# 복소수의 기하적 해석의 발달 : Descarte, Wallis, Wessel를 중심으로

서울대학교 대학원 이동환
2donghwan@paran.com

복소수 발견초기 수학자들은 복소수에 대한 거부감이 상당했으나 복소수의 대수적 연산에는 큰 어려움이 없었다. 복소수가 수학적 대상으로 인정받기까지 많은 시간이 필요했던 이유는 복소수의 기하적 해석에 많은 시행착오와 시간이 필요했기 때문이다. 본 논문은 복소수의 기하적 해석의 싹을 Euclid 원론에서 찾고, Descarte, Wallis, Wessel를 거치면서 그 싹이 틔어가는 과정을 밝히고 있다. 복소수의 기하적 해석에 대한 세 명의 수학자들의 생각은 서로 다르지만 밀접한 관계가 있다. 이들은 선분과 복소수의 관계에 주목하고, 곱셈 연산을 일반화하면서 복소수의 기하적 해석을 시도하였다.

주제어 : 복소수의 기하적 해석, Descarte, Wallis, Wessel, 복소수의 연산

## 0. 서론

음수가 사용되기 시작한 것은 기원전 1세기까지 거슬러 올라가지만, 음수가 수로 인정받게 된 것은 불과 200년도 되지 않았다[1, p.1]. 이러한 상황에서 수학자들이 음수의 제곱근인 허수를 수용하기가 얼마나 어려웠을지는 충분히 짐작할 수 있을 것이다. 그러나 복소수의 연산은 수용여부와 별개였다. 1545년 Cardano가 부정적이지만, 음수의 제곱근을 최초로 언급한 이후, 1572년 Bombelli는 복소수의 정당화에 대한 언급을 피한 채, 복소수 $a+bi(a,\ b\in R,\ i^2=-1)$의 사칙연산을 현재와 거의 동일한 방식으로 행하였다. 복소수에 대한 정당화가 이루어지지 않은 상태로, 복소수의 대수적 연산은 계속 진행되었다. 결국 200여년의 시간이 지난 후, Gauss가 복소수에 대한 기하적 해석을 발표한 다음에야, 비로소 수학자들은 복소수를 인정하게 되었다. $a+bi$는 평면 위의 점 $(a,\ b)$와 일대일 대응을 이루고, 복소수의 곱셈과 덧셈은 평면 위 점의 회전과 평행이동으로 해석할 수 있다는 Gauss의 기하적 해석은 당시 "불가능을 가능하게 만들었다."는 찬사를 들었다([2, p.110]).

복소수의 발견 직후 수학자들은 복소수의 연산에는 어려움이 없었으며, 그 연산도

현재와 거의 동일했다. 그러나 복소수의 정당화를 가능하게 했던 기하적 해석에는 오랜 시행착오와 시간이 필요했다. 여기에는 분명 수많은 수학자들의 통찰과 실패가 있을 것이며, 불가능을 가능하게 만드는 수학의 마법 같은 이야기가 숨어 있을 것이다. 이에 착안하여, 본 논문은 Rene Descarte, John Wallis, Caspar Wessel 를 중심으로 복소수의 기하적 해석의 발달 과정을 살펴보겠다. 물론 복소수의 발달에 여러 수학자들이 기여했지만, 특별히 이들을 선택한 이유는 다음과 같다. 우선, 복소수의 기하적 해석의 단계를 불가능성, 가능성의 제시, 가능성의 완성 단계로 나누어볼 때, 이들이 각 단계에 해당하는 대표적인 수학자이기 때문이다. 또한 이들 모두는 Euclid 원론에 등장했던 정리로부터 영감을 얻어서 자신의 이론을 전개하였기에 서로 비슷하면서도, 전혀 다른 독창적인 측면을 극명하게 보여주고 있다. 그 결과 Euclid 원론의 정리가 새롭게 해석되어 결국은 복소수의 기하적 해석까지 이르게 되는 과정이 이들 세 학자의 연구에서 뚜렷하게 나타난다.

## 1. Euclid에서 Descarte : 작도 불가능한 복소수를 말하다.

대수와 기하학의 관계가 밝혀지지 않은 상태에서 대수적 기원을 가진 복소수를 기하적으로 해석한다는 것은 불가능한 일이다. 따라서 대수적 연산이 기하학에 접목되기까지의 과정을 살펴볼 필요가 있다.

Euclid는 수와 크기(magnitude)를 각각 이산적인 량과 연속적인 량으로 구분하였다. 수학은 크기와 수를 연구하는 학문으로 구분되어 전자를 기하학 후자를 산술이라 부르게 되었다. 이산적인 량은 연속적인 량을 설명할 수 없지만 연속적인 량은 이산적인 량을 설명할 수 있기 때문에 수는 크기의 맥락에서 설명되고 산술은 기하에 종속되게 되었다. 따라서 산술연산인 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 기하학에서 새로운 의미를 가져야했다. 덧셈과 뺄셈은 선분의 연장과 제거라고 쉽게 해석할 수 있었다. 문제는 곱셈이었다. 당시 산술에서 두 수의 곱셈은 반복된 덧셈을 뜻했다. Euclid 원론 Ⅶ권의 정의 15에 의하면 '어떤 수에 다른 수를 곱하는 것은 피승수를 승수의 단위의 개수만큼 누가하여 더하는 것이다.' 그러나 연속적인 양에는 단위 개념이 없으므로[1] 기하에서는 산술에서의 곱셈 연산을 생각할 수 없었다. 그 대신 원론은 비를 사용하였다. 비는 수와 크기 모두에 적용 가능한 개념이었다. Euclid 원론 Ⅶ권 정리19는 자연수에 관한 비례식 $a:b=c:d$이 자연수의 곱셈식 $a\times d=b\times c$와 동치라는 것을 기하적으로 증명하고 있다. 여기서 주의할 점은 $a\times d$, $b\times c$ 라는 곱셈은 자연수로 한정되었다는 것이다[2]. 이와 비슷한 정리가 Euclid 원론 Ⅵ권 정리12에 나타나 있다.

1) 통약불가능한 무리수의 존재로 연속량에는 단위 개념을 적용할 수 없었다.
2) http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVII/propVII19.html

세 선분이 주어졌을 때, 4번째 비에 해당하는 선분을 구하는 방법에 대한 정리이다. 앞으로 살펴보겠지만, Descarte는 이 정리를 바탕으로 선분의 곱셈을 정의하였고, 그 후에 Wessel은 다시 Descarte의 정의에 착안하여 유향선분(복소수)의 곱셈을 정의하게 되었다. 그러나 원론에서는 수와 크기가 명확하게 구분되었으며, 기하적 크기인 선분들 사이의 비례식은 선분 사이의 곱셈이 아닌 직사각형 넓이와 관계가 있었다.(Euclid 원론 VI권 정리 16). 두 수의 곱셈 결과는 여전히 수인 반면, 두 선분의 곱은 직사각형이 되어 크기의 종류에 변화가 생기게 되고, 이는 산술의 연산을 기하학에 적용할 수 없는 결정적인 이유가 되었다.

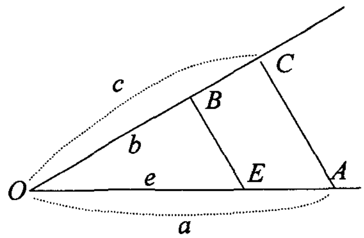
기하적 크기의 곱셈에서 차원의 문제를 제거한 것은 Descarte였다. Descarte는 좌표평면을 도입하고, 기하학의 문제를 대수의 문제로 바꾸어 해결하는 해석기하학의 창시자였다. Descarte는 모든 크기를 선분으로 표현하였고, 선분에 대한 대수적 연산을 정의하였다. Descarte는 Geometry(1637)에서 단위선분을 도입하여 차원의 변화 없이, 즉, 선분의 연산의 결과는 여전히 선분이 되도록, 선분의 이차연산[3]을 정의하였다. 선분의 덧셈은 더하는 선분만큼 선분을 확장하는 것으로, 선분의 뺄셈은 선분에서 빼는 선분만큼 잘라내는 것으로 정의하였다. 이는 Euclid의 정의와 같다. 그러나 Descarte는 Euclid가 고려하지 않았던 기하적 크기에 대한 곱셈, 나눗셈, 제곱근 구하기 연산을 정의하였다. 그는 Euclid 원론의 정리들을 새롭게 해석하여 정의하였다. Descarte는 단위를 도입하고 Euclid의 비례식(원론VI권-정리12) 및 등비중항(원론VI권-정리13)의 작도를 새롭게 해석하여 선분의 곱셈과 제곱근을 정의하였다.

복소수의 기하적 해석의 발달과정에서 Descarte가 Euclid 원론에 가한 새로운 해석은 여기서 그치지 않았다. Descarte의 곱셈에 대한 정의는 Wessel에 의해, 제곱근의 정의는 Wallis에 의해 새롭게 해석되었다. 그들은 이러한 해석에 기초하여 자신만의 독특한 복소수에 대한 기하적 해석을 할 수 있었다. 이제 복소수의 기하적 해석의 출발이 된 Descarte의 정의를 살펴보자([3, p.293-296]).

Descarte는 자연수의 비례식이 곱셈과 관계한다는 사실(원론 VII권 정리19)에 착안하여, Euclid 원론 VI권 정리12에 나타난 비례식을 이용하여 선분의 곱셈을 정의하였다.

단위길이의 선분 e와 두 선분 a, b가 주어졌을 때, 다음의 작도에 의해 선분 c는 a와 b의 곱과 같다고 정의한다.

1. O에서 시작하는 두 선분을 그린다. 한 선분 위에 OE=e를 표시한다.
2. OE를 표시한 선분 위에 OA=a 를 표시한다. OB=b는 다른 선분 위에 표시한다.



<그림 1> 선분의 곱셈

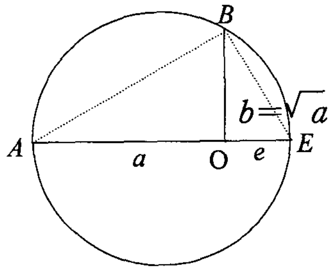
3) 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, 제곱근 구하기.

3. EB를 그린 다음, A에서 EB와 평행하도록 선분 AC를 그린다.
4. a와 b의 곱 ab는 OC=c로 정의한다.

Descarte는 등비중항(원론VI권 정리13)을 이용하여 선분의 제곱근을 정의하였다.

단위길이의 선분 e와 선분 a가 주어졌을 때, 다음의 작도에 의해 선분 b는 a의 제곱근과 같다고 정의한다.

1. 직선 위에 A, O, E 를 표시한다. (O는 A와 E의 사이에 있다. OA=a, OE=e)
2. AE를 지름으로 하는 원을 그린다. O를 시작으로 AE에 수직인 직선을 그린다. 그 직선이 원과 만나는 점을 B라 한다.
3. a 의 제곱근 $\sqrt{a}$는 선분 OB=b 로 정의한다.



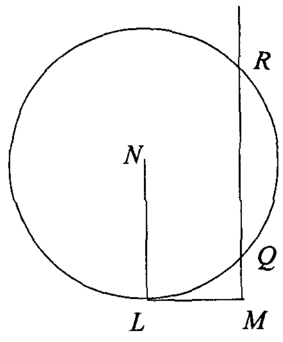
<그림 2> 선분의 제곱근

이렇게 Descarte는 Euclid 원론을 활용하여 기하적 크기(선분)의 대수적 연산을 정의하였다([3, p.293]). 선분의 대수적 연산이 산술의 사칙연산의 규칙과 같다고 가정하고, 대수의 연산을 기하학에 도입한 것이다[4]. Descarte는 Geometry의 시작부분에 대수적 연산에 대한 새로운 해석을 제시하였으나, 그 정의를 거의 사용하지 않았다. 단위를 사용한 그의 정의는 곱셈이나 나눗셈 상황에서는 한 번도 사용되지 않았고, 제곱근 구하는 상황에서도 직각삼각형의 빗변을 이용하는 경우가 훨씬 많았다([3, p.300]). 대신 Descarte의 정의는 후대의 수학자들에게 새로운 영감을 자극하는데 더 유용하게 사용되었다. 실제로 그의 정의에 착안하여 복소수의 기하적 해석을 시도한 수학자가 바로 Wallis와 Wessel이다.

Descarte가 복소수를 작도불가능성으로 해석하게 된 과정을 살펴보자. Descarte는 기하적 작도를 통해 이차방정식의 풀이를 제시하였다. 그는 여러 가지 형태의 이차방정식의 근을 작도하였으나, 본 논문에서는 $x^2=ax-b^2$ 꼴의 이차방정식에 대한 그의 작도를 통해 그가 허근에 대해 어떤 생각을 가졌는가를 살펴보겠다.

근의 공식을 사용하면, $x^2=ax-b^2$의 근은 $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$이다. 이 경우 허근이 존재할 수 있다. Descarte는 이런 가능성의 기하적 의미를 다음과 같이 연구했다. $LN=\frac{a}{2}$, $LM=b$이라 하고, 중심이 N 이고 반지름이 $\frac{a}{2}$ 인 원을 그린다. M 에

4) 정확히 말하면, Descarte는 기하적 크기(선분)에 대한 대수적 연산을 정의한 것이다. 무리수에 대한 개념적 어려움 때문에, 곱셈과 제곱근 연산 등은 수를 대상으로 하지 않았다([3, p.296]). 예를 들어, 선분의 곱셈이 산술의 곱셈처럼 교환법칙이 성립하는가를 비롯하여, 결합, 분배법칙을 밝히지 않았다. 또한 당시에는 실수개념도 명확히 밝혀지지 않았으므로, Descarte가 해석기하학을 완성했다고 보아서는 안 될 것이다([6, p.463]).



<그림 3>

서 올린 수선과 원이 만나면, 그 두 교점을 Q, R 이라 하자. Descarte는 두 선분 MQ, MR이 주어진 이차방정식의 두 근이라는 사실을 관찰했다([2, p.47]). 이러한 관찰은 $b < \frac{1}{2}a$ 안 경우에 가능하다. Descarte는 $b > \frac{1}{2}a$ 인 경우에 대해서도 언급하였다. "만약 중심이 N 이고 L 을 지나는 원이 직선 MQR과 교차하지 않고 접하지도 않는다면, 그 방정식에는 근이 없다. 그래서 이런 경우 그 문제에 대한 작도는 불가능하다고 말할 수 있다([10, p.17])" 즉, Descarte는 음수의 제곱근을 작도 불가능성으로 해석하였다. 이는 현재 교과서에서 허근을 두 곡선의 교점이 없음으로 해석하는 것과 동일한 해석이다.

그는 복소수를 작도 불가능성으로 보고 배제하였다. 그러나 기하학의 산술화 즉, 기하학의 문제를 대수로 바꾸어 해결하겠다는 그의 목표는, 역설적으로, 복소수의 도입으로 인해 가능하게 된다([4, p.205]). 불완전하지만 복소수의 기하적 해석을 최초로 시도한 Wallis를 살펴보겠다.

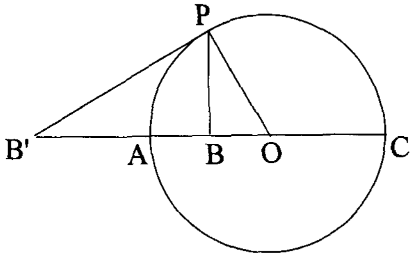
## 2. Wallis : 선분의 방향에서 복소수를 보다.

Wallis(1616-1703, Treatise on Algebra, 1685)는 처음으로 음수의 제곱근에 대한 기하적 해석을 제기하였다. 그는 수 개념에서 양과의 관련성을 제거하였다. "어떠한 양도 음수일 수 없다. 양이 없는 것보다 적거나 0보다 작은 수는 있을 수 없기 때문이다. 그렇지만 올바르게 이해된다면, 그러한 가정이 쓸모없거나 불합리한 것은 아니다. 노골적인 대수학적 표기에 따라 음수는 없는 것보다 적은 양을 의미한다. 그러나 물리적인 응용에서 보면, 음수도, +기호인 것처럼, 실제의 양을 표기하고 다만 정반대의 의미로 해석 된다." 그에게 문제는 음수의 존재를 부정하는 것이 아니라 적절한 모델을 발견하는 것이었다. 복소수가 양의 관점에서는 아무런 의미를 지니지 못하고, 기껏해야 작도불가능성을 뜻하고 있지만, 그는 '올바르게 이해한다'면 기하적 맥락에서 그 의미와 사용처를 찾을 수 있다고 보았다.

Wallis는 Descarte가 제곱근을 정의한 방식인 등비중항 작도에 주목하였다. 주어진 두 양수 b와 c에 대해 수 x가 존재해서 'b의 x에 대한 비가 x의 c에 대한 비와 같다는 조건을 만족시킬 때' x를 등비중항이라고 한다. 그러므로 대수학적으로 다음이 성립한다. $\frac{b}{x} = \frac{x}{c}$. 따라서 $x = \sqrt{bc}$ 이다. 이는 Descarte와 같은 방식이다. Descarte가 Euclid 원론에서 증명한 등비중항에 대한 기하학의 정리를 확장하여 선분의 제곱

근 정의를 하였듯이 Wallis도 Descarte의 정의로부터 한 걸음 더 나아갔다. Wallis는 허수를 양수와 음수의 등비중항이라고 독특하게 해석하였다([7, p.373-374]).

Wallis는 영점 또는 원점으로 표시된 점이 있는 직선에 주목하고, 양수는 그 영점으로부터 오른쪽으로 측정한 거리를 뜻하고 음수는 그 영점으로부터 왼쪽으로 측정한 거리를 뜻한다고 해석했다. 따라서 다음의 <그림 4>에서 O를 원점으로 하고, AC를 지름으로 하는 원을 그리면, 지름위의 한 점 B에서 수선을 올렸을 때, 원과 만나는 점 P는 $BP^2=AB \cdot BC$를 만족한다.



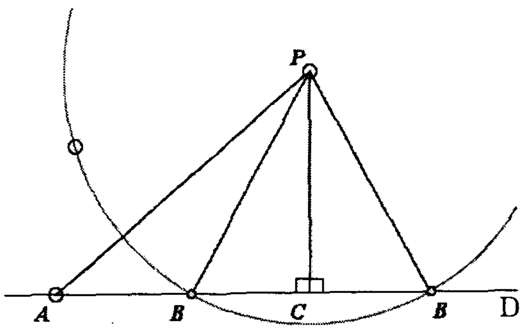

<그림 4>

AB=b, BC=c 라 놓으면, $BP=\sqrt{+bc}$ 이다. 다른 한편으로, 원 위의 점 P의 접선이 AC와 만나는 점을 B′ 이라고 하면, 앞에서와 같이 $B'P^2=AB' \cdot B'C$ 5) 이다. 그리고 B′P는 AB′ 과 B′C의 등비중항이 된다. 이 때, 방향을 생각하면 AB′=-b, B′C=c 가 되어, $B'P=\sqrt{-bc}$이다.

Wallis는 원 위의 점 P 에서 원 내부의 지름 위로 내린 수선(BP)과, 점 P 에서의 원의 접선이 그 지름의 연장선과 만나는 점까지의 선분(B′P) 모두 등비중항임에 주목하고, 각각을 양의 제곱근과 음의 제곱근으로 해석하였다. 그에게 허수는 원의 접선으로 해석되었다. 현재의 관점에서 이러한 해석은 독특할 뿐 수학적인 중요성과 엄밀성은 결여된 것이다.

그러나 여기서 멈추었다면 Wallis의 기하적 해석은 그 이상의 심오한 해석을 찾을 수 없는 사소한 연습문제에 그쳤을 것이다. 그의 독창성은 삼각형의 작도문제로 자신의 허수의 해석을 일관되게 확장했다는 데 있다. 그는 다음과 같이 생각했다.

Wallis는 두 변과 그 두 변 사이에 끼지 않은 각이 주어졌을 때 삼각형을 작도하는 기하학의 전통적인 문제를 다룸으로써 새롭게 시작했다. 이것은 종종 모호한 문제로 불리는데, <그림 5>에 나타난 대로 일반적으로 두 가지 가능한 경우(삼각형 APB)가 있기 때문이다.




<그림 5>

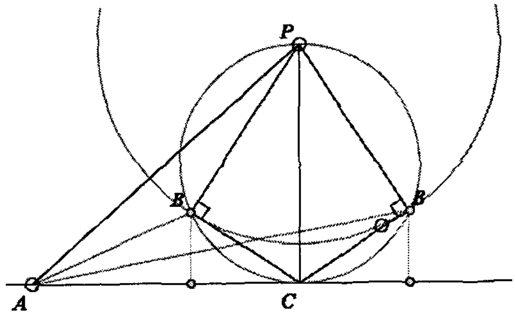
5) 대수적으로 증명하면 다음과 같다. $AB'=a$, 반지름 $OA=r$ 라 하면, 직각삼각형 OPB′에 피타고라스 정리를 사용하여 $PB'^2=(a+r)^2-r^2=a^2+2ar=a(a+2r)=AB' \cdot B'C$ 가 된다.

<그림 5>에서 두 선분 AP, PB 및 ∠PAD가 주어져 있다. PB≥PC이면, PB를 반지름으로 하는 원과 밑변 AD 의 교점이 생기고 그 결과 삼각형 APB의 작도가 가능하다. 이 삼각형 APB는 주어진 요소(두 선분 AP, PB 및 ∠PAD)를 모두 포함하고 있다. 이렇게 작도한 삼각형을 구한 다음 이를 대수식으로 표현해 보면 다음과 같다.

$$AB = AC \pm \sqrt{PB^2 - PC^2}$$

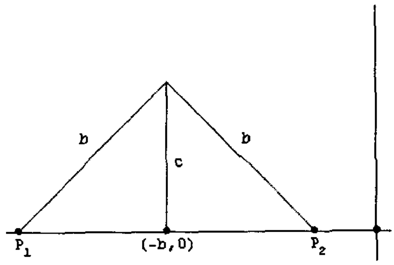
그런데 PB < PC이면 PB를 반지름으로 하는 원이 직선 AD와 만나지 않기 때문에 위와 같은 삼각형의 작도가 불가능하다. 그러나 위 대수식에서는 PB < PC인 경우도 쉽게 상상할 수 있다. 놀랍게도 Wallis는 PB < PC 인 경우에도 삼각형을 작도할 수 있다고 보았다. PB ≥ PC인 경우, BC가 원의 지름에 수직이다. 즉, 앞의 등비중항 해석에서처럼, 원 위의 점 B에서 원 내부의 지름(PC의 연장선) 위로 내린 수선을 찾아야 했다. 그 수선이 <그림 5>의 BC이다. 반면 PB < PC 경우, Wallis는 BC가 접선이 되도록 원을 찾아야 했다. 원의 접선을 허수로 생각했기 때문이다. PC를 지름으로 하는 원과 PB를 반지름으로 하는 원의 교점 B를 구하면, BC는 PB를 반지름으로 하는 원의 접선이 된다. 이렇게 작도한 삼각형 APB도 주어진 요소(두 선분 AP, PB 및 ∠PAD=∠PAC)를 모두 포함하고 있다.

PB ≥ PC 인 경우(<그림 5>) BC는 직선 AC에 포함되어 있고, PB < PC인 경우(<그림 6>) BC는 직선 AC를 벗어나 있다. 두 변과 그 두 변 사이에 끼지 않은 각이 주어졌을 때 삼각형을 작도하는 문제에서, 점 B가 직선 AC위에 있어야 한다는 조건은 포함되어 있지 않다. 따라서 <그림 5>와 <그림 6>의 삼각형은 문제의 조건을 만족하는 삼각형이다. Wallis는 각각의 작도에서 선분 BC가 각각 양수의 제곱근과 음수의 제곱근을 뜻한다고 보았다. 그는 이 문제의 해결을 통해, 음수의 제곱근도 의미를 가지도록 작도할 수 있다고 보았다. Wallis의 이러한 독특한 해석은 이차방정식의 허근과 관련하여 살펴보면, 현재의 관점과의 차이를 분명히 볼 수 있다.

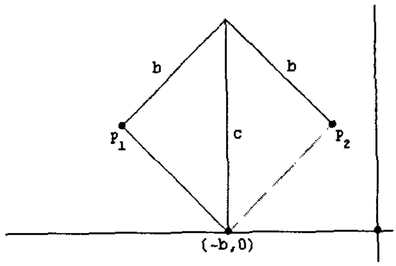


<그림 6>

Wallis는 이차방정식 $x^2+2bx+c^2=0$의 근의 작도를 제시하였다. 대수적으로 방정식의 근은 $x=-b+\sqrt{b^2-c^2}$와 $x=-b-\sqrt{b^2-c^2}$ 이다. Wallis는 이 해가 -b의 왼쪽 오른쪽에 위치한다고 보았다. $b^2-c^2>0$이면 -b와 같은 직선위에 해가 위치한다. $b^2-c^2<0$일 때, 해는 직선 위에 있지 않다. Wallis가 음수의 제곱근을 직선에서 벗어나 있는 것으로 생각했음을 다시 한 번 확인할 수 있다.




<그림 7>




<그림 8>

Wallis는 <그림 8>에서 보듯이, 복소수를 평면 위의 한 점( $P_1, P_2$)으로 보았다. 복소수를 평면 위의 점으로 해석하려 했다는 시도는 의미가 있지만, Wallis의 방법을 따르게 되면, $-\sqrt{-1}$이 $\sqrt{-1}$과 똑같은 점으로 표현되는 문제가 있다(b=0 일 때)[6].

그렇지만 이러한 해석은 복소수를 평면 위의 점으로 생각하는 발단이 되었다는 점에서 의미가 있다. Euler는 $x^n-1=0$의 근을 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$를 사용하여 구하는 과정에서 이와 비슷한 관점을 가졌고, 평면 위에 근이 위치한다는 관점에서 그는 이 근 들이 평면 위의 정다각형의 꼭지점이라고 생각하였다[7].

Wallis는 Descarte가 등비중항의 작도로서 제곱근을 정의한 것을 바탕으로, 그 등비중항의 길이뿐만 아니라 위치 및 방향에 새롭게 주목하여, 복소수 해석의 새 장을 열었다. 그는 직선의 제약에서 벗어나 평면에 주목함으로서 복소수 해석의 가능성을 열게 된 것이다.

## 3. Wessel : 방향의 연산에서 복소수를 보다.

Wessel([14])은 On the analytical representation of direction(1799)에서 현재의 복소평면 아이디어를 거의 완벽하게 설명하였다. Descarte와 Wallis가 대수식에서 복소수의 존재를 인식하고 그것의 기하적 해석을 찾고자 했다면, Wessel은 기하학의 방향 연구에 목표를 두고, 그 수단으로 복소수의 편리함을 이용하였다. Wessel에게 복소수는 해석의 목표가 아니라, 자신의 방향에 대한 이론을 예시해주는 수단이었다. 이는 당시 대수에서 복소수가 거의 수학적 대상으로 인정받고 있었음을 보여준다고 하겠다. 실제로 Wessel은 자신의 논문을 다음과 같이 시작하고 있다.

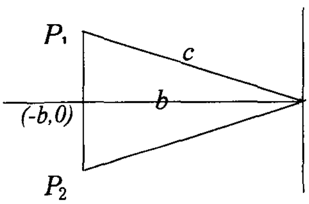
본 논문은 방향을 해석적으로 표현하는 문제를 다루고자 한다. 다시 말해, 직선을 어떻게 표현해야 하는가의 문제로서, 미지의 직선과 기지의 직선으로 이루어진 방정

6) 현재의 관점에서 올바르게 표현하면 오른쪽 그림처럼 그려야 한다.

7) http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ComplexNumberOrigin.html

식으로부터 우리는 미지의 직선의 방향과 길이를 표현하는 수식을 찾을 수 있어야 한다. ... 방향이 대수적 연산에 의해 변화될 수 있는 한, 방향은 대수의 대상인 것이다. 그러나 반대연산 즉, 양에서 음으로 또는 그 역으로 바꾸는 연산만이 있었기에, 오직 이들 두 방향만이 이미 알고 있는 방식으로 표현되었고, 그 밖의 방향에 대해선 미해결 상태였다. 이러한 이유로 그동안 아무도 이 문제를 다루지 않았던 것이다([14, p.103]).

그는 방향을 대수의 대상으로 삼고자 했다. 당시까지 양수와 음수로 직선 위의 양의 방향과 음의 방향만을 나타냈다면, 그는 이 한계를 걷어내고자 했다. 그러기 위해 평면 위의 모든 방향을 표현하고, 이들을 조작할 수 있는 새로운 연산이 필요했다. 기존의 대수적 연산을 새롭게 해석하여 확대할 필요가 있었다.




우리가 연산을 보다 넓은 의미에서 파악하고, 그 연산을 같은 방향이나 반대 방향의 선분에만 사용하지 않는 대신, 그 제한됐던 개념을 적당히 확장한다면, 그 연산은 기존의 경우는 물론 무수히 많은 다른 경우에도 응용될 수 있게 된다. 말하자면, 이러한 자유를 갖고 일상적인 연산규칙을 위반하지 않는다면, 이것이 수의 기본 이론과 모순되는 일은 없을 것이다. 우리는 이 연산을 량의 본질에 맞게 조절하고 방법의 규칙을 관찰하면서 어려운 이론을 차근차근 이해할 수 있을 것이다. 따라서 기하학에서 사용되던 연산에 산술에서 부여했던 것 보다 넓은 의미를 부여하는 것은 무리한 요구가 아니다([14, p.103]).

"기하학에서 사용되던 연산에 산술에서 부여했던 것 보다 넓은 의미를 부여한" Wessel의 독창적인 연산이 바로 곱셈이다. 그가 언급한 '기하학에서 사용되던 연산'은 Descarete가 정의한 곱셈을 지칭한다고 볼 수 있다. Descarete는 Euclid 원론의 비례식 작도로부터 곱셈을 정의하였는데, Wessel은 바로 그 비례관계에 주목하여 곱셈을 새롭게 해석하였다. "한 인수가 양의 단위(=1)로부터 형성되는 방식과 두 인수의 곱이 다른 인수로부터 형성되는 방식은 모든 점에서 동일해야 한다." 이것을 비례식 형태로 다시 쓰면,

$$1 : 인수(1) = 인수(2) : 인수(1)\times 인수(2)$$ [8]

라고 할 수 있다. Wessel은 이 관계를 상세하게 정의하였다.

첫 째, 두 인수의 방향은 양의 단위가 속한 평면에 있어야한다.

둘 째, 곱의 길이와 관련하여, 그 곱과 한 인수의 관계는 다른 인수와 단위의 관계

8) <그림 1>의 Descarte의 정의로 보면, $e:a = b:c$, $(c = a\times b)$

와 같아야 한다.

셋 째, (양의 단위, 인수, 그리고 곱의 시점이 같게 주어졌다면) 그 곱은, 방향과 관련하여, 단위와 인수가 속한 평면에 있어야 한다. 그리고 그 곱이 한 인수로부터 벗어난 정도는 다른 인수가 단위로부터 벗어난 정도와 같아야 한다(같은 방향으로). 따라서 곱의 방향각도 즉, 양의 단위로부터 벗어난 정도는 인수들의 방향각도의 합과 같다([14, p.106]).

Wessel의 세 번째 조건에서 볼 수 있듯이, 길이뿐만 아니라 방향에 대해서도 비례식의 의미를 부여했다. 비례식을 방향으로 확장하였다. Descarte가 선분의 곱셈에서 단위선분과 인수, 다른 인수와 곱사이의 비례를 곱셈의 의미로 해석한 것에 착안하여 방향의 곱셈에도 그 의미를 부여한 것이다. Wessel의 곱셈 연산에 따르면 두 선분 OA, OB의 곱은 다음과 같다.

선분 OA가 단위 선분 OE와 이루는 각이 $\alpha$, OB가 OE와 이루는 각이 $\beta$ 일 때, 두 선분 OA와 OB의 곱 OC가 선분 OB와 이루는 각은 $\alpha$이다. 왜냐하면, 선분 OA가 단위 선분 OE와 이루는 각($\alpha$)과 OC와 OB가 이루는 각이 같아야 하기 때문이다. 따라서 OC가 OE와 이루는 각은 $\alpha+\beta$ 이다.

이러한 곱셈은 현재의 복소수 곱셈에 대한 기하적 해석과 동일하다. 실제로 Wessel은 x축 양의 방향 단위 +1과 x축에 수직인 방향의 단위 + 을 도입하였다. -1과 — 은 반대방향을 의미했다. 곱의 정의에 따라 이 단위들을 계산하면 다음과 같은 성질을 얻을 수 있다.

(+1)(+1)=+1, (+1)(-1)=-1, (-1)(-1)=+1, (+1)(+ )=+ , (+1)(- )=- ,
(-1)(+ )=- , (-1)(- )=+ , (+ )(+ )=-1, (+ )(- )=+1, (- )(- )=-1.

Wessel은 이러한 성질로부터 은 $\sqrt{-1}$이 되고, 이러한 곱의 변형이 일반적인 연산규칙을 위반하지는 않는다고 주장하였다.

이러한 방법에 의하면 직선의 방향에 무수히 많은 변화를 주는 것이 가능하다는 것을 쉽게 인정할 수 있다. 여기서 우리는 다음과 같은 결과를 얻게 된다. 모든 불가능한 연산들을 피할 수 있고 가능한 것들이 종종 불가능한 수단에 의해 달성된다는 역설적인 주장을 설명할 수 있게 된다([14, p.104]).

여기서 '불가능한 연산' 및 '불가능한 수단'은 제곱한 값이 음수가 되는 허수를 뜻한다고 볼 수 있다. Wessel은 Descarte에 착안하여, 방향을 고려한 선분들의 곱셈을 정의하였고, 그 연산의 성질들이 복소수의 연산과 일치한다는 사실을 발견하였다. 따라서 그는 대수적 조작을 통해 기하적 문제 및 그동안 역설적인 주장으로 치부되던 수학의 명제들을 명확하게 밝힐 수 있게 되었다.

## 4. 결 론 : Descarte, Wallis, Wessel의 차이

실수의 제곱은 항상 양수라는 명백한 사실 때문에 수학자들은 복소수를 꺼려했다. 따라서 복소수를 이해하려면, 곱셈과 제곱근의 의미를 명확히 해야 했다. 자연수로 한정되었던 곱셈 연산을 확장하고 제곱근의 의미를 새롭게 해석하는 초석을 제공한 것은 Descarte였다. 그는 Euclid 원론의 기하적 정리를 새롭게 해석하여, 연속량(선분)의 곱셈 및 제곱근 연산을 정의하였다. 그러나 그는 단지 정의에 머물렀다. 그는 자신의 정의를 활용하여 문제를 해결하지 않았다. 음수도 수용이 어려웠던 시기에, 복소수는 연구대상이 되기 힘든 것은 당연한 일이다. 그래도 복소수를 작도불가능성과 연결시킨 그의 통찰은 뛰어난 것이라 하겠다. 그러나 Descarte의 작도불가능성에 만족하지 않고 복소수를 기하적으로 해석하려 했던 Wallis과 Wessel의 시도가 뒤를 이었다.

앞서 살펴본 바에 의하면, Wallis의 기하적 작도와 달리, Wessel의 해석은 매우 단순했다. Wallis과 Wessel 사이에는 약 100년의 시차가 있다. 따라서 Wallis의 해석이 Wessel에 못 미치는 것은 당시 수학의 수준과 환경에 따라 당연하다고 볼 수 있다. 그러나 둘 모두 Descarte의 정의에 기초했다는 점과 복소수의 기하적 해석을 가능하게 보았다는 점에서 과연 무엇이 이들의 차이를 야기했는가를 논의할 필요가 있다.

이 차이는 어디서 비롯된 것일까? Wallis가 Descarte의 제곱근 정의에 주목했다면, Wessel은 Descarte의 곱셈 정의에 주목했다. 음수의 제곱근인 허수를 연구하니까 제곱근에 주목하는 것이 당연해 보이지만, 수학사를 보면 해당 영역의 문제 해결에서 그 영역을 벗어난 새로운 방법이나 개념을 사용한 경우를 쉽게 찾아볼 수 있다. 다시 말해, 수학은 새로운 개념 및 방법의 구성을 통한 일반화를 목표로 한다고 볼 수 있다([15, p.187]). 예를 들어, 자연수에 관한 문제를 해결하는데 복소수를 사용한 경우가 있다([11, p.105]). Euler(1770)의 Algebra는 간단한 증명 몇 가지를 제시하였다. 페르마가 디오판투스의 책에서 정리한 문제였다. "자연수 중에서, 제곱수보다 2만큼 큰 세제곱수는 27뿐이다." 즉, $x^2+2 = y^3$ 를 만족하는 자연수 해는 x=5, y=3 뿐임을 증명하는 문제이다. 페르마는 엄밀하게 증명하였다고 하였으나 제시하지는 않았다. Euler는 자연수 문제를 해결하는데 허수 $\sqrt{-2}$의 아이디어를 사용하여서 엄밀하지는 않지만 뛰어난 증명을 제시하였다[9]. 이러한 아이디어는 가우스정수(a + bi, a, b는 정

9) Euler는 방정식의 좌변을 다음과 같이 인수분해 한다. $(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$ 그리고 $x+\sqrt{-2}$, $x-\sqrt{-2}$ 각각이 세제곱식이 되어야 한다고 과감하게 가정했다. 왜냐하면 그 둘의 곱이 세제곱 꼴이고, 서로 소임을 보일 수 있기 때문이다. ( $a+b\sqrt{-2}$ 집합은 유일인수분해정역(UFD)이기 때문이다. Gauss가 UFD 개념을 인식하게 된 동기를 알 수 있다)

그러면, 정수 a, b에 대하여 $x+\sqrt{-2}=(a+b\sqrt{-2})^3$ 가 성립해야 한다.

정리하면 $x+\sqrt{-2} = a^3-6ab^2+(3a^2b-2b^3)\sqrt{-2}$

허수부분이 같아야 하므로, $1 = 3a^2b-2b^3 = b(3a^2-2b^2)$

따라서 a=-1, b=1 그러면 x=5 즉, $5+\sqrt{-2} = (-1+\sqrt{-2})^3$ 이다.

수)개념으로 발전하여, Gauss가 유일인수분해 정역 개념을 확립하는데 커다란 공헌을 하였다. Galois가 이룩한 현대대수의 완성을 또 다른 예로 볼 수 있다. Galois는 당시까지 방정식 연구의 주류를 이루던, 근호를 통한 방정식의 풀이는 인위적인 것임을 지적하였다. 그는 방정식의 난이도는 그 방정식 근의 모호함과 관련이 있으며, 그 모호함은 군 개념으로 측정할 수 있음을 통찰했다([13, p.304]). Galois로 인해 근의 공식을 찾고 근과 계수의 관계에 주목하며 방정식의 풀이에 머물렀던 방정식 이론은 점차 사라지고, 군론과 대수적 구조를 연구하는 현대대수가 등장하기 시작했다. "나는 계산의 우아함에 의한 단순화에는 한계가 있다고 생각한다. 지금까지 대수학자들이 기대했던 대수적 조작은 더 이상 존재하지 않는다. 우리는 그것이 단지 희망이었음에 만족해야 한다. ... 계산에서 벗어나야 한다. 연산을 그룹화하고, 연산의 외양이 아닌 복잡함에 따라 분류해야 한다. 나는 이것이 미래 수학자들의 임무가 될 것이라고 생각한다([5, p.9])" Galois는 현란한 대수적 조작을 통한 방정식의 해를 찾는 것은 본질이 아니라고 생각한 것이다. 그는 근에 주목하고, 연산에 주목했다. 그 결과 군 개념과 체 개념을 창안하고, 현대대수라는 새로운 수학분야를 개척할 수 있었다.

이처럼 수학사를 살펴보면, 겉으로 드러난 부분에 주목해서는 그 본질을 볼 수 없는 경우가 많았다. 제곱근은 단지 제곱의 역이므로 곱셈의 본질이 드러나면, 제곱근은 자연스럽게 따라 나온다. 제곱근에 주목한 Wallis 보다는, 방향까지 아우르도록 곱셈을 일반화하여 새롭게 해석한 Wessel이 복소수의 기하적 해석에서 성공하는 건 당연한 일일 것이다. 실제로 복소수의 덧셈과 곱셈은 평면기하의 본질인 닮음변환[10](평행이동, 확대 및 회전이동)을 반영하고 있기에 기하적 해석이 자연스럽다([9, p.40]).

이상 살펴본 바와 같이, 복소수의 기하적 해석에서 연산 특히, 선분에 대한 해석과 곱셈연산이 매우 중요한 역할을 했다. Euclid는 원론에서 크기를 선분으로 표현했다. 고대 그리스에서 크기는 길이, 넓이, 부피 등을 뜻하였는데, 길이를 특징으로 하는 선분이 크기를 대표하였다. 그러나 Euclid는 선분에 대한 연산을 정의하지 않았다. 덧셈, 곱셈은 수로 한정되었다. 반면, Descarte는 선분을 연산의 대상으로 보고 그 연산을 정의했다. 수에만 적용되던 연산이 선분으로까지 확장되는 계기가 되었다. 그러나 연산의 대상이 선분의 길이에 한정되어, 복소수는 작도불가능성과 연결되었다. 선분에는 길이뿐만 아니라 방향의 의미도 있다는 것을 인식한 Wallis는 여기에 만족하지 않았다. Wallis는 선분의 방향에 착안하여 복소수의 기하적 의미를 부여했으나, 선분의 방향은 복소수를 표현하는 가능성에만 머물렀고, 선분의 방향을 연산의 대상으로 삼지는 못했다. Wessel은 선분의 방향을 연산 대상으로 삼았다. 그는 방향의 연산으로부터 복소수의 기하적 해석의 힌트를 얻게 되었다. 자연수에 대한 연산에서 선분의 연산으로 연산이 확장되면서 복소수의 기하적 해석은 지금의 모습을 갖추었다.

---

마찬가지로 $5-\sqrt{-2} = (-1-\sqrt{-2})^3$ . 따라서 정수해는 x=5, y=3이 유일하다.

10) Klien은 Erlangen 연설에서, "Euclid 기하학은 닮음 군 아래에서 불변인 기하적 도형의 성질들에 대한 연구이다"라고 말하였다([9, p.40]).

복소수는 모든 대수적 연산에 대해 닫혀있는 중요한 대상이다. 복소수의 기하적 해석은 그러한 대수적 연산이 기하적 조작(닮음 변환)과도 밀접한 관계가 있음을 보여주는 것이다. Descarte가 Euclid 원론에서 착안하여 기하적 대상과 대수적 대상의 관계에 빛을 비추었다면, Wallis와 Wessel은 그 빛을 안내삼아 복소수의 기하적 해석을 시도하였다. 그러나 단순히 복소수를 표현하기 보다는 그 연산에 주목한 Wessel의 시도가 Wallis보다 일반화에서 큰 성과를 거두었다. 복소수의 기하적 해석의 발달에서 곱셈 연산의 일반화는 중요한 역할을 차지하였다.

## 참고 문헌


1. 최병철, 음수개념의 이해에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사학위논문, 2006.
2. 폴 나힌 저/ 허민 역, 허수 이야기, 경문사, 2004.
3. Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactnes* : Descartes' transformation of the early modern concept of construction, Springer-Verlag, New York, 2001.
4. Dantzig T., *Number : The language of science,* 4th ed., The Free press, New York, 1954.
5. Galois E., *Ecrits et memoires mathematiques d'Evariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
6. Hartshorne R., *Teaching Geometry According to Euclid.* NOTICES OF THE AMS, 47(4), 2000.
7. Kierans D. A., *John Wallis and complex numbers*, The Mathematics Teacher, 51(5), 1958.
8. Mathew J. H., Howell R. W., *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*, Jones & Bartlett Publishers, 4th ed., 2000.
9. Needham T., *Visual complex analysis*, Oxford university press, 1997.
10. René Descartes, *The geometry of René Descartes* : with a facsimile of the first edition(translated by David E. Smith & Marcia L. Latham), New York: Dover Publications, 1954.
11. Stillwell J., *What are algebraic integers and what are they for?* In Abe Shenitzer & John Stillwell (Eds.), Mathematical evolutions, (pp. 105-110), The Mathematical Association of America, 2002.
12. Stillwell J., *Mathematics and its History*, Springer, 2nd ed., 2004.
13. Jean-Pierre Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, 2001.

14. Caspar Wessel. *On the Analytical Representation of Direction 1797,* translated by Flemming Damhus, Kort & Matrikelstryrelsen, Copenhagen, 1999.
15. Otte M., *Does Mathematics have objects? In what sense?*, Synthese 134, 181-216, 2003

## Evolution of Geometric Interpretation of Complex Number : Focused on Descarte, Wallis, Wessel

Graduate School of Mathematics Education, Seoul National University **Dong Hwan Lee**

In this paper we find the germ of geometric interpretation of complex number in the Euclid Element and try to show the evolution of geometric interpretation of complex number by through Descarte, Wallis, Wessel. As a result, relations and differences between them are found. They related line with complex number and interpreted complex number geometrically by generalizing the multiplication operation.

*Key words*: Geometric interpretation of complex number, Descarte, Wallis, Wessel, Operations of complex number.

2000 Mathematics Subject Classification : 9703

ZDM Classification ; A34

논문 접수 : 2007년 5월 심사 완료 : 2007년 6월