



<그림5>



<그림6>

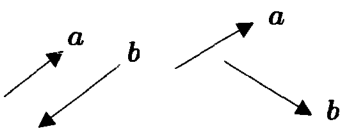
생성된 공간은 식으로 표현할 수 있는데, 가령

(5.5) $$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} = \{k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$$

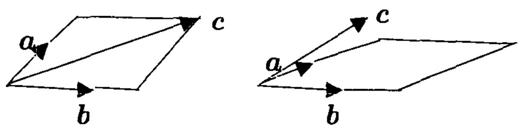
이 된다. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$에 벡터를 더 추가하는 경우에는 반드시 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$에 속함을 쉽게 관찰할 수 있다.

(5) 선형독립과 선형종속

경험적으로 방향에 의해 벡터 사이에 위치관계를 고려할 수 있다. 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$의 위치관계는 <그림7>과 같이 동일직선상에 놓이거나 그렇지 않는 2가지 경우로 나뉜다. 전자는 직선을 생성하고 후자는 평면을 생성한다. 세 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$의 위치관계는 <그림8>과 같이 동일평면상에 놓이거나 그렇지 않는 2가지 경우로 나뉜다. 전자는 직선 또는 평면을 생성하고 후자는 공간을 생성한다. 이 때 전자와 후자를 각각 선형종속과 선형독립이라 정의한다.



<그림7>



<그림8>

이러한 관찰에서 선형종속의 개념을 식으로 표현할 수 있다. <그림7>과 <그림8>에서 보듯이 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$가 선형종속이란 적당한 스칼라 $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$에 대해 각각

$$\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$$

가 성립한다. 선형독립은 선형종속의 부정이므로, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$가 선형독립이란

(5.6) $$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\text{이면 } k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

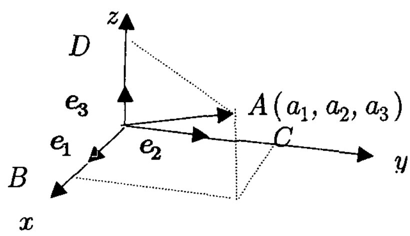
으로 표현된다.

(6) 직합, 사영

좌표계에서 경험하듯이, 좌표는 분석과 종합에 의해 주어진다. 예를 들면 <그림9>에서와 같이 좌표공간에서 점 A의 좌표 (a_1, a_2, a_3)는 x축 좌표 a_1와 y축 좌표 a_2, z축 좌표 a_3의 종합이다. 역으로 A의 x축 y축, z축으로의 (정)사영은 각각 점 B, C, D로의 분석이다. 이를 위치벡터로 나타내면

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$$

이다. 여기서 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$는 각각 x축 y축, z축에 평행하고 크기가 1인 기본벡터이다.



<그림9>

이러한 관찰로부터 평면은 두 직선의 직합이며 공간은 세 직선의 직합, 또는 평면과 직선의 직합으로 볼 수 있으며, 역으로 평면에서 직선으로의 사영이나 공간에서 평면이나 직선으로의 사영을 고려할 수 있다. 이를

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \text{ 또는 } \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$

로 표기한다. 보다 일반으로 이것은 직교좌표계가 아닌 경우에도 적용할 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 가령 $U = \mathrm{span}\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$이고 $W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{r}\}$, $\boldsymbol{r} \notin U$라 할 때

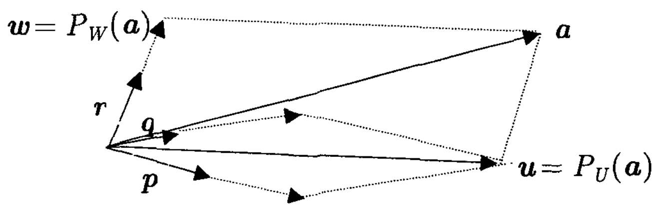
$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

가 성립한다. 이 때 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}$는 적당한 스칼라 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$에 대해

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (k_1\boldsymbol{p} + k_2\boldsymbol{q}) + k_3\boldsymbol{r} \tag{5.7}$$

로 일의적으로 표현된다(<그림10>). 역으로 $\boldsymbol{a}$의 U와 W로의 사영은 각각

$$P_U(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{p} + k_2\boldsymbol{q}, \quad P_W(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w} = k_3\boldsymbol{r}. \tag{5.8}$$



<그림10>

(7) 기저

경험적으로 평면이나 공간은 직교좌표계에서 기본벡터에 의한 자연스러운 기저를 갖고 있다. 이를 표준기저라고 한다. 예를 들면 직선에서는 $\{\boldsymbol{e}_1\}$, 평면에서는 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, 공간에서는 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$로 주어진다(<그림9>). 또한 <그림10>에서 주어진 $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ 역시 분명 공간에서 기저가 된다. 이로부터 좌표계에 의해 점을 완전히 결정하는 것은 곧 기저에 의해 벡터의 성분을 완전히 결정하는 것과 같음을 관찰할 수 있다.

이러한 관찰에서 기저의 개념은 2가지로 규정할 수 있다. 선형독립성의 측면에서

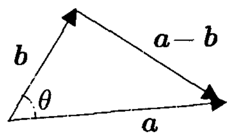
보면 <그림7>과 <그림8>에서 보듯이 기저는 선형독립인 벡터의 최대 집합으로 정의한다. 반면에 생성의 측면에서 보면 (4)에서 언급한 바와 같이 기저는 생성하는 벡터의 최소 집합으로 정의할 수 있다.

(8) 내적

경험적으로 공간에서는 길이, 각, 거리, 면적, 체적 등의 다양한 기하학적 측도를 할 수 있다. 이러한 활동은 내적에 의해 가능하다. 벡터 $\boldsymbol{a}$의 노름(크기) $|\boldsymbol{a}|$는 유향선분의 길이에 의해 명확하다. 벡터의 방향은 각의 개념에 의해 명확히 규정된다. 이를 위해 코사인정리로부터 유클리드 내적을

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta \quad (\theta\text{는 } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\text{사이의 교각})$$

으로 정의한다(<그림11>).



$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$
$$= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

<그림11>

그러면 벡터의 (유클리드) 노름은

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

으로 주어진다. 또한 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$사이의 거리는

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

에 의해 정의된다(<그림11>).

좌표계를 도입하자. 그러면 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$의 유클리드 내적은

(5.9) $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

이다. 또한 유도되는 노름과 거리는 각각

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

(9) 내적과 관련된 개념

유클리드 내적을 가진 유클리드 공간을 (유클리드)내적공간이라 정의한다. 앞서 살펴본 바와 같이 내적공간에서는 자연스럽게 노름 $|\ |$과 거리 d가 유도된다. 또한 내적공간의 부분공간도 자연스럽게 고려할 수 있다. 나아가 선형연산과 내적 사이에는 다음이 성립한다.

[정리2] 유클리드 내적은 다음을 만족한다.
(i) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
(ii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
(iii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$이고 등호가 성립할 필요충분조건은 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

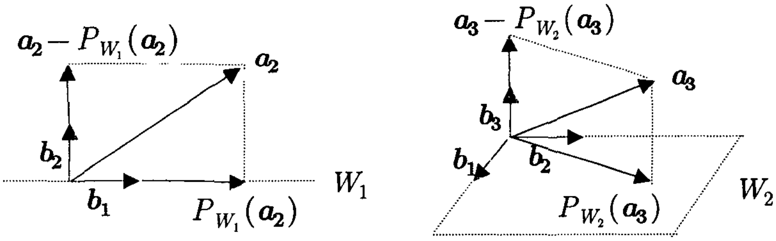
한편 유클리드 내적의 정의로부터

$$\text{벡터 } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\text{가 직교} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

임을 쉽게 관찰할 수 있다. 이로부터 내적공간에서는 서로 직교하는 직합과 정사영을 고려할 수 있다. 가령 공간에서

$$\mathbb{R}^3=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\oplus\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_3\}, \quad \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_3\}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}^{\perp} \text{ (직교보공간)}$$

이 성립한다(<그림9>). 표준기저는 길이가 1이고 서로 직교한다. 이러한 기저를 정규직교기저라 한다. 임의의 기저 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$는 Gram-Schmidt 과정에 의해 정규직교기저 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$로 만들 수 있다(<그림12>).



<그림12>

6. 논리적 개념

(1) 고차원 수공간

직관적 개념에서 저차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$을 고려하였다. 이러한 공간의 개념은 논리적으로 자연스럽게 $\mathbb{R}^n$, $n\geq 4$인 경우로 확장된다. 실제 자연현상이나 사회현상의 수학적 기술에 고차원 공간의 필요성이 나타나기 때문이다.

사실 저차원의 경우에는 점이나 벡터를 구체적으로 도시할 수 있는 반면에 고차원에서는 그렇지 못하다. 물론 도시할 수 없기 때문에 고찰할 수 없는 것은 전혀 아니다. 직관적으로 도시할 수 없어도 논리적으로 전개할 수 있다. 저차원의 경우 점이나 벡터의 표현은 좌표계에서 성분표시에 의해 나타낼 수 있었다. 이러한 방법은 논리적으로 유사하게 고차원의 경우로 확장된다.

이제 n차원 수공간은

$$\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

로 나타낸다. 여기서도 저차원에서와 같이 논의하는 사항들이 전부 가능한 공간으로 간주한다. 고차원의 경우는 도시할 수 없기 때문에 주로 성분표시에 의해 다룬다. 이를 위해 $\mathbb{R}^n$에 좌표계가 도입되어 있다고 간주한다.

(2) 벡터와 스칼라

$\mathbb{R}^n$에서 시점이 $P(p_1, \cdots, p_n)$, 종점이 $Q(q_1, \cdots, q_n)$인 유향선분으로 표현되는 벡터는

(6.1) $$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, \cdots, q_n - p_n)$$

으로 정의한다. 여전히 이러한 성분표시는 좌표계의 선택에 따라 달라진다는 것에 주의해야 한다. 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$의 상등은

(6.2) $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ \cdots,\ a_n = b_n.$$

으로 정의한다.

(3) 선형연산

벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$와 $k \in \mathbb{R}$에 대해 합과 스칼라 곱은 각각

(6.3) $$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n), \quad k\boldsymbol{a} = (ka_1, \cdots, ka_n)$$

으로 정의한다. 5절의 [정리1]은 그대로 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

(4) 부분공간, 생성

n차원 좌표공간 $\mathbb{R}^n$에는 $n+1$가지 종류의 부분공간이 있다.

(6.4) 원점 $\{\boldsymbol{0}\}$, 원점을 지나는 직선 $\mathbb{R}^1$, 원점을 지나는 평면 $\mathbb{R}^2$, $\cdots$,
원점을 지나는 초평면 $\mathbb{R}^{n-1}$, 공간 자신 $\mathbb{R}^n$.

더욱이 이외의 다른 형태의 부분공간은 존재하지 않음을 관찰할 수 있다.

또한 주어진 벡터로부터 생성되는 공간을 고려할 수 있다. 일반으로 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$에 의해 생성되는 공간은 부분공간으로서

(6.5) $$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} = \{k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m \mid k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{R}\}$$

으로 표현된다. 이 공간은 (6.4) 중의 하나가 된다.

(5) 선형독립과 선형종속

$\mathbb{R}^n$에서 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$이 선형독립이란

(6.6) $$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}\text{이면 } k_1=\cdots=k_m=0$$

으로 정의한다. 선형독립이 아닐 때 선형종속이라 한다. 즉

모두가 0은 아닌 적당한 스칼라 $k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{R}$에 대해 $k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$

를 만족할 때이다. 직관적 개념과는 달리 논리적 개념에서는 선형종속보다 선형독립의 개념을 먼저 규정하는 것이 자연스럽다.

(6) 직합, 사영

$\mathbb{R}^n$의 두 부분공간 U, W에 대해 직합

$T=U\oplus W$

은 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}\in T$는 적당한 스칼라 $k_1,\cdots,k_l,k_{l+1},\cdots,k_{l+m}\in\mathbb{R}$에 대해

(6.7) $$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=(k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_l\boldsymbol{u}_l)+(k_{l+1}\boldsymbol{w}_1+\cdots+k_{l+m}\boldsymbol{w}_m)$$

로 일의적으로 표현될 때로 정의한다. 역으로 $\boldsymbol{a}$의 U와 W로의 사영은 각각

(6.8) $$P_U(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_l\boldsymbol{u}_l,\quad P_W(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{w}=k_{l+1}\boldsymbol{w}_1+\cdots+k_{l+m}\boldsymbol{w}_m$$

이다. 보다 일반으로 부분공간 $U_1,\cdots,U_r$의 직합

$T=U_1\oplus\cdots\oplus U_r$

과 T에서 U_i로의 사영 $P_{U_i}(\boldsymbol{a})$을 자연스럽게 정의할 수 있다.

(7) 기저

$\mathbb{R}^n$의 기저는 선형독립인 벡터의 최대 집합으로 정의한다. 동치로 기저는 생성하는 벡터의 최소 집합이다. 이 경우의 표준기저는 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$이다. 또한 $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$이 선형독립이면 기저임을 쉽게 관찰할 수 있다.

기저를 이루는 벡터는 다양하지만 그 개수는 일정하다. 이를 차원이라 부른다. 따라서 모든 자연수 n에 대해 $\mathbb{R}^n$의 차원은 n이다.

(8) 내적

$\mathbb{R}^n$에서 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$의 유클리드 내적은

(6.9) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

으로 정의한다. 그러면 벡터의 노름은

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$

으로 주어진다. 또한 두 벡터 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$사이의 거리는

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

에 의해 정의된다. 또한 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 사이의 교각 θ는

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

에 의해 정의된다. 직관적 개념과는 달리 논리적 개념에서는 내적으로부터 각의 개념이 규정된다.

(9) 내적과 관련된 개념

저차원의 경우와 유사하게 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$에서 유클리드 내적을 고려할 때 (유클리드)내적공간이라 한다. 그러면 내적공간은 마찬가지로 노름 $|\ |$과 거리 d를 유도한다. 또한 유클리드 내적의 성질 [정리2]가 성립함을 알 수 있다. 뿐만 아니라 내적공간에서는 자연스럽게 서로 직교하는 직합과 정사영을 고려할 수 있다. 나아가 Gram-Schmidt 과정도 자연스럽게 확장된다.

7. 형식적 개념

(1) (추상적) 벡터공간

앞에서 직관적인 저차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$을 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$인 경우로 논리적으로 자연스럽게 확장하였다. 이제 공리계를 통해 형식적으로 벡터공간을 규정하자. 벡터나 선형연산의 본성과는 무관한 이러한 추상화과정은 이론뿐만 아니라 응용에 있어서 유용하다. 가령 앞에서 다룬 유클리드 공간 뿐만 아니라 행렬공간, 무한차원 함수공간 등의 풍부한 벡터공간의 예를 고려할 수 있게 해준다. 말하자면, 유향선분으로 표시되는 직관적 벡터만이 아니라 행렬이나 함수도 벡터로 취급할 수 있다.

V가 체 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이란 선형연산(합과 스칼라곱)

$$+ : V \times V \to V, \quad \cdot : \mathbb{F} \times V \to V$$

이 정의되어 있어서 [정리1]의 성질을 만족하는 것으로 규정한다. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$일 때 V를 실벡터공간, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$일 때 V를 복소벡터공간이라 한다. 이제부터 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$라고 한다.

그러면 당연히 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$은 실벡터공간이며 그 외에도 여러 벡터공간이 가능하다. 가령 (m, n)행렬들의 집합 $M_{m,n}(\mathbb{F})$, 수열들의 모임 $\mathbb{F}^\infty$, 나아가 집합 X상에서 $\mathbb{F}$값을 갖는 함수들의 모임 $F(X, \mathbb{F})$는 적절한 선형연산을 정의함으로써 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이 된다.

벡터공간의 형식적 개념이 주어지면 이로부터 유클리드 공간의 형식적 개념의 규정이 가능하다. 가령 Weyl 공리계에 의한 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$의 형식적 개념은 n차원 벡터공간 V가 있어서 다음을 만족하는 것으로 규정한다([9]).

(i) 임의의 $P, Q \in \mathbb{R}^n$에 대해 $\boldsymbol{a} \in V$가 존재한다. 이 때 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$라고 쓴다.

(ii) 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$와 $\boldsymbol{a} \in V$에 대해 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$인 $Q \in \overrightarrow{R}^n$가 단 하나 존재한다.

(iii) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{QR}$이면 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$이다.

이 때 $\mathbb{R}^n$의 원소를 점이라 한다. V를 $\mathbb{R}^n$에 수반하는 벡터공간이라 하고 그 원소를 $\mathbb{R}^n$의 벡터라 한다.

위의 공리계로부터 유클리드 기하학이 건설된다. 가령, 좌표계, 좌표변환, 부분공간, 평행성, 유클리드 운동 등의 개념을 고려할 수 있다.

(2) 선형연산

선형연산의 형식적 개념은 벡터공간의 형식적 개념에서 주어진 바와 같이 연산자로서 규정된다. 다양한 예들에 맞게 선형연산을 도입할 수 있다.

(3) 벡터와 스칼라

$(V, +, \cdot)$를 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이라 하자. 이 때 V의 원소를 벡터, $\mathbb{F}$의 원소를 스칼라라고 부른다. 형식적 개념에서는 벡터나 스칼라의 개념에 앞서 벡터공간의 규정과 함께 선형연산이 도입되었음에 주의한다.

(4) 부분공간, 생성

$(V, +, \cdot)$를 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이라 하자. $S \subseteq V$가 부분공간이란 선형연산에 닫혀있을 때로 정의한다. 이 때 $S \leq V$라고 표기한다.

또한 $S(\subseteq V)$로부터 생성되는 부분공간은

$\mathrm{span}S = \cap \{W \mid W \supseteq S, W \leq V\}$

으로 정의된다. S가 유한집합일 경우에는 논리적 개념으로 환원한다.

(5) 선형독립과 선형종속

$(V, +, \cdot)$를 $\mathbb{F}$상의 벡터공간이라 하자. $S \subseteq V$가 선형독립이란 임의의 스칼라 $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{F}$와 임의의 벡터의 집합 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m \subseteq S$에 대해

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \text{이면 } k_1 = \cdots = k_m = 0$$

를 만족하는 것으로 정의한다. 선형독립이 아닐 때 선형종속이라 정의한다.

(6) 직합, 사영

벡터공간 V의 두 부분공간 U, W에 대해 직합

$$T = U \oplus W$$

은 임의의 벡터 $\boldsymbol{a} \in T$는 적당한 스칼라 $k_1, \cdots, k_l, k_{l+1}, \cdots, k_{l+m} \in \mathbb{F}$에 대해

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_l\boldsymbol{u}_l) + (k_{l+1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + k_{l+m}\boldsymbol{w}_m)$$

로 일의적으로 표현될 때로 정의한다. 역으로 $\boldsymbol{a}$의 U와 W로의 사영은 각각

$$P_U(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_l\boldsymbol{u}_l, \quad P_W(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w} = k_{l+1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + k_{l+m}\boldsymbol{w}_m$$

이다. 동치로 $T = U \oplus W$, P_U, P_W가 사영일 필요충분조건은

$$P_U^2 = P_U,\ P_W^2 = P_W,\ \mathrm{im}P_U = \ker P_W = U,\ \ker P_U = \mathrm{im}P_W = W.$$

(7) 기저

벡터공간 V의 기저 B는 V를 생성하고 선형독립인 것으로 정의한다. 일반적으로 표준기저는 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\}$로 나타낼 수 있다.

B가 유한일 경우에는 논리적인 경우와 같이 기저는 선형독립인 최대 개수의 벡터의 집합이다. 동치로 이것은 V를 생성하는 최소 개수의 집합이다.

주어진 공간의 기저의 개수는 일정하며 이를 차원이라 한다. 공간의 부분공간은 차원에 의해 분류된다. 가령, $M_{m,n}(\mathbb{F})$의 차원은 mn이며 $\mathbb{F}^\infty$, $F(X, \mathbb{F})$은 모두 무한차원이다.

(8) 내적

$\mathbb{F}$상의 벡터공간 V의 내적이란 연산자

$$\cdot : V \times V \to \mathbb{F}$$

가 [정리2]를 만족하는 것으로 정의한다. 단 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$일 때 [정리2]에서 (ii)는

$$\text{(ii)}' \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$$

로 대체한다. 그러면 논리적 개념에서와 같이 벡터의 노름은

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

으로 주어지며, 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$사이의 거리 d와 교각 θ는 각각

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

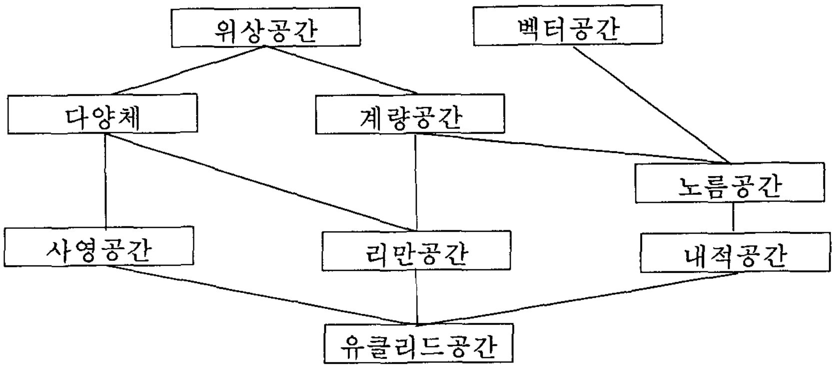
에 의해 정의된다. 단 복소수 범위에서는 이와 같이 각을 정의하지 못하는 것에 주의한다.

(9) 내적과 관련된 개념

유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$상에 정의된 유클리드 내적을 더욱 추상화하여 벡터공간상에 내적을 다양하게 정의할 수 있다. 마찬가지로 (추상적) 내적공간은 노름과 거리를 정의할

수 있기 때문에 노름공간인 동시에 계량공간(거리가 정의된 공간)이다. <그림13>의 간략한 공간의 구조는 벡터공간이 유클리드 공간사이의 관계를 잘 보여준다([4]).

또한 내적공간에서는 자연스럽게 서로 직교하는 직합과 정사영을 고려할 수 있다. 나아가 Gram-Schmidt 과정도 가능하다.



<그림13>

8. 결론 및 제언

지금까지 개념학습에 있어서 개념이해, 계산기능, 응용의 3가지 요소를 균형적이고 통합적으로 달성하기 위하여 수학적 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 분류하였다. 이러한 분류의 근거와 기준은 3종류의 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 의거하였다. 특히 벡터이론의 중요한 9가지 개념을 통하여 3가지 유형의 차이에 대해 실제적인 고찰을 하였다.

이러한 고찰을 토대로 벡터이론의 효과적인 개념학습을 위해서 본문에서와 같이

직관적 개념 → 논리적 개념 → 형식적 개념

의 순서로 진행할 것을 제안한다. 이 순서는 수리철학의 역사와도 맥락을 같이한다. 또한 그것은 역사적 순서에 부합할 뿐만 아니라 이론적 체계에 있어서도 구체적이고 직관적인 내용에서 논리적이고 추상적인 내용으로 나아감으로써 동기부여나 흥미유발을 통하여 학생들에게 접근성이 높다. [6], [10], [11], [12] 등 많은 서적은 위의 순서를 따른다. 이를 표준적 순서라고 하자.

한가지 지적하고 싶은 것은 직관적 개념을 본문에서 다룬 만큼 충분히 제공하는 경우를 찾기는 힘들다는 점이다. 직관적 개념은 논리적, 형식적 개념의 기원으로서 이것의 충분한 이해 없이는 성공적인 개념이해에 이르지 못한다.

물론 표준적 순서와 다른 순서를 고려할 수 있다. 가령 [7], [8]은

형식적 개념 → 직관적 개념 → 논리적 개념

으로 진행하며, [9]에서는

논리적 개념 → 형식적 개념 → 직관적 개념

의 순서로 구성되어 있다.

순서나 강조의 차이는 교육적 효과의 차이를 발생시킨다. 전자의 순서는 통상 형식적 정의, 정리, 증명의 스타일로 진행한다. 이것은 일견 난해하고 딱딱하며 무미건조한 것으로 치부하기 쉽지만 구조를 강조하는 현대수학의 세계에 본격적으로 입문하기 위해서는 반드시 거쳐야 하는 관문과도 같은 것이다. 이러한 의미에서 이것을 구조적 순서라고 하자. 접근방법에 있어서 표준적 순서가 나무를 통하여 거시적으로 숲을 보아가는 것이라면 구조적 순서는 숲을 통하여 구체적으로 나무를 보는 것으로 비유할 수 있다.

후자의 순서는 앞에서 언급한 2가지 순서의 중간적 입장에 해당한다. 이것은 논리적으로 확장할 수 있는 데까지 먼저 고려하는 것이다. 이는 표준적 순서에서 요구되는 직관성이 떨어지거나 구조적 순서의 형식성에 대해 곤란을 느끼는 학생들에게 양자의 문제점을 해소하기 위한 절충으로 볼 수 있다. 하지만 자칫 어중간한 학습과 이해는 직관적 개념과 형식적 개념을 모두 놓치게 한다.

순서의 차이보다 더욱 중요한 것은 이들 사이에 적절한 균형성을 유지하고 통합할 수 있도록 상호연관성을 세우는 일이다. 3가지 개념이 균형적이고 통합적으로 형성될 때 학습의 효과는 극대화된다. 이러한 상호연관성과 통합의 주체는 바로 수학적 직관이다. 실제 세계의 감각적 공간에 가장 가까운 것은 평면이나 공간이므로 수학적 직관은 여기서 감각적 사고나 활동과 수학적 사고나 활동과의 연계성을 통하여 가장 발휘된다. 이러한 직관적 개념은 차원의 확장과 같은 논리적 일반화나 추상공간과 같은 형식화를 이해하는 바탕이 된다. 더불어 이러한 고려는 다시 표준적 순서의 채택을 요구한다.

본 논문에서 고찰한 3가지 수리철학은 소위 절대주의를 따른다. 이것은 절대적 진리로서의 수학의 존재성 및 수학의 절대적 기초를 인정하는 입장이다. 반면에 20세기 중반 이후에 등장한 준경험주의나 구성주의는 상대주의(오류주의)를 따른다. 이 입장에서는 수학적 지식의 절대성을 부인하고 오류가능성을 인정한다. 따라서 본 논문과 유사하게 상대주의의 입장에 따라 벡터이론의 효과적인 개념학습에 대해 고찰해 볼 수 있을 것이다. 나아가 이것과 본 논문과의 비교연구는 흥미로운 과제이다.

감사의 글 본 논문의 개선을 위해 심사위원의 많은 중요하고 의미있는 지적과 조언에 깊은 감사를 드린다.

참고 문헌

1. 김용운, 김용국, 수학사대전, 우성문화사, 1986.
2. 박홍경, 수학의 발전과 위기, 경산대 기초과학 3(1999), 119-133.
3. 박홍경, 수학의 발전과 위기 II, 경산대 기초과학 4(2000), 99-113.
4. 박홍경, 김태완, 남영만, 벡터개념의 강의적 체계순서에 관하여, 한국수학사학회지 20(2006), 59-72.
5. 박홍경, 김태완, 정인철, 수학교육에 있어서 각의 개념지도 방안, 한국수학사학회지 18(2005), 85-100.
6. 이상구, 현대 선형대수학, 경문사, 2006.
7. 임근빈, 임동만, 선형대수학, 형설출판사, 2004.
8. 上坂吉則, 塚田眞, *入門線型代數*, 近代科學社, 1987.
9. 佐武一郎, *線型代數學*, 裳華房, 1992.
10. 松坂和夫, *線型代數入門*, 岩波書店, 1990.
11. Anton, H., Busby, R. C., Contemporary linear algebra, Anton Textbooks Inc., 2003.
12. Johnson, L. W., Riess, R. D., Arnold, J. T., Introduction to linear algebra, Addison-Wesley, 1992.

Patterns of mathematical concepts and effective concept learning - around theory of vectors

Department of Computer Science, Daegu Haany University **Hong Kyung Pak**
nstitute of Basic Science, Daegu Haany University **Tae Wan Kim**
Department of Asset Management, Daegu Haany University **Woo Dong Lee**

The present paper considers how to teach mathematical concepts. In particular, we aim to a balanced, unified achievement for three elements of concept learning such as concept understanding, computation and application through one's mathematical intuition. In order to do this, we classify concepts into three patterns, that is, intuitive concepts, logical concepts and formal concepts. Such classification is based on three kinds of philosophy of mathematics : intuitionism, logicism, fomalism. We provide a concrete, practical investigation with important nine concepts in theory of vectors from the viewpoint of three patterns of concepts. As a consequence, we suggest certain solutions for an effective concept learning in teaching theory of vectors.

Key words: concept learning, philosophy of mathematics, intuitionism, logicism, fomalism, linear algebra, theory of vectors

2000 Mathematics Subject Classification : 97-03

ZDM Classification : G19

논문 접수 : 2007년 4월 심사 완료 : 2007년 5월