한국수학사학회지 제20권 제3호(2007년 8월), 73-90

함수공간에서의 일반화된 푸리에-파인만 변환에 관한 고찰*

단국대학교 응용수학전공 장승준
sejchang@dankook.ac.kr

본 논문은 일반화된 브라운 확률과정으로 유도된 함수공간에서 정의되는 일반화된 파인만 적분과 일반화된 푸리에-파인만 변환을 소개하고, 이들의 존재정리 및 여러 가지 성질을 설명한다. 그리고 푸리에 변환과 일반화된 해석적 푸리에-파인만 변환의 유사성을 조사한다.

주제어 : 푸리에 변환, 일반화된 브라운 확률과정, 일반화된 파인만 적분, 일반화된 푸리에-파인만 변환

0. 서론

양자이론의 고전적 접근 방법에 관심을 가졌던 파인만(R. P. Feynman)은 1948년에 발표한 논문 [15]에서 함수공간에서의 한 적분의 존재성을 가정하고, 이 적분이 양자역학의 슈뢰딩거 방정식의 초기치 문제의 해를 구하는데 사용될 수 있음을 보였다. 이 적분을 파인만 적분(Feynman integral)이라 부르며, 파인만의 논문은 수학과 물리학에 직접 또는 간접적으로 많은 영향을 주었다.

파인만 적분이 소개된 이후 많은 수학자 및 물리학자들이 이 적분에 관심을 가지고 이 적분을 수학적 이론으로 발전시키려고 노력하였다. Cameron은 위너적분의 해석접속(analytic continuation)의 방법을 이용하여 해석적 파인만 적분(analytic Feynman integral)을 정의했다. 해석적 파인만 적분에 관련된 많은 연구들이 수학자와 물리학자들에 의하여 진행되어 왔다. 위너공간은 시불변(stationary)이고 이동(drift)이 주어지지 않은 위너과정(Wiener process)으로 구성된다.

한편 Chang과 Chung[11], Chang과 Skoug[12] 그리고 Chang, Choi과 Skoug[9]은 시가변(nonstationary)이고 이동이 주어지는 일반화된 브라운 확률과정(generalized Brownian motion process)을 이용하여 연속함수공간을 구성하였고 이 함수공간에서

* 이 연구는 2005학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

일반화된 해석적 파인만 적분(generalized analytic Feynman integral)과 일반화된 해석적 푸리에-파인만 변환(generalized analytic Fourier-Feynman transform)을 정의하였다. 그리고 이들의 관계에 대하여 다수의 연구결과를 얻었다([7]-[12]). 이 연구결과들은 위너공간에서 정의되었던 해석적 파인만 적분과 해석적 푸리에-파인만 변환에 대한 결과보다 일반적인 형태들로 얻어졌다.

본 논문에서는 함수공간에서 일반화된 파인만 적분을 이용하여 정의되는 일반화된 푸리에-파인만 변환을 소개하고 이들의 여러 가지 성질에 대하여 소개 한다.

1절에서는 푸리에 변환(Fourier-transform)에 대하여 간략히 소개하고, 2절에서는 위너공간에서 정의된 해석적 푸리에-파인만 변환을 소개하고 여러 가지 형태의 함수들에 대한 푸리에-파인만 변환의 존재성, 파세발 관계 등에 대하여 다루었다. 3절에서는 일반화된 브라운 확률과정을 이용하여 구성되는 연속함수공간을 소개하고, 일반화된 해석적 파인만 적분과 일반화된 해석적 푸리에-파인만 변환을 다루었다. 각 장의 끝 부분에는 본 논문의 내용과 관련된 연구논문들을 소개하였다. 4절에서는 푸리에 변환, 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환 그리고 함수공간에서의 일반화된 푸리에-파인만 변환의 상관관계를 기술하였다.

1. 푸리에 변환

이 절에서는 함수해석학과 양자역학의 여러 분야에서 중요하게 다루어지는 L_2함수의 푸리에 변환과 성질에 대하여 간략히 소개한다.

함수 $f\in L_2(\mathbb{R})$와 $L_2(\mathbb{R})$공간에서의 수열 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$이 다음 조건

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f(u)-f_n(u)|^2=0$$

을 만족하면 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$는 f로 수렴한다고 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$f(u)=\ \text{l.i.m.}_{n\to\infty}f_n(u).$$

푸리에 변환의 정의는 학자들마다 그 형태가 다소 차이가 있지만 나타나는 성질은 모두 같다. 본 논문에서는 다음과 같이 정의한다. 함수 $f\in L_2(\mathbb{R})$에 대하여

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{i\xi v}f(v)dv$$

을 f의 푸리에 변환이라 한다. 다음은 잘 알려진 푸리에 변환에 관한 내용이다.

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \text{l.i.m.}_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{i\xi v} f(v)dv.$$

이 식은 위너공간과 함수공간에서 푸리에-파인만 변환의 정의의 타당성을 제시해 준다. 또한 역변환 $\mathcal{F}^{-1}$이 존재하고 다음 식을 만족한다.

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = f(u).$$

푸리에 변환에 대하여 다음 사실이 잘 알려져 있다.

1. $\mathcal{F}$는 $L_2(\mathbb{R})$에서 $L_2(\mathbb{R})$로의 함수이다. 즉 $f \in L_2(\mathbb{R})$일 때 $\mathcal{F}(f) \in L_2(\mathbb{R})$.
2. 파세발(Parseval) 관계가 성립한다. 즉, $f, g \in L_2(\mathbb{R})$에 대하여
   $$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(-u)du.$$
3. 프란세렐(Plancherel) 관계가 성립한다. 즉, $f \in L_2(\mathbb{R})$에 대하여
   $$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du.$$

1972년 Brue는 연속함수공간에서 정의되는 함수에 대하여 푸리에 변환과 유사한 변환을 정의하고 이에 대한 성질을 조사하였다. 오늘날 이 변환을 푸리에-파인만 변환(Fourier-Feynman transform)이라 부른다. 2절에서 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환의 특성에 대해 알아보고 3절에서는 일반화된 함수공간에서 정의되는 일반화된 푸리에-파인만 변환에 대하여 알아본다.

2. 위너공간에서의 푸리에-파인만 변환

$C_0[0, T]$를 구간 $[0, T]$에서 정의되는 실수값을 갖는 연속함수 $x(t)$ 중에서 $x(0)=0$을 만족하는 함수들의 집합이라 하자. 이 연속함수공간을 위너공간(Wiener space)이라 한다. 해석적 푸리에-파인만 변환에 관한 L_1이론은 Brue[1]에 의하여 처음 소개되었고, Cameron과 Storvick[2]에 의하여 L_2이론으로 발전되었다. 1979년 Johnson 과 Skoug[20]는 $1 \le p \le 2$일 때 해석적 푸리에-파인만 변환의 L_p이

론을 전개하여 [1], [2]의 결과들을 확장하고 L_1이론과 L_2이론 사이의 여러 가지 관계에 대하여 연구하였다.

2.1 정의와 기본개념

$C_0[0, T]$ 의 부분집합 중에서 위너측도 가능한 집합들의 모임을 $\boldsymbol{M}$이라 하고 m을 위너측도(Wiener measure)라 하면 위너측도는 다음 식으로 정의된다. 구간 $[0, T]$ 의 임의의 분할 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le T$과 $\mathbb{R}^n$의 임의의 보렐집합 B에 대하여

$$I = \{x \in C_0[0, T] : (x(t_1), \cdots, x(t_n)) \in B\}$$

을 원통형 집합(cylinder set)이라 하고 이 원통형 집합에 대하여

$$m(I) = \left((2\pi)^n \prod_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})\right)^{-1/2} \int_B \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{(u_j - u_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right\} d\vec{u}$$

와 같이 정의된다. 여기에서 $t_0 = 0$, $u_0 = 0$ 그리고 $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$이다. $\boldsymbol{M}$은 모든 원통형 함수를 포함하는 최소의 완비 σ-집합대수(complete σ-algebra)이다. 그러면 $(C_0[0, T], \boldsymbol{M}, m)$은 완비측도공간(complete measure space)이 되고 함수 F의 위너적분(Wiener integral)은

$$\int_{C_0[0, T]} F(x)\, dm(x)$$

로 표시한다.

일반적인 측도론이나 적분론에서는 "거의 모든 점(almost everywhere)"의 개념이 이론전개의 중요한 개념이 되지만 파인만 적분론에서는 이 개념만으로 충분하지 못하다. 일반 적분론에서는 거의 모든 점에서 같은 두 함수의 적분은 같고, 따라서 이 두 함수는 같은 함수(동치류)로 취급한다. 그러나 파인만 적분론에서는 $m-a.e.$ 에서 같은 두 함수의 파인만 적분이 같지 않을 수 있다([21]). 따라서 파인만 적분이론에서는 $m-a.e.$ 대신 $s-a.e.$ (척도불변 거의 모든 점)의 개념이 필요하다.

$C_0[0, T]$ 의 부분집합 E가, 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $\rho E \in \boldsymbol{M}$을 만족하면 척도불변 가측집합(scale-invariant measurable set)이라 하고, 척도불변 가측집합 N이 모든 $\rho > 0$ 에 대하여 $m(\rho N) = 0$ 이면 척도불변 영집합(scale-invariant null set)이라 한

다. 어떤 성질이 척도불변 영집합을 제외하고 성립하면 척도불변 거의 모두(scale-invariant almost everywhere, $s-a.e.$)에서 성립한다고 한다. 또한 모든 $\rho>0$ 에 대하여 $F(\rho x)$가 위너측도 가능하면 F는 척도불변 가측함수(scale invariant measurable function)라 하고, F와 G가 $s-a.e.$ 에서 같으면 $F\approx G$로 표시한다. 이에 대한 자세한 내용은 [4], [13], [21]를 참고하면 된다.

위너공간에서 해석적 파인만 적분은 다음과 같이 정의된다. $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_+$와 $\widetilde{\mathbb{C}}_+$를 각각 복소수, 실수부가 양인 복소수, 그리고 실수부가 음이 아닌 복소수중 0을 제외한 집합이라 하자. F가 $C_0[0,T]$에서 정의되고 복소수값을 갖는 함수로서 모든 $\lambda>0$ 에 대하여 위너적분

$$J(\lambda)=\int_{C_0[0,T]}F(\lambda^{-1/2}x)dm(x)$$

가 유한값으로 존재한다고 하자. 만일 $\mathbb{C}_+$에서 정의되는 해석함수(analytic function) $J^*(\lambda)$가 존재하여, 모든 $\lambda>0$ 에 대하여 $J^*(\lambda)=J(\lambda)$ 이면, $J^*(\lambda)$를 $C_0[0,T]$ 위에서 매개변수 $\lambda\in\mathbb{C}_+$를 갖는 함수 F의 해석적 위너적분(analytic Wiener integral of F with parameter λ)이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda}F(x)dm(x)=J^*(\lambda)$$

라 나타낸다.

모든 $\lambda\in\mathbb{C}_+$에 대하여 F의 해석적 위너적분 $J^*(\lambda)$가 존재한다고 하자. 실수 $q\neq0$에 대하여, 다음 극한값을 매개변수 q를 갖는 함수 F의 해석적 파인만적분(analytic Feynman integral of F with parameter q)이라 하고

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_q}F(x)dm(x)=\lim_{\lambda\to-iq}\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda}F(x)dm(x)$$

로 나타낸다. 여기서 λ는 $\mathbb{C}_+$에서 $-iq$로 접근한다.

이제 $C_0[0,T]$에서 정의되는 함수 F의 L_p해석적 푸리에-파인만 변환을 소개한다. $\lambda\in\mathbb{C}_+$와 $y\in C_0[0,T]$에 대하여 T_λ를 다음과 같이 정의하자.

$$T_\lambda(F)(y)=\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda}F(y+x)dm(x).$$

임의의 $p\in[1,2]$ 에 대하여 다음 극한이 존재할 때($\lambda\in\mathbb{C}_+$)

$$T_q^{(p)}(F)(y)=\text{l.i.m.}_{\lambda\to-iq}T_\lambda(F)(y)$$

이 극한을 함수 F의 L_p 해석적 푸리에-파인만 변환이라 한다. 여기에서 l.i.m.는 다음을 의미한다. 임의의 $\rho>0$ 에 대하여

$$\lim_{\lambda\to -iq}\int_{C_0[0,T]}|T_\lambda(F)(\rho y)-T_q^{(p)}(F)(\rho y)|^{p'}dm(x)=0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

또한, $s-a.e.$ $y\in C_0[0,T]$ 에 대하여 보통극한

$$T_q^{(1)}(F)(y)=\lim_{\lambda\to -iq}T_\lambda(F)(y)$$

가 존재하면 $T_q^{(1)}(F)$를 L_1 해석적 푸리에-파인만 변환이라 한다.

임의의 $p\in[1;2]$ 에 대하여 $T_q^{(p)}(F)(y)$ 는 $s-a.e.$ 에서 정의된다. 또한 $T_q^{(p)}(F)$ 이 존재하고 $F\approx G$ 이면 $T_q^{(p)}(G)$ 도 존재하고 $T_q^{(p)}(F)\approx T_q^{(p)}(G)$ 이다.

2.2 바나하 대수 $S(L_2[0,T])$ 의 함수들에 대한 변환

1980년 Cameron 과 Storvick[3]은 $C_0[0,T]$ 에서 정의되는 함수들의 바나하 대수(Banach algebra) $S(L_2[0,T])$ 를 소개하였다. $M(L_2[0,T])$ 를 $L_2[0,T]$ 에서 정의된 복소수 값을 갖는 가산가법가능한 보렐측도(countably additive Borel measure)들의 공간일 때 바나하 대수 $S(L_2[0,T])$ 는 $f\in M(L_2[0,T])$ 와 $s-a.e.$ $x\in C_0[0,T]$ 에 대하여

$$F(x)=\int_{L_2[0,T]}\exp\left\{i\int_0^T v(t)\,dx(t)\right\}df(v) \tag{2.1}$$

형태의 함수들의 집합이다. 여기에서 $\int_0^T v(t)\,dx(t)$ 는 페리-위너-지그문드 확률적분(Paley-Wiener-Zygmund stochastic integral ; PWZ 확률적분)을 의미한다([26]).

$F\in S(L_2[0,T])$ 의 해석적 위너적분과 해석적 파인만 적분의 계산은 다음과 같다.

$$\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda}F(x)dm(x)=\int_{L_2[0,T]}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}\int_0^T v^2(t)\,dt\right\}df(v),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_q}F(x)dm(x)=\int_{L_2[0,T]}\exp\left\{-\frac{i}{2q}\int_0^T v^2(t)\,dt\right\}df(v),\quad q\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

$F\in S(L_2[0,T])$ 에 대한 L_p 푸리에-파인만 변환에 대하여 소개한다([18]).

정리 2.1 $F\in S(L_2[0,T])$ 가 식 (2.1)과 같이 주어진 함수라 하자. 그러면 임의의 $p\in[1,2]$ 와 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 F 의 L_p 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}(F)$ 가 존재하고 $s-a.e.$ $y\in C_0[0,T]$ 에서 다음과 같이 주어진다.

$$T_q^{(p)}(F)(y)=\int_{L_2[0,T]}\exp\left\{i\int_0^T v(t)dy(t)-\frac{i}{2q}\int_0^T v^2(t)\,dt\right\}df(v). \tag{2.2}$$

또한 $T_q^{(p)}(F)$ 는 $S(L_2[0,T])$ 의 원소이다.

다음은 푸리에-파인만 변환의 역변환에 관한 정리를 알아보자.

정리 2.2 $F\in S(L_2[0,T])$ 가 식 (2.1)과 같이 주어진 함수라 하자. 그러면 임의의 $p\in[1,2]$ 와 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F))\approx F. \tag{2.3}$$

정리 2.1의 결과를 이용하면, 다음과 같은 파세발 관계를 얻을 수 있다.

정리 2.3 F 와 G 가 $S(L_2[0,T])$ 의 원소라 하자. 임의의 $p\in[1,2]$ 와 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 다음 파세발 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}&\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} T_q^{(p)}(F)\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)T_q^{(p)}(G)\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)dm(y)\\ &\quad=\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)G\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)dm(y).\end{aligned} \tag{2.4}$$

위의 정리에서 $F=G$ 라 하면 다음 항등식(프란세렐 관계)을 얻는다.

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}}\left|T_q^{(p)}(F)\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 dm(y)=\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)F\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)dm(y). \tag{2.5}$$

식 (2.3), (2.4)와 (2.5)로부터 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환은 $L_2(\mathbb{R})$ 에서 정의되는 푸리에 변환과 같은 역할을 함을 알 수있다.

2.3 $A_n^{(p)}$ 의 함수들에 대한 변환

n 은 자연수이고 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$은 $L_2[0,T]$ 의 정규직교(orthonormal)함수들이라 하자. $p\in[1,\infty)$ 에 대하여 $A_n^{(p)}$ 은 $s-a.e.$ $x\in C_0[0,T]$ 에 대하여,

$$F(x)=f\left(\int_0^T \alpha_1(t)\,dx(t),\cdots,\int_0^T \alpha_n(t)\,dx(t)\right) \tag{2.6}$$

형태의 함수들의 집합이라 하자. 여기에서 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 는 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 에 속하는 함수이고 $\int_0^T \alpha_j(t)\,dx(t)$ 는 PWZ 확률적분이다. 그리고 $A_n^{(\infty)}$는 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ 에 대하여 (2.6)식과 같이 표현되는 함수들의 모임이다. $C_0(\mathbb{R}^n)$ 는 $\mathbb{R}^n$에서 정의되는 유계이고 연속인 함수이며 무한점에서 0 인 함수들의 공간이다. $F\in A_n^{(p)}$이면 F는 척도불변 가측함수임을 알 수 있다.

Huffman, Park 과 Skoug[17]는 $A_n^{(p)}$의 함수 F의 푸리에-파인만 변환에 대하여 연구하고 다음 결과들을 얻었다.

정리 2.4 $p\in[1,2]$ 이고 $F\in A_n^{(p)}$가 식 (2.6)과 같이 주어졌다고 하자. 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 $T_q^{(p)}(F)$ 가 존재하고 $A_n^{(p')}$에 속한다 (단 $1/p+1/p'=1$.) 또한 $s-a.e.$ $y\in C_0[0,T]$ 에 대하여

$$T_q^{(p)}(F)(y)=\left(\frac{-iq}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{u})\exp\left\{\frac{iq}{2}\sum_{j=1}^n (u_j-A_j)^2\right\}d\vec{u} \tag{2.7}$$

이다. 여기에서 $A_j=\int_0^T \alpha_j(t)\,dy(t)$, $j=1,\cdots,n$이다.

다음은 $A_n^{(p)}$의 함수에 대한 푸리에-파인만 변환의 역변환에 관한 정리이다.

정리 2.5 $p=2$ 이고 $F\in A_n^{(2)}$가 식 (2.6)과 같이 주어진 함수라 하자. 그러면 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$T_{-q}^{(2)}(T_q^{(2)}(F))\approx F.$$

정리 2.6 F와 G가 $A_n^{(2)}$의 원소라 하면 모든 실수 $q\neq 0$ 에 대하여 다음 파시발 관계가 성립한다.

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} T_q^{(2)}(F)\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)T_q^{(2)}(G)\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)dm(y)$$
$$=\int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)G\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)dm(y).$$

2.4 관련된 연구들

이 절에서는 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환에 관련된 연구논문들을 간략히 소개한다.

Johnson 과 Skoug[22], [24]는 양자역학에서 중요한 역할을 하는 다음형태로 표시되는 함수

$$F(x)=\exp\left\{\int_0^T f(t,x(t))dt\right\} \tag{2.8}$$

가 바나하 대수 $S(L_2[0,T])$ 의 원소가 됨을 보였다. 바나하 대수 $S(L_2[0,T])$ 에 대해서는 그동안 많은 연구가 진행되어왔다[5, 6, 22, 23, 24]. Feynman 과 Hibbs 는 자신들의 책 [16]과 논문 [15]에서, 적당한 함수 $f:[0,T]^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ 에 대하여

$$F(x)=\exp\left\{\int_0^T\int_0^T f(s,t,x(s),x(t))dsdt\right\} \tag{2.9}$$

와 같이 표시되는 함수들에 대하여 다루었다. Huffman, Park 과 Skoug 는 [18]에서 (2.8)과 (2.9)를 포함하는 다양한 함수들에 대한 푸리에-파인만 변환에 관한 결과들을 얻었다.

Chung, Park 과 Skoug는 위너공간에서 정의되는 적분과정(integral process)을 이용하여 파인만 적분을 정의하였고[14], Huffman, Park 과 Skoug는 [19] 에서 적분과정을 이용한 푸리에-파인만 변환을 정의하고 그 성질을 연구하였다. 한편 Park 과 Skoug는 적분과정에 대한 조건부 푸리에-파인만 변환에 관하여 연구하였다([25]).

3. 함수공간에서의 일반화된 푸리에-파인만 변환

위너공간 $C_0[0,T]$ 는 시불변이고 이동이 주어지지 않는 위너과정(Wiener process)으로 구성된다. Chang 과 Chung은 시가변이고 이동이 주어지는 일반화된 브라운 확률과정(generalized Brownian motion process)을 이용하여 연속함수공간 $C_{a,b}[0,T]$ 을 구성하고 이 공간에서 정의되는 함수공간 적분에 대하여 연구하였다[11]. 그리고 [7-10, 12]에서 저자들은 함수공간에서 일반화된 파인만 적분, 일반화된 푸리에-파인만 변환을 정의하고 이에 관련된 여러 가지 성질을 얻었다. 일반화된 브라운 확률과정으로 구성된 연속함수공간을 $(C_{a,b}[0,T], B(C_{a,b}[0,T]), \mu)$ 로 표시한다. 여기에서 $B(C_{a,b}[0,T])$ 는 $C_{a,b}[0,T]$ 에서 정의되는 평등노름(supremum norm)에 의하여 구성되는 보렐 σ-집합대수(Borel σ-algebra)이고 μ는 확률밀도함수가 (3.1)과 같이 주어지는 확률측도(probability measure)이다. 구간 $[0,T]$ 의 임의의 분할

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le T$ 과 $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 보렐집합 B 에 대한 원통형 집합 $I = \{x \in C_{a,b}[0, T] : (x(t_1), \cdots, x(t_n)) \in B\}$ 에 대하여

$$\mu(I) = \left((2\pi)^n \prod_{j=1}^{n} (b(t_j) - b(t_{j-1}))\right)^{-1/2} \times \int_B \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{((u_j - a(t_j)) - (u_{j-1} - a(t_{j-1})))^2}{b(t_j) - b(t_{j-1})}\right\} d\vec{u}. \quad (3.1)$$

여기에서 $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, $\vec{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $a(t)$는 구간 $[0, T]$ 에서 정의되는 절대연속함수, $b(t)$는 구간 $[0, T]$에서 정의되는 일계도함수가 연속이고 $b'(t) > 0$ 을 만족하는 함수이다. 이러한 연속함수 공간 $(C_{a,b}[0, T], B(C_{a,b}[0, T]), \mu)$을 일반화된 브라운 확률과정에 의하여 유도된 함수공간이라 한다. a를 평균함수 b를 분산함수라 부른다.

함수공간에서도 "척도불변 거의 모든 점"의 개념을 위너공간에서와 같이 정의하고 일반화된 파인만 적분과 일반화된 푸리에-파인만 변환이 위너공간의 파인만 적분, 푸리에-파인만 변환과 같은 방법으로 정의된다. 해석적 위너적분은 함수공간에서 해석적 함수공간 적분이라 하고 $\int_{C_0[0,T]}^{anw_\lambda} F(x) dm(x)$ 대신 $\int_{C_{a,b}[0,T]}^{an_\lambda} F(x) d\mu(x)$ 로 나타낸다.

식 (3.1)에 의하여 정의된 확률측도의 특성에 의하여 다음과 같이 위너공간과 다른 특징이 생긴다.

표 3.1

위너공간	함수공간
$\int_{C_0[0,T]} x(t) dm(t) = 0$	$\int_{C_{a,b}[0,T]} x(t) d\mu(t) = a(t)$
$\int_{C_0[0,T]} x(t_1)x(t_2) dm(t) = \min\{t_1, t_2\}$ 단 $t_1, t_2 \in [0, T]$	$\int_{C_{a,b}[0,T]} x(t_1)x(t_2) d\mu(t) = \min\{b(t_1), b(t_2)\}$ 단 $t_1, t_2 \in [0, T]$

3.1 바나하 대수 $S(L^2_{a,b}[0, T])$ 의 함수들에 대한 변환

2003년 Chang과 Skoug[12]은 일반화된 함수공간에서 정의되는 함수들의 바나하 대수(Banach algebra) $S(L^2_{a,b}[0, T])$ 를 소개하였다.

우선 힐버트공간 $L^2_{a,b}[0,T]$ 을 소개한다. 르벡 가측함수(Lebesgue measurable function)이고 연속함수 a와 b로 유도된 르벡-스틸체스 측도(Lebesgue-Stieltjes measure)에 대하여 제곱적분가능한 함수들의 집합 $L^2_{a,b}[0,T]$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$L^2_{a,b}[0,T]=\left\{v: \int_0^T v^2(t)\,d|a|(t)<\infty \text{ 그리고 } \int_0^T v^2(t)\,db(t)<\infty\right\}.$$

여기에서 $|a|(t)$는 각 $t\in[0,T]$ 에 대하여 소구간 $[0,t]$ 에서 정의되는 a의 전변동(total variation)이다. 임의의 $u,v\in L^2_{a,b}[0,T]$ 에 대하여

$$(u,v)_{a,b}=\int_0^T u(t)v(t)\,d[b(t)+|a|(t)] \tag{3.2}$$

는 $L^2_{a,b}[0,T]$ 에서 내적(inner product)이 되고 식 (3.2)에 의하여 유도된 노름 $\|\cdot\|_{a,b}=\sqrt{(\cdot,\cdot)_{a,b}}$에 대하여 벡터공간 $(L^2_{a,b}[0,T],\|\cdot\|_{a,b})$는 가분 힐버트공간(separable Hilbert space)이 된다. 함수공간에서 PWZ 확률적분은 위너공간에서와 같은 방법으로 구성되고 $\langle v,x\rangle$ 와 같이 표시한다. $\langle v,x\rangle$ 는 가우시안 확률변수(Gaussian random variable)이고 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$(v,a')=\int_0^T v(t)\,da(t), \qquad (v^2,b')=\int_0^T v^2(t)\,db(t).$$

$M(L^2_{a,b}[0,T])$ 를 $L^2_{a,b}[0,T]$ 에서 정의된 복소수 값을 갖는 가산가법가능한 보렐 측도(countably additive Borel measure)들의 공간이라 하자. 바나하 대수 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 는 $f\in M(L^2_{a,b}[0,T])$ 일 때 $\mu-a.e.$ $x\in C_{a,b}[0,T]$ 에 대하여

$$F(x)=\int_{L^2_{a,b}[0,T]}\exp\{i\langle v,x\rangle\}\,df(v) \tag{3.3}$$

형태의 함수들의 모임이다.

$F\in S(L^2_{a,b}[0,T])$ 의 해석적 함수공간 적분과 일반화된 해석적 파인만 적분의 계산은 다음과 같다[12].

$$\begin{aligned}&\int_{C_{a,b}[0,T]}^{\mathrm{an}_\lambda}F(x)\,d\mu(x)\\&=\int_{L^2_{a,b}[0,T]}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(v^2,b')+i\lambda^{-1/2}(v,a')\right\}df(v),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_q} F(x)d\mu(x)$$
$$= \int_{L^2_{a,b}[0,T]} \exp\left\{-\frac{i}{2q}(v^2, b') + i\left(\frac{i}{q}\right)^{1/2}(v, a')\right\} df(v), \quad q\in\mathbb{R}-\{0\} \quad (3.5)$$

위 식 (3.5)에서 나타나는 일반화된 해석적 파인만 적분이 항상 존재하지는 않는다. [7, 8, 9, 12]에서 저자들은 몇 가지 조건을 주어 일반화된 파인만 적분과, 일반화된 변환의 존재성을 얻었다.

이제 $F\in S(L^2_{a,b}[0,T])$ 에 대한 L_p 일반화된 푸리에-파인만 변환에 대하여 소개한다[8, 12].

정리 3.1 q_0를 0이 아닌 실수라 하자. $F\in S(L^2_{a,b}[0,T])$ 가 식 (3.3)과 같이 주어진 함수이고 대응하는 보렐측도 $f\in M(L^2_{a,b}[0,T])$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\int_{L^2_{a,b}[0,T]} \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{|2q_0|}}\int_0^T |v(t)|d|a|(t)\right\}|df(v)| < \infty . \quad (3.6)$$

임의의 $p\in[1,2]$ 와 $|q|\geq|q_0|$ 인 임의의 실수 q 에 대하여 F 의 L_p 일반화된 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}(F)$ 가 존재하고 $\mu-a.e.$ $y\in C_{a,b}[0,T]$ 에서 다음과 같이 주어진다.

$$T_q^{(p)}(F)(y)$$
$$= \int_{L^2_{a,b}[0,T]} \exp\left\{i\langle v, y\rangle - \frac{i}{2q}(v^2, b') + i\left(\frac{i}{q}\right)^{1/2}(v, a')\right\} df(v). \quad (3.7)$$

또한 $T_q^{(p)}(F)$ 는 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 의 원소이다.

$S(L^2_{a,b}[0,T])$ 의 원소들은 $S(L_2[0,T])$ 에서와는 달리 (2.4), (2.5)과 같은 파세발 관계와 프란세렐 관계가 성립하지 않는다. 그러나 다음이 성립한다.

정리 3.2 q_0를 0이 아닌 실수라 하고 F와 G가 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 의 원소라 하자. F와 G에 대응되는 보렐측도 $f, g\in M(L^2_{a,b}[0,T])$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$\int_{L^2_{a,b}[0,T]} \exp\left\{\frac{3}{\sqrt{|4q_0|}} \int_0^T |v(t)|d|a|(t)\right\}[|df(v)|+|dg(v)|] < \infty \tag{3.8}$$

그러면 임의의 $p \in [1,2]$ 와 $|q| \geq |q_0|$ 인 임의의 실수 q에 대하여 다음관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_q} T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(G(-\,\cdot\,))(-\,\cdot\,))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y) \\
&= \int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_q} T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(G))\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 관련된 연구들

이 절에서는 함수공간에서 정의되는 일반화된 파인만 적분과 일반화된 푸리에-파인만 변환에 관련된 연구논문들을 간략히 소개한다.

1996년 Chang과 Chung은 일반화된 브라운 확률과정으로 구성된 연속함수공간을 처음 구성하고 이 확률공간위에서 위너적분과 같은 함수공간 적분과 변환을 소개하였다([11]). 그리고 이를 응용하여 일반화된 칵-파인만 적분방정식(Kac-Feynman integral equation)의 해를 유도하였다. 2003년 Chang과 Skoug는 함수공간위에서 일반화된 파인만 적분과 일반화된 푸리에-파인만 변환을 정의하고 바나하대수 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 을 소개하였다. 그리고 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 에 속하는 함수들의 일반화된 파인만 적분과 변환의 존재성을 밝혔고 이들을 포함하는 부분적분법(integration by parts formula)을 유도하였다([12]). Chang, Choi 그리고 Skoug는 [9]에서 PWZ 확률적분으로 정의되는 원통형 함수

$$F(x) = f(\langle \alpha_1, x \rangle, \cdots, \langle \alpha_n, x \rangle)$$

의 일반화된 L_1 푸리에-파인만 변환과 L_2 푸리에-파인만 변환의 존재성을 밝히고 이들을 포함하는 부분적분법을 유도하였다. [7]에서 Chang과 Choi는 함수공간에서 조건부 일반화된 파인만 적분과 조건부 일반화된 푸리에-파인만 변환을 정의하고 바나하대수 $S(L^2_{a,b}[0,T])$ 에 속하는 함수들에 대한 조건부 변환에 관한 내용을 연구하였다.

4. 결론

함수해석학의 중요한 도구인 L_2 푸리에 변환의 성질들과 비교할 때 위너공간과 함수공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환은 각각 다른 공간에서 정의되는 개념이지만 비슷한 성질들이 많이 나타난다. 이는 푸리에 변환과 같이 푸리에-파인만 변환이 수학적으로 그리고 물리학 분야에도 많은 응용성을 가지고 있음을 나타낸다. 다음은 세 가지 공간에서 정의되는 변환사이의 관계를 비교, 정리하여 보았다.

1. 역변환의 존재성 :

(1) 푸리에 변환 $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(u)=f(u)$.

(2) 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}$:

(i) $F\in S(L_2[0,T])$, $T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F))=F$ $s-a.e.$.

(ii) $F\in A_n^{(2)}$, $T_{-q}^{(2)}(T_q^{(2)}(F))=F$ $s-a.e.$.

(3) 함수공간에서 정의되는 일반화된 푸리에-파인만 $T_q^{(p)}$:

아직까지 역변환의 존재성과 형태에 대하여 이론이 정립되어 있지 않다. 현재 존재성에 대하여 연구가 진행되고 있다.

2. 파세발(Parseval) 관계:

(1) 푸리에 변환 $\mathcal{F}$: $f\in L_2(\mathbb{R})$ 에 대하여

$$\int_{\mathbf{R}}\mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)d\xi=\int_{\mathbf{R}}f(u)g(-u)du.$$

(2) 위너공간에서 정의되는 푸리에 파인만 변환 $T_q^{(p)}$:

(i) $F, G\in S(L_2[0,T])$ 와 임의의 $p\in[1,2]$ 에 대하여

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}}T_q^{(p)}(F)(y/\sqrt{2})T_q^{(p)}(G)(y/\sqrt{2})dm(y)$$
$$=\int_{C_0[0,T]}^{anf_q}F(y/\sqrt{2})G(-y/\sqrt{2})dm(y).$$

(ii) $F, G\in A_n^{(2)}$ 에 대하여

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}}T_q^{(2)}(F)(y/\sqrt{2})T_q^{(2)}(G)(y/\sqrt{2})dm(y)$$
$$=\int_{C_0[0,T]}^{anf_q}F(y/\sqrt{2})G(-y/\sqrt{2})dm(y).$$

(3) 함수공간에서 정의되는 일반화된 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}$:

$F, G \in S(L^2_{a,b}[0, T])$ 와 임의의 $P \in [1,2]$ 에 대하여

$$\int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_{-q}} T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(G(-\,\cdot\,))(-\,\cdot\,))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y)$$
$$= \int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_q} T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(G))\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y).$$

3. 프란세렐(Plancherel) 관계:

(1) 푸리에 변환 $\mathcal{F}$: $f \in L_2(\mathbb{R})$ 에 대하여 $\int_{\mathbf{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbf{R}} |f(u)|^2 du$.

(2) 위너공간에서 정의되는 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}$:

(i) $F, G \in S(L_2[0, T])$ 와 임의의 $p \in [1,2]$ 에 대하여

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} |T_q^{(p)}(F)(y/\sqrt{2})|^2 dm(y) = \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(y/\sqrt{2}) F(-y/\sqrt{2}) dm(y).$$

(ii) $F, G \in A_n^{(2)}$ 에 대하여

$$\int_{C_0[0,T]}^{anf_{-q}} |T_q^{(2)}(F)(y/\sqrt{2})| dm(y) = \int_{C_0[0,T]}^{anf_q} F(y/\sqrt{2}) F(-y/\sqrt{2}) dm(y).$$

(3) 함수공간에서 정의되는 일반화된 푸리에-파인만 변환 $T_q^{(p)}$:

$F, G \in S(L^2_{a,b}[0, T])$ 에 대하여

$$\int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_{-q}} T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F(-\,\cdot\,))(-\,\cdot\,))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y)$$
$$= \int_{C_{a,b}[0,T]}^{anf_q} T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) T_{-2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F))\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right) d\mu(y).$$

위너공간에서 푸리에-파인만 변환의 파세발 관계와 프란세렐 관계가 $L_2(\mathbb{R})$ 에서의 푸리에 변환의 파세발 관계와 프란세렐 관계와 거의 같은 형태로 나타난다. 함수공간에서는 일반화된 푸리에-파인만 변환의 두 관계가 위너공간에서의 변환의 모습과 다른 형태로 나타난다. 이것은 함수공간을 구성하는 일반화된 브라운 확률과정에서 주어지는 이동 $a(t)$ 의 영향으로 나타나는 현상이다. 그러나 이동함수를 $a(t)=0$ 으로 택하면

$$T_{2q}^{(p)}(T_{2q}^{(p)}(F)) = T_q^{(p)}(F), \quad T_{-q}^{(p)}(T_q^{(p)}(F)) = F \quad T_q^{(p)}(F)(-y) = T_q^{(p)}(F)(y)$$

임을 알 수 있고 이 때 위너공간에서의 변환에 대한 결과와 일치함을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Brue, M. D., *A Functional Transform for Feynman Integrals Similar to the Fourier Transform*, Thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1972.
2. Cameron, R. H., Storvick, D. A., *An L_2 analytic Fourier-Feynman transform*, Michigan Math. J., 23(1976), 1-30.
3. Cameron, R. H., Storvick, D. A., *Some Banach algebras of analytic Feynman integrable functionals*, An Analytic Functions(Kozubnik 1979), Lecture Note in Math., Vol 798(1980), 18-67.
4. Chang, K. S., *Scale-invariant measurability in Yeh-Wiener space*, J. Korean Math. Soc., 19(1982), 61-67.
5. Chang, K. S., Johnson, G. W., Skoug, D. L., *The Feynman integral of quadratic potentials depending on two time variables*, Pacific J. Math., 122(1986), 11-33.
6. Chang, K. S., Johnson, G. W., Skoug, D. L., *Functions in the Banach algebra* $S(\nu)$, J. Korean Math. Soc., 24(1987), 151-158.
7. Chang, S. J., Choi, J. G., *Conditional generalized Fourier-Feynman transform and conditional convolution product on a Banach algebra*, Bull. Korean Math. Soc., 41(2004), 73-93.
8. Chang, S. J., Choi, J. G., *Multiple L_p analytic generalized Fourier-Feynman transforms on the Banach algebra*, Commun. Korean Math. Soc., 19(2004), 93-111.
9. Chang, S. J., Choi, J. G., Skoug, D., *Integration by parts formulas involving generalized Fourier-Feynman transforms on function space*, Trans. Amer. Math. Soc., 355(2003), 2925-2948.
10. Chang, S. J., Choi, J. G., Skoug, D., *Parts formulas involving conditional generalized Feynman integrals and conditional generalized Fourier-Feynman transforms on function space*, Integral transforms and Special Functions, 15(2004), 491-512.
11. Chang, S. J., Chung, D. M., *Conditional function space integrals with applications*, Rocky Mountain J. Math., 26(1996), 37-62.
12. Chang, S. J., Skoug, D., *Generalized Fourier-Feynman transforms and a first variation on function space*, Integral Transforms and Special Functions, 14(2003), 375-393.
13. Chung, D. M., *Scale-invariant measurability in abstract Wiener space*, Pacific J. Math., 130(1987), 27-40.

14. Chung, D. M., Park, C., Skouig D., *Generalized Feynman integrals via conditional Feynman integrals*, Michigan Math. J., 40(1993), 377-391.
15. Feynman, R. P., *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys., 20(1948), 367-387.
16. Feynman, R. P., Hibbs, A.R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
17. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Analytic Fourier-Feynman transforms and convolution*, Trans. Amer. Math. Soc., 347(1995), 661-673.
18. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Convolutions and Fourier-Feynman transforms of functionals involving multiple integrals,* Maichigam Math. J., 43(1996), 247-261.
19. Huffman, T., Park, C., Skoug, D., *Generalized transforms and convolutions*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 20(1997), 19-32.
20. Johnson, G. W., Skoug, D. L., *An L_p analytic Fourier-Feynman transform*, Michigan Math. J., 26(1979), 103-127.
21. Johnson, G. W., Skoug, D. L., *Scale-invariant measurability in Wiener space*, Pacific J. Math., 83(1979), 157-176.
22. Johnson, G. W., Skoug, D. L., *Notes on the Feynman integral I*, Pacific J. Math., 93(1981), 313-324.
23. Johnson, G. W., Skoug, D. L., *Notes on the Feynman integral Π*, J. Functional Analysis, 41(1981), 277-289.
24. Johnson, G. W., Skoug, D. L., *Notes on the Feynman integral IΠ*; The Schroedinger equation, Pacific J. Math., 105(1983), 321-358.
25. Park, C., Skoug, D., *Conditional Fourier-Feynman transforms and conditional convolution products*, J. Korean Math. Soc., 38(2001), 61-76.
26. Paley, R.E.A.C., Wiener, N., Zygmund, A., *Notes on random functions*, Math. Zeit, 37(1933), 647-668.

Note on the generalized Fourier-Feynman transform on function space

Department of Mathematics, Dankook University **Seung Jun Chang**

In this paper, we define a generalized Feynman integral and a generalized Fourier-Feynman transform on function space induced by generalized Brownian motion process. We then give existence theorems and several properties for these concepts. Finally we investigate relationships of the Fourier transform and the generalized Fourier-Feynman transform.

Key words: Fourier transform, Generalized Brownian motion process, Generalized analytic Feynman integral, Generalized analytic Fourier-Feynman transform

2000 Mathematics Subject Classification : 60J65, 28C20

논문 접수: 2007년 4월　　　　　　심사 완료: 2007년 5월