바둑돌 게임의 교수학적 활용*

부산대학교 김부윤
kimby@pusan.ac.kr
온천중학교 이지성
dongms@hanmail.net

혼자 즐겨서 하는 놀이의 하나로서 동양에서는 징검돌 게임이나 원앙놀이가 있었고, 서양에서는 페그 퍼즐이나 솔리테르가 있었다. 본 논문에서는 이들 중 가장 기본적인 게임을 바둑돌 게임으로 부르고, 학생들에게 문제의 다양한 해결 전략을 경험할 수 있는 기회를 제공하기 위해 바둑돌 게임을 교수학적으로 활용하는 방안을 제시하고자 한다. 먼저, 바둑돌 게임의 가장 기본 형태인 (3, 3)으로 시작하여, 단순화, 일반화, 확장의 단계로 문제를 제시한 후, 해결 전략으로서 시행착오를 통한 조작, 다이어그램이나 기호의 활용, 패턴 찾기와 일반화, 발산적 사고와 확장 등을 살펴본다.

주제어 : 징검돌 게임, 원앙놀이, 페그 퍼즐, 솔리테르, 바둑돌 게임, 패턴, 일반화

I. 서론

수학적 문제해결의 역사 속에는 학교수학에 활용 가능한 많은 문제와 해결 전략이 포함되어 있다. 문제해결 전략과 이를 통해 얻어지는 지식은 최초에는 개인의 천재성에 기인하는 경우가 많지만, 시대가 흘러 그 내용이 대중화되면 수학학습의 우수한 자원이 되기도 하고, 새로운 문제로 거듭나기도 한다. 따라서 수학학습에서 역사적으로 의미 있는 문제들이나 수학학습의 우수한 자원이 될 수 있는 문제들을 현재의 학교수학에 적절하도록 재구성하여 활용하는 것은 의미 있는 일이라고 생각된다.

이에 본 논문에서는 이러한 자원 중에서 일본의 징검돌 게임이나 원앙놀이 그리고 서양의 페그 퍼즐이나 솔리테르를 살펴본 후, 이들의 공통된 기본적인 게임을 '바둑돌 게임'이라 부르고, 교수학적으로 활용하는 방안을 제시하고자 한다.

바둑돌 게임은 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 3개로 된 배열의 변경에서 최소 이동 회수를 구하는 문제로서, 게임의 규칙은 다음과 같다.

* 본 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

◦ 검은 바둑돌은 왼쪽에, 흰 바둑돌은 오른쪽에, 빈자리는 가운데에 하나 있다.

◦ 돌은 바로 옆에 있는 빈자리로 이동할 수 있다.

◦ 바로 옆에 빈자리가 없다면, 다른 색의 돌 한 개를 뛰어넘어 빈자리로 이동할 수 있다.

이 규칙에 의해 ●●●_○○○의 배열을 ○○○_●●●의 배열로 변경하는 데에 필요한 최소 이동 회수는 15회이며, 그 해법은 <그림 1>과 같다.

	●●●_○○○	8회	●○_○●○●
1회	●●●○_○○	9회	_○●○●○●
2회	●●_○●○○	10회	○_●○●○●
3회	●_●○●○○	11회	○○●_●○●
4회	●○●_●○○	12회	○○●○●_●
5회	●○●○●_○	13회	○○●○_●●
6회	●○●○●○_	14회	○○_○●●●
7회	●○●○_○●	15회	○○○_●●●

<그림 1> 바둑돌 게임의 해법

간단한 게임으로 보이는 이 바둑돌 게임은 학생들에게 단순화, 일반화, 확장의 세 단계로 제시될 수 있다. 해결 전략으로서는 시행착오를 통한 조작, 다이어그램이나 기호의 활용, 패턴 찾기와 일반화, 발산적 사고와 확장 등을 들 수 있는데, 바둑돌 게임의 교수학적 활용은 문제의 다양한 해결 전략을 경험할 수 있는 좋은 기회를 제공할 수 있을 것이다.

Ⅱ. 동서양의 바둑돌 게임

1. 동양의 바둑돌 게임

일본에서는 혼자 즐겨 하는 게임으로서 테이토(テイト)의 '징검돌 게임'이 알려져 있다. 이것은 꽤 오래전부터 알려져 있었던 것으로 보이며, 테이토(テイト)라는 이름이 붙은 것으로 보아 테이토(テイト)가 이 게임을 다시 제안한 것으로 보인다. 일본에서는 테이토(テイト)가 징검돌 게임을 제안하기 이전인, 에도시대의 和算書에 '원앙놀이'가 소개된 바 있다. 원앙놀이에서는 이웃하는 2개의 돌이 한 조가 되어 이동하기 때문에, 원앙의 금슬 좋음을 비유하여 이름을 붙인 것이라고 할 수 있다([6, p.35]).

에도시대의 원앙놀이 중 가장 기본적인 것으로는 <그림 2>와 같이 흰 돌 3개와 검은 돌 3개가 교대로 배열된 것을 최소 이동을 통하여 마지막 단계와 같이 ●●●○○○로 배열하는 것이다. <그림 2>와 같은 3개씩의 교대 배열인 경우, 3회의 이동으로 문제를 해결할 수 있다. 원앙놀이는 3개씩의 교대 배열에서 시작하여, <그림 3>과 같이 4개씩의 교대 배열이나 5개씩의 교대 배열 등으로 발전될 수 있는데, 실제 바둑돌로 시행착오를 거듭하면서 문제를 해결하는 방법이 제안되기도 하고, 수학적 추론을 이끌어 내기도 한다([6, p.40]).

○●○●○●___
○●○___●●○
○○●●●○___
●●●○○○

<그림 2> 검은 돌과 흰 돌이 각각 3개씩인 원앙놀이의 해법

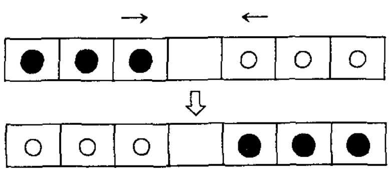
○●○●○●○●___
○___●○●○●●○
○○●●___○●●○
○○●●●●○___○
●●●●○○○○

<그림 3> 검은 돌과 흰 돌이 각각 4개씩인 원앙놀이의 해법

한편, 10개씩, 20개씩의 바둑돌이 주어진다면 시행착오를 거듭하는 방법을 포기하고 일반화를 시도해야 할 것이다. 일반적인 n개씩의 배열에 대한 원앙놀이의 해법은 n회의 이동으로 가능한데, 이것을 가장 처음 보인 것은 1887년의 데라노이(デラノイ)의 연구라고 한다. 秋山 仁는 원앙놀이의 해법을 시행착오를 거쳐 추론과 패턴 분석을 통해 구하고 있으며, <그림 4>와 같이 3개조가 함께 움직이는 원앙놀이의 확장에 대해서도 언급하고 있다([6, p.41]). 3개조의 이동에 대해서도 시행착오, 귀납적 추론, 패턴 분석을 통하여 일반화된 해법을 찾을 수 있다.

○●○●○●___
○___○●●○●
○●●○○___●
○○○●●●

<그림 4> 3개조씩 옮기는 원앙놀이



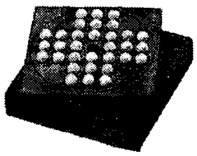
<그림 5> 개구리뛰기 게임

또한, 혼자 즐겨하는 다른 게임의 예로 <그림 5>와 같은 '개구리뛰기' 게임이 소개되어 있는데, 이것은 처음의 ●●●_○○○와 같은 배열에서 검은 돌과 흰 돌의 위치를 바꾸어 ○○○_●●●와 같이 배열하는 것이다. 이 게임도 징검돌 게임이나 원앙놀이와 같이 4개씩, 5개씩 등으로 확장된 후, n개씩의 배열에 대한 해결방법을 찾을 수 있다.

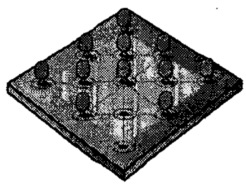
이러한 징검돌 게임, 원앙놀이, 개구리뛰기 게임 등은 혼자 즐겨하는 단순한 게임 속에 패턴이 있지만, 추론을 통하여 일반화로 가는 과정에서 수학적 즐거움을 맛볼 수 있음을 보여 주고 있다.

2. 서양의 바둑돌 게임

서양에서도 일본의 징검돌 게임, 원앙놀이, 개구리뛰기 게임과 유사한 게임이 소개되어 있는 문헌이 많이 있는데, 페그 퍼즐(peg puzzle), 솔리테르(solitaire), 혹은 페그 솔리테르(peg solitaire)라고 불리고 있다. 페그 퍼즐은 구멍이 있는 나무판에 작은 말뚝을 이리저리 옮겨서 마지막에 남는 말뚝의 주인이 승자가 되는 퍼즐을 뜻하며, 솔리테르란 혼자서 즐겨하는 놀이라는 뜻이다.



<그림 6> solitaire wooden marbles



<그림 7> 페그 퍼즐의 예

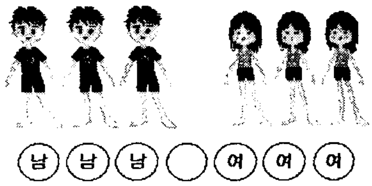
솔리테르의 가장 기본적인 것으로는 Pappas가 소개한 <그림 5>의 개구리뛰기 게임과 같은 문제를 들 수 있는데, 이것은 옆에 있는 빈자리로 옮기는 slide, 한 개의 다른 색 돌을 건너뛰는 jump를 이용해 검은 돌과 흰 돌의 배열을 바꾸는 것이다([11]). 한편, Pappas 이외에도 여러 문헌에 <그림 5>와 같은 문제가 소개되어 있는데, 옮기는 바둑돌이 서커스 곰, 남・여학생, 염소 등으로 변형된 자리바꾸기 문제로 사용되고 있다([8], [9], [10]).

이 문헌들은 주로 <그림 5>와 같은 간단한 문제에서부터 바둑돌이 4개씩, 5개씩 주어졌을 때의 패턴을 찾고, 일반화를 유도하는 과정으로 소개하고 있다.

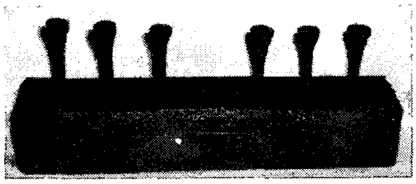
Ⅲ. 바둑돌 게임의 교수학적 활용 사례

혼자 즐겨하는 게임으로 소개된 원앙놀이나 솔리테르를 수학학습에 활용한 예로는 권오남 외, 부산대학교 과학영재교육원, 송상헌 외, Mark, NCTM의 Student Math Notes, Shockey & Bradley 등이 있다([1], [3], [4], [9], [10], [12]). 대부분 <그림 5>와 같이 검은 돌 3개, 빈자리, 흰 돌 3개의 ●●●_○○○와 같은 배열을 최소 이동을

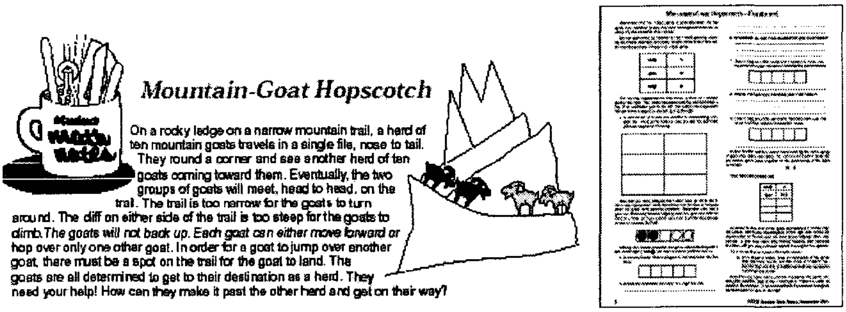
통하여 흰 돌 3개, 빈자리, 검은 돌 3개의 ○○○_●●●와 같은 배열로 바꾸는 것을 그 내용으로 하고 있다.



<그림 8> 부산대학교 과학영재교육원의 자리바꾸기 문제



<그림 9> Shockey & Bradley의 페그 퍼즐



<그림 10> NCTM의 Student Math Notes

권오남 외는 개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램 속에 바둑돌 게임을 포함하고 있는데, 이 프로그램은 한 학기 10차시의 프로그램으로 한 차시는 45분으로 이루어져 있다. 연구에서 언급한 개방형 문제의 유형으로 고착화 깨기, 다양한 답, 다양한 전략, 문제만들기, 전략탐구하기, 선택 · 평가하기, 활동적 탐구과제, 논리적 사고 훈련을 소개하고 있다. 10차시의 프로그램 중에 6차시 "전략탐구하기"의 내용으로 바둑돌 게임 등을 소개하고 있다([1]). 문제의 제시가 흰 돌과 검은 돌의 개수가 같은 경우의 일반화를 거치지 않은 채, 곧바로 그 개수가 다른 경우로 일반화된 해답을 보여주기 때문에, 일반화 전략을 소홀이 다루어 학생들이 일반화 과정을 체계적으로 이해하는 데에는 어려움이 따를 것으로 보인다.

부산대학교 과학영재교육원에서 제시되고 있는 바둑돌 게임은 <그림 8>과 같은 남학생과 여학생의 자리바꾸기 문제로 Gardiner에 기반을 둔 것([8])으로 문제 제시는 ●●●_○○○의 배열인 (3, 3)의 형태이지만, 일반화를 도출하도록 하는 수업으로 진행되었다. 전략이나 방안에 대한 구체적이고 자세한 설명을 제시하기보다는 학생들의 토의와 연구를 통한 해법의 발견을 목적으로 하고 있다([3, p.204]).

송상헌 외는 초등 수학 영재 아동들에게 페그 퍼즐을 제시한 후, 아동들의 패턴 일반화 과제 해결 과정을 연구하였는데, 아동들은 표보다는 다이어그램을 통해 일반적

구조를 파악하려는 경향을 보인다고 한다([4]). 이 연구에서는 페그 퍼즐의 (n, n)에 대한 해결 과정도 다루고 있으며, (m, n)에 대해서는 초등 영재 아동에게 다소 어려울 수 있다고 보고하고 있다.

문제해결을 통한 수학지도에 관한 문헌에서는 의사소통과 관련하여 교사의 듣기에 대한 사례 중 하나로 바둑돌 게임을 들고 있다([9]). 여기에서는 바둑돌 게임의 해결보다는 그 과정에서 두 사례의 대화에 초점을 두고 있다. 문제의 제시 부분을 보면, 최소 이동 회수에 대한 언급과 slide와 jump에 대한 언급을 하고 있으며, 이를 통해 문제해결 전략에 대한 안내를 하고 있음을 알 수 있다.

NCTM의 Math Note에서도 바둑돌 게임을 소개하고 있는데, 문제를 해결하기 위한 각 단계를 아주 구체적으로 제시하는 <그림 10>과 같은 학습지를 제작하여 교사들이 수업에 바로 사용할 수 있도록 편의를 제공하고 있다([10]). 또한 학습지의 모든 문제에 대한 해답을 수록해 놓았으며, slide나 hop, 방향에 대한 기호로 S와 H, 그리고 ⇨와 ⇦를 사용하고 있어 문제해결 과정에서 패턴을 쉽게 찾을 수 있도록 배려하고 있다. 그러나 패턴 찾기에 초점이 맞추어져 있고 일반화 자체를 다루지 않으므로 다양한 전략을 학습하는 기회를 제공하지 못하고 있다.

Shockey & Bradley는 <그림 9>와 같이 골프 티(tee) 퍼즐로 된 ●●●_○○○의 배열에서 시작하여 그 해법과 일반화를 소개하고 있다([12]). 주로 이동 회수, 티(tee)의 수를 표로 정리하고, 이동 회수들 사이의 차이에 초점을 둔 일반화를 이끌어 이동 회수 F_n에 대하여 다음과 같은 식을 얻고 있다([12, p.534]).

$$F_n = 0\binom{N}{0} + 3\binom{N}{1} + 2\binom{N}{2} = N^2 + 2N$$

Ⅳ. 바둑돌 게임의 교수학적 활용

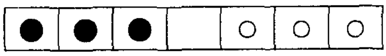
위에서 살펴본 바와 같이 여러 가지 방법으로 바둑돌 게임을 학습에 활용하고 있기는 하지만, 일반화 전략을 소홀이 다루거나, 설명이 부족한 경우가 많다. 또한, 일반화로 나아가지 못하고 패턴 찾기까지만 활용하는 경우도 있기 때문에 바둑돌 게임의 수학적인 측면이나 본질을 지나쳐 버린다고 할 수 있다. 이에 바둑돌 게임의 교수학적 활용 측면에서 문제 제시 방안부터 해결 전략과 일반화 전략을 거쳐 확장에 이르기까지의 과정을 살펴보고자 한다.

1. 바둑돌 게임의 제시

여러 문헌에서 바둑돌, 남학생과 여학생, 골프 티(tee) 등으로 언급된 원앙놀이, 징검돌 게임, 개구리뛰기 게임, 페그 퍼즐, 솔리테르 등을 '바둑돌 게임'으로 부르기로 하

고, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 ●●●_○○○와 같은 배열에서부터 문제를 시작하기로 한다. 이 배열을 (3, 3)으로 표현하고, (1, 1)과 (2, 2)로의 단순화, (n, n)의 일반화, (m, n)으로의 확장의 세 단계로 일련의 문제들을 제시하도록 한다. 다음은 학생들에게 처음에 제시될 수 있는 바둑돌 게임에 관한 설명이다.

검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 3개가 그림과 같이 가운데 자리를 비워 놓고 배열되어 있다. 검은 바둑돌은 왼쪽에 있고, 흰 바둑돌은 오른쪽에 있는 것을 검은 바둑돌은 오른쪽으로, 흰 바둑돌은 왼쪽으로 바꾸어 재배열하려고 한다. 검은 바둑돌은 오른쪽으로만 이동할 수 있고, 흰 바둑돌은 왼쪽으로만 이동할 수 있다. 또한 이웃하는 자리가 비어 있으면 한 칸만 이동하고, 비어 있지 않으면 한 칸 건너 이동할 수 있다. 만약 이러한 방법으로 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 자리를 재배열한다면 그 최소 이동회수는 몇 회가 될까?



(1) 단순화

바둑돌 게임을 처음 제시할 때는 <그림 11>과 같이 검은 바둑돌과 흰 바둑돌이 각각 1개씩일 경우인 (1, 1)과 2개씩일 경우인 (2, 2)를 먼저 생각하게 한다. 이것은 학생들의 조작이나 시행을 용이하게 할 수 있으며, 패턴 발견에도 도움이 된다. 이러한 과정 이후에 본래 제시된 바둑돌 게임인 (3, 3)의 경우에 도전하도록 하여, 단순화해서 해결한 경우와 비교하도록 하는 것이 효율적이다.

<그림 11> 바둑돌 게임의 단순화

(2) 일반화

단순화에 이어, (4, 4)와 (5, 5)일 경우의 해결 방법을 찾으면서, 이제 (n, n)일 경우로 진전해야 할 것이다. 이 단계에서는 귀납적 추론이나 패턴 찾기 등을 통하여 일반화를 할 수 있도록 기회를 제공해야 한다.

(3) 확장

다음으로 (n, n)을 확장하는 단계를 생각할 수 있는데, 가장 간단한 확장 방법은 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 개수를 다르게 하는 것이다. 이러한 확장 방법에서 가장 간단한 형태는 검은 바둑돌 m개와 흰 바둑돌 1개인 (m, 1)의 경우가 되며, 다음으로 검은 바둑돌 2개와 흰 바둑돌 3개인 (2, 3) 등으로 발전될 수 있다. 따라서 (m, n)의 일반화된 형태를 생각할 수 있다.

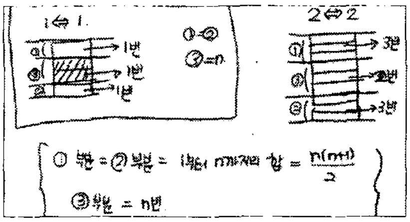
다른 방법으로 문제를 확장하는 것도 가능한데, 예를 들면, 빈자리의 개수를 2개나 3개로 변경한다든지, 옮기는 돌의 개수를 변경하는 경우 등을 들 수 있다. 또는 최초의 배열과는 다르게 교대로 배열하거나, 평면으로 배열하여 제시하는 경우를 들 수 있으며, 확장 단계에서 발전된 문제나 생성된 문제는 또 다른 새로운 문제해결의 장으로 학생들을 안내할 수 있다.

2. 바둑돌 게임의 해결 전략

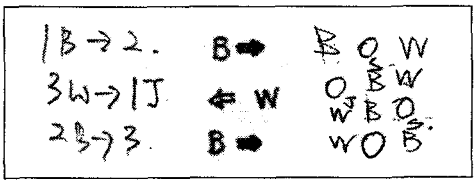
(1) 조작, 다이어그램, 기호

바둑돌 게임을 처음 접할 때에는 우선 소도구나 모형을 통해 직접 이동시켜 보면서 조작해 보는 것이 가장 좋은 해결 전략이다. 오려 낸 종이를 이동시킬 수도 있고, 필기구를 이동시킬 수도 있으며, Java 스크립트를 이용한 웹([14])을 통하여 바둑돌을 이동해 볼 수도 있다. 이와 같이 시행착오를 통한 조작을 행하는 것은 다이어그램이나 기호로 나아갈 수 있도록 하기 때문에 기본적이면서도 중요한 전략이라고 할 수 있다.

학생들은 간단한 조작을 하면서 다이어그램의 필요성을 인식하게 되고, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌, 그리고 빈자리를 간략한 기호(예를 들면, 원이나 알파벳)로 표시하여 그림을 그려 보기도 한다. 그림을 통해 (1, 1), (2, 2), (3, 3)의 경우에 대한 해답을 구하게 되며, 패턴을 찾기 위해 노력하게 된다. <그림 12>는 학생이 그린 다이어그램의 예로서, 그림을 통해 패턴을 확인한 경우이다[1].



<그림 12> 다이어그램의 예



<그림 13> 바둑돌 게임에 사용되는 기호들의 예

바둑돌 게임에서는 검은 바둑돌을 B(black), 흰 바둑돌을 W(white), 옆으로 이동하는 것을 S(slide) 또는 ➡, 한 칸 건너뛰는 것을 J(jump)로 나타내어 기호를 활용할 수도 있다. 검은 바둑돌 1개와 흰 바둑돌 1개가 있는 배열을 BOW(검은색, 빈칸, 흰색)의 기호로 나타내거나 (1, 1) 또는 1⇔1의 기호로 나타낼 수도 있다. <그림 13>은 학생들이 제시한 기호들을 나타낸 것이다.

1) 본 연구에서 제시된 학생들의 답변은 부산대학교 과학영재교육원에서 2005년 3월 19명 대상의 4시간 수업과 2006년 1월 40명 대상의 2시간 수업 및 후속과제에 기반을 두고 있다.

(2) 패턴 찾기와 일반화

바둑돌의 개수가 많아지면 소도구나 모형을 활용한 조작과 시행착오를 통해서 패턴을 찾거나 일반화에 이르기가 어렵다. 따라서 다이어그램이나 기호를 통하여 패턴을 찾고, 일반화로 나아가는 것이 자연스러우며, 이때 귀납적 추론[2)]을 하는 것이 효율적이다.

김부윤 · 이지성은 남학생과 여학생의 자리바꾸기 문제에 대한 학생들의 해결방안 중의 하나를 소개하고 있는데, 이것은 (1, 1), (2, 2), (3, 3)의 경우에 대하여 일정한 패턴을 찾고 최소 이동을 3단계로 구분한 것이다([2]).

1단계는 '남남남_여여여'를 '남여남여남여_'로 만드는 단계로서, 그 이동 회수는 (2, 2)에서 구한 1단계의 이동 회수에 남여 학생이 1명씩 추가되어 발생되는 이동 회수를 더하여 구해 질 수 있다. 즉, (3, 3)의 1단계 이동 회수는 (2, 2)의 1단계 이동 회수에 3회를 더하고, (2, 2)의 1단계 이동 회수는 (1, 1)의 1단계 이동 회수에 2를 더하면 된다. 따라서 (n, n)의 1단계에서는 $n(n+1)/2$회의 이동이 필요하게 됨을 알 수 있다. 2단계는 '남여남여남여_'를 '_여남여남여남'으로 배열하는 단계로서 n회의 이동이 필요하다. 3단계는 '_여남여남여남'의 배열을 '여여여_남남남'으로 만드는 단계인데, 이것은 1단계의 역이동이므로 1단계와 같은 $n(n+1)/2$회의 이동이 필요하게 된다. 따라서 (n, n)의 경우 필요한 최소 이동 회수는 다음과 같다.

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + \frac{n(n+1)}{2} = n^2+2n$$

한편, Shockey & Bradley는 페그 퍼즐의 해결 전략으로써 첫 번째 관점으로 패턴을 인지하는 방법을 설명하고, 계차수열로서 이동 회수를 구하고 있다([12]). 그는 이것을 귀납적 추론이라고 보며, $a_1=3$, $b_k=2k+3$일 때, 최소 이동 회수를 $a_n=3+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+3)$로 구하고 있다. 그의 두 번째 관점은 옮기는 회수에 중점을 둔 방법으로 연역적 추론과 귀납적 추론의 결합으로 해석하고 있다. 여기에서 연역적 추론이란 n^2+2n의 회수로 문제해결이 된다는 것과 그것이 최소 회수임을 밝히는 것을 말한다.

이러한 해결방법 이외에 slide의 회수와 jump의 회수에 중점을 둔 일반화 전략을 생각해 볼 수 있다.

2) 이종희 · 김선희는 Polya에 기반하여 학교 현장에서 강조될 수 있는 수학적 추론의 유형을 연역, 귀납, 유추, 시각적 추론으로 분류하였다. 연역적 추론은 형식적인 체계 속에서 정의, 공리, 정리들을 이용하여 규칙을 따라 결론을 이끌어내는 엄밀한 증명으로 사실을 언급할 때 사용된다. 이에 반해 귀납적 추론은 구체적인 전제에서 일반적인 결론을 이끌어내는 추론으로 기술된다([5]).

첫째, n개의 검은 바둑돌 각각은 앞의 $n+1$개의 자리로 이동해 가야하고, n개의 흰 바둑돌 각각도 앞의 $n+1$개의 자리로 이동해 가야 하므로 바둑돌이 나아가야 할 자리의 개수는 $n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$이다. 모든 slide는 한 칸씩 이동하고 모든 jump는 두 칸씩 이동하므로, 최소 이동 회수에 대한 해답에서는 s(slide)와 j(jump)의 개수가 방정식 $s+2j=2n(n+1)=2n^2+2n$을 만족한다. 서로 다른 색의 바둑돌이 자리를 바꾸는 것은 오직 jump에 의해서만 가능하므로 해답은 최소한 n^2번의 jump를 포함해야 한다. 최소한의 이동 회수가 존재한다면, jump의 총 회수는 n^2을 넘을 수 없으므로 $j=n^2$이다. 이 식을 위의 방정식에 대입하면, $s=2n$을 얻을 수 있다. 그러므로 최소 이동 회수에 대한 해답은 $s+j=2n+n^2$와 같다([13]).

둘째, S를 slide의 회수로, J를 jump의 회수로 표시하면, (1, 1), (2, 2), (3, 3)의 경우, 최소 이동 회수의 해답은 각각 SJS, SJSJJSJS, SJSJJSJJJSJJSJS이다. 일반적으로 (n, n)의 경우, 이동은 1, 2, …, $n-1$, n $n-1$, …, 2, 1개의 J 사이를 1개씩의 S로 분리한 것이 된다. 결국 전체 이동 회수 $s+j$는 아래와 같이 계산될 수 있다([13]).

$$\begin{aligned} s+j &= 2n+1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1 \\ &= 2n+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2} \\ &= 2n+n^2 \end{aligned}$$

이와 같이 다이어그램이나 기호를 통해 패턴을 찾고, 추론을 통해 일반화하는 전략에는 몇 가지가 있음을 살펴보았다.

바둑돌 게임에 관한 문제를 제시받은 학생들은 대부분 (1, 1)에서 (3, 3) 또는 (4, 4)까지의 경우를 직접 조작해 보고, 이동 회수의 수열, 즉 3, 8, 15, 24, … 에서 패턴을 찾아 그 일반화를 추구하여 자신들의 설명을 정당화하는 경우가 많다고 한다([2]). 그러므로 바둑돌 게임의 일반화를 위해, 학생들에게 조작을 통한 패턴 찾기나 기호 표현을 통한 패턴 찾기, 그리고 이를 통해 추론하도록 하는 것은 일반화 전략을 경험할 수 있는 좋은 기회를 제공한다고 할 수 있다.

(3) 발산적 사고와 문제의 확장

패턴 찾기와 일반화 이후에 바둑돌 게임을 확장할 수 있는데, 기본적으로는 (n, n)을 (m, n)으로 확장하는 것이다. (m, n)의 패턴 인식을 위해서 <표 1>을 작성하도록 한다면 규칙이나 패턴을 발견하기가 좀 더 용이할 수 있다.

<표 1>에서 찾을 수 있는 패턴으로는 우선 각 열을 따라 가면 일차식의 패턴을 가진다는 것이다. 즉, 왼쪽에서 오른쪽으로 열을 이동하면, $2n+1$, $3n+2$, $4n+3$의 패턴이 나타난다. 이것은 최소 이동 회수에 대한 해답이 $mn+m+n$[3]으로 주어지기 때

문에, 선택된 열에서 m이 고정되면 최소 이동 회수는 $mn+m+n=(m+1)n+m$으로 n에 대한 일차식이 되는 것으로 설명된다.

<표 1> $(m,\ n)$에 관한 이동 회수 $(1\leq m,\ n\ \leq 7)$

$(m,\ n)$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
m=1	3	5	7	9	11	13	15
m=2	5	8	11	14	17	20	23
m=3	7	11	15	19	23	27	31
m=4	9	14	19	24	29	34	39
m=5	11	17	23	29	35	41	47
m=6	13	20	27	34	41	48	55
m=7	15	23	31	39	47	55	63

다음으로 대각선 아래쪽을 따라 가면 이차식의 패턴을 가진다. 예를 들어, 대각선 바로 아래(또는 위)의 사선은 5, 11, 19, 29, 41, 55의 수열로 이차식인 n^2+3n+1의 패턴을 따른다. 이것은 사선이 $m=n+1$의 관계를 만족하기 때문에 다음과 같이 설명될 수 있다.

$$mn+m+n=(n+1)n+(n+1)+n=n^2+3n+1$$

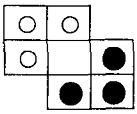
이와 같은 방법으로 다른 사선 모두에 대한 규칙을 유도할 수 있다. 학생들에게 <표 1>을 작성하게 하고 찾을 수 있는 패턴을 되도록 많이 찾아보게 하는 활동은 발산적 사고에 도움이 될 수 있다. 다음은 <표 1>을 통해서 찾아낼 수 있는 (m, n)의 최소 이동 회수에 대한 규칙이나 패턴들이다.

$(m,\ n)$에 관한 최소 이동 회수는

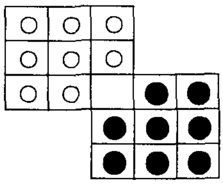
- ∘ $mn+m+n$ 이다.
- ∘ $m=1$일 때, n이 1씩 증가하면 2씩 증가한다.
- ∘ $m=2$일 때, n이 1씩 증가하면 3씩 증가한다.
- ∘ m, n이 각각 1씩 증가할 때, $m+n+1$씩 증가한다.
- ∘ 오른쪽으로 갈수록(n이 늘어날수록) $m+1$씩 증가한다.
- ∘ 아래쪽으로 갈수록(m이 증가할수록) $n+1$이 증가한다.
- ∘ $(k,\ k)$를 중심으로 대칭이다.
- ∘ $(m, n) = (n, m)$

3) 이 해답은 <표 1>에서 패턴으로 얻어질 수도 있으며, (n, n)의 일반화와 같이 slide와 jump의 회수에 중점을 두고 구해질 수도 있는데, mn은 jump의 회수를, $m+n$은 slide의 회수를 나타낸다.

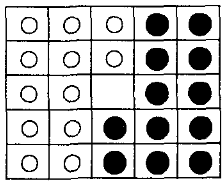
$(n,\ n)$을 $(m,\ n)$으로 확장하는 것 이외에, <그림 14>나 <그림 15>와 같이 바둑돌 게임을 평면으로 확장할 수 있다. <그림 14>의 경우에는 구체적인 순서가 존재하지 않지만, <그림 15>의 경우에는 $(n,\ n)$와 $(m,\ n)$에 비해 복잡하면서도 수학적 흥미를 이끌어낼 만한 해법이 포함되어 있다.4) 그러나 <그림 16>과 같은 정사각형으로의 확장은 너무 단순하여 흥미를 이끌어 내기에는 부족하다. (2, 2)의 바둑돌 게임의 해법 도중의 단계에서 중앙의 어떤 가로 칸도 비어 있게 되고, 그 순간을 이용하여 그 가로의 수직 상하에 있는 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 바꿔 넣고 가로의 조작을 적절하게 더하면, 중앙 가로의 바꿔 넣기가 끝날 때에 모든 세로 열도 바꾸어 넣는 것이 완료되기 때문이다.



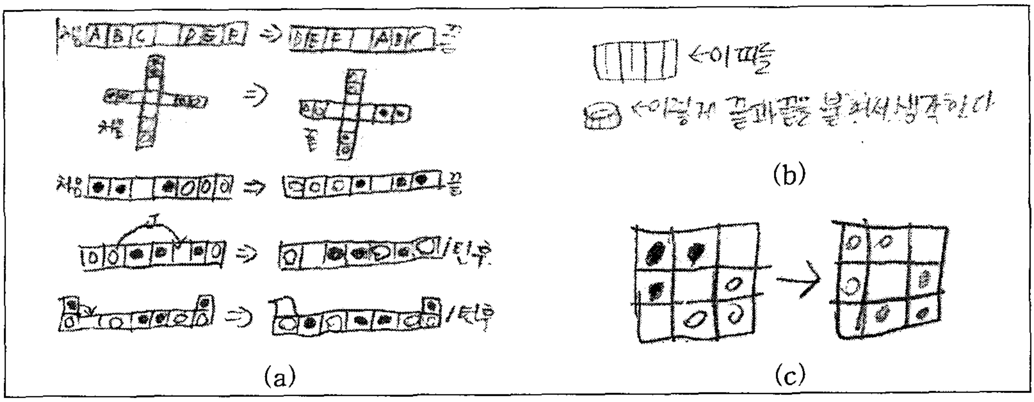
<그림 14>



<그림 15>



<그림 16>



<그림 17> 학생들이 제시한 바둑돌 게임의 확장

바둑돌 게임의 확장이 학생들에게 좋은 수학 문제가 될 수 있을 뿐만 아니라, 학생들에게 직접 새로운 문제를 만들어 보는 기회를 갖게 하는 것도 발산적 사고를 경험

4) 이 퍼즐의 해법은 영국의 퍼즐가로부터 구할 수 있는데, 그림과 같이 칸에 기호를 써넣고 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 다음의 순서로 옮기면 된다([6]).

a	b	c		
d	e	f		
g	h	•	H	G
		F	E	D
		C	B	A

H → h → g → • → F → f → c → • → C → B → H → → h → • → G → D → F → f → e → h → b → a → g → • → G → A → B → H → E → F → f → d → g → • → H → h → b → c → • → C → F → f → • → G → H → h → •

할 수 있는 의미 있는 활동이 될 수 있다. 학생들이 만들어 내거나 확장한 문제 모두가 수학적으로 의미 있는 것은 아니지만, 조건을 변경하거나 제거하여 새로운 문제를 만들어 내는 과정 자체가 수학적 사고에 도움이 될 수 있다. <그림 17>은 학생들이 제시한 바둑돌 게임의 확장으로서 (a)는 조건 변경과 평면으로의 확장을 그림으로 나타낸 것이며, (b)는 바둑돌의 배열 조건을 원형으로 바꾼 것이다. (c)는 평면으로의 확장인데, <그림 14>에서 제시된 확장과 유사하다.

3. 바둑돌 게임의 교수학적 의의

앞에서 언급된 바둑돌 게임은 퍼즐에서 유래되었지만, 단순화, 일반화, 확장의 세 단계로 제시되면서 지금의 학교수학에 적절하도록 재구성되었다. 처음 제시된 (3, 3)의 배열에 대한 해법을 찾기 위해 시행착오를 해 보거나 도구를 활용하여 조작하는 것은 수학학습에 있어서 기본적인 활동이라고 볼 수 있다. 그리고 다이어그램이나 수학적 기호로 진행해 나가는 것은 일반화로 진행하기 위해 필수적인 과정이며, 이러한 기호화의 단계는 Freudenthal이 언급한 수평적 수학화로 볼 수 있다. Freudenthal은 수평적 수학화를 관찰, 실험, 귀납, 유추를 통해 현실을 수학적 수단으로 조직하는 것으로 보았으며, 문제를 수학적으로 처리할 수 있게 하는 것을 의미한다고 하였다([7]). 그러므로 바둑돌 게임의 조작을 기호로 옮기는 것은 현실 내의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 하여 (n, n)의 일반화에 대한 해법을 찾도록 해 주는 좋은 전략이 될 수 있다. 수평적 수학화를 통해 게임을 기호로 일단 옮기고 나면 패턴을 찾기가 쉬워지고, 일반화의 바탕을 마련하게 되며, 이러한 전 과정에 있어서 수학적 추론의 힘이 작용하게 되는 것이다.

또한, 바둑돌 게임의 단순화, 일반화, 확장의 과정에서 수학적 사고를 경험할 수 있다. Shockey & Bradley는 바둑돌 게임의 해법을 귀납적 추론과 연역적 추론에 기반하여 설명하였으며([12]), <표 1>에서 일차식, 이차식 등의 수학적 개념을 이끌어낼 수 있으므로 바둑돌 게임은 수학적 사고와 개념에 좋은 활동이 될 수 있다. 이러한 과정에서 수직적 수학화도 이루어지게 되는데, Freudenthal은 수직적 수학화를 수학적 경험이 축적되면서 이루어지는 수학 자체의 수학화라고 하였으며, 추상적인 기호의 세계에서 기호들이 계속 형성되고 이해되고 반성된다고 하였다([7]). 바둑돌 게임에서는 게임을 기호로 옮기는 수평적 수학화를 거친 후, 그 기호들에서 패턴을 찾고, 일반화를 이끌어내어 수학적인 형식화를 이루어 내므로 수직적 수학화도 이루어진다고 할 수 있다.

한편, 바둑돌 게임은 수학적 창의성의 수학적 적절성에 부합되는 과제이며, 발산적 산출물을 기대할 수 있는 과제이기도 하다([2]). 기호의 생성, 해결 전략의 선택, 일반화의 다양한 전략 모색, 확장을 통한 문제설정 등은 발산적 사고와 관련이 있으며, 이러한 이유로 바둑돌 게임은 수학적 창의성 교육에 있어서도 효과적이라고 할 수 있다.

마지막으로 Shockey & Bradley와 Susan과 같이 바둑돌 게임으로 직접 수업을 진행해 본 연구자들은 학생들이 바둑돌 게임을 즐겁게 하였으며, 발견 과정의 유쾌함과 패턴의 다양성에 놀라움을 보여주었다고 보고하고 있다([12], [13]). 따라서 바둑돌 게임은 학생들에게 수학적 흥미를 느끼게 할 수 있으며, 동기 유발에도 효과적이라고 할 수 있다.

V. 결론

수학사를 살펴보면 수학학습의 우수한 자원이 될 수 있는 문제들을 많이 볼 수 있는데, 바둑돌 게임도 그러한 자원 중에 하나이다. 앞에서 언급되었듯이 바둑돌 게임은 동양과 서양에서 혼자 즐기는 게임으로 많이 알려져 왔지만, 지금의 학교수학에서는 패턴을 찾아 일반화하는 과제로 아주 적절하다고 할 수 있다. 따라서 역사적으로 잘 알려진 바둑돌 문제의 교수학적 활용을 살펴보는 것은 의미 있는 일이다.

본 논문에서는 일본의 징검돌 게임이나 원앙놀이 그리고 서양의 페그 퍼즐이나 솔리테르를 살펴본 후, 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 3개로 된 배열의 변경에서 최소 이동 회수를 구하는 문제로 바둑돌 게임을 설정하여 단순화, 일반화, 확장의 세 단계로 문제를 제시하였다. 바둑돌 게임의 해결 전략으로서는 시행착오를 통한 조작, 다이어그램이나 기호의 활용, 패턴 찾기와 일반화, 발산적 사고와 확장 등을 들 수 있으며, 이러한 전략을 통해, 학생들은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 경험하며, 다양한 수학적 사고를 진행시킬 수 있다. 또한 다양한 해결 전략과 문제의 확장을 통하여 수학적 창의성을 신장할 수 있으며, 수학적 흥미와 동기유발에도 효과가 있다고 한다.

역사적으로 유명한 퍼즐에 대해 단순히 그 해답을 찾는 데에만 그친다면, 흥미나 동기유발의 단계에 머무는 것이 되지만, 바둑돌 게임과 같이 학생들에게 단순화, 일반화, 확장과 같은 단계로 제시되고 다양한 해결 전략을 경험하도록 한다면, 교수학적 활용이 의미를 갖게 된다고 할 수 있다.

참고 문헌

1. 권오남, 박정숙, 조영미, 박지현, 김영실, 개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램 개발 연구, 한국학술진흥재단 지원 교과교육공동연구, 2002.
2. 김부윤, 이지성, 자리바꾸기 문제를 활용한 수학적 창의성의 발현 과정 연구, 한국수학교육학회지 <수학교육 논문집> 19 (2005), 327-343.
3. 부산대학교 과학영재교육원, 중등수학, 부산대학교 과학영재교육원, 2002.
4. 송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원, 초등학교 5, 6학년 수학 영재 아동의 "페그 퍼즐" 해결과정 분석 : 대수적 일반화를 중심으로, 대한수학교육학회 수학교육 논총 29 (2006), 9-24.
5. 이종희, 김선희, 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사 : 수학적 추론 유형 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41 (2002) No. 3, 273-289.
6. 秋山 仁, 中村義作, ゲームにひそむ數理. ゲームでみがこう!! 數學的センス, 森北出版株式會社, 1998.
7. Freudenthal, H., Revisiting Mathematics Education, China Lecture, Kluwer Academic Publisher, 1991.
8. Gardiner, A., Mathematical Puzzling, UK Mathematics Foundation, 1998.
9. Mark, D., The Sound of Problem Solving, In Schoen, H. L. & Charles, R. I (eds.) Teaching Mathematics through Problem Solving : Grades 6-12, National Council of Teachers of Mathematics Inc., (2003), 161-176.
10. National Council of Teachers of Mathematics, Mountain-Goat Hopscotch, NCTM Student Math Notes, 2003.
11. Pappas, T., More Joy of Mathematics : Exploring Mathematics All Around You, San Carlos, CA : Wide World Publishing, 1991.
12. Shockey, T. L. & Bradley, D. M., An Engaging Puzzle to Explore Algebraic Generalizations, Mathematics Teacher 99 (2006) No. 8, 532-536.
13. Susan, G. S., Patterns Jumping out of a Simple Checker Puzzle, Mathematics Teacher 98 (2004) No. 4, 224-227.
14. http://www.lcv.ne.jp/~hhase/asobi/puzzle/pairmove/pairmv4.html

Didactical Applications of the Baduk Pieces Game

Department of Mathematics Education, Pusan National University **Boo Yoon Kim**
Onchun Middle School **Ji Sung Lee**

We review the eastern frog jump game and the western solitaire to apply the Baduk Pieces Game to mathematical education. This study introduce a didactical method of Baduk Pieces Game which is constructed with simplification, generalization, and extension. This didactical applications of the Baduk Pieces Game gives the students opportunities of patterns, generalization, and problem solving strategies.

Key words: peg puzzle, solitaire, Baduk Pieces Game, patterns, generalization

2000 Mathematics Subject Classification: 97A20, 97D50

ZDM Subject Classification: A20, D50

논문 접수: 2007년 5월 심사 완료: 2007년 6월