괴델이 보는 수학의 토대

연세대학교 학부대학 **현우식**
godel@yonsei.ac.kr

이 논문에서는 수학과 수학적 대상, 그리고 수학적 직관에 대한 괴델의 입장을 그의 논법에 따라 탐구한다. 괴델에게는 플라톤주의적 존재론과 직관주의적 인식론이 모두 중심적인 철학으로 사용되고 있기 때문에, 수학의 토대에 관한 그의 견해는 단지 완고한 플라톤주의나 실재주의로 평가되거나 분류될 수 없다.

주제어 : 괴델, 수학적 대상, 수학적 직관, 플라톤주의, 직관주의

1. 수학과 수학자

1.1 수학자 없는 수학은 가능한가? 이것은 수학적 활동이 시작되었던 과거부터 생각하는 기계로 불리는 컴퓨터가 실현된 현재까지, 수학의 역사에서 자연스럽게 제기될 수 있었던 중요한 질문이었다. 이 질문에 대한 괴델의 답변은 다음의 논리합(disjunction)으로 제시된다([7, p.310]).

(1) "사람의 마음은 어떠한 유한기계도 무한히 능가한다." 또는(or)

(2) "절대로 해결될 수 없는 수학적 문제가 존재한다."

이러한 괴델의 논리합은 다음과 같은 의미와 연결된다. (1)에 따라, 튜링기계의 구현인 컴퓨터가 수학자와 동등한 수준의 지능을 가질 수 없다면, 수학자없는 수학은 가능하지 않을 것이다. 괴델은 오직 명제(1)을 참으로 받아들이고 (2)를 부정하는 수학자들을 '직관주의자(intuitionist)'라고 불렀다. 괴델이 튜링의 기계주의를 비판한 것에 의하면, 괴델 자신은 (1)을 옳다고 생각한 바가 있었다([30]). 그는 명제(1)을 부정하는 수학자들을 '유한주의자(finitist)'라고 불렀다.

다음으로 명제(2)는 괴델의 제2불완전성 정리에 의해 도출된다. 유한기계인 컴퓨터가 수학자를 완전히 대체할 수 있다면, 즉 수학자없는 수학이 가능하다면, 절대로 풀릴 수 없는 디오판틴(diophantine) 문제가 존재한다. 다른 한편, 수학자없는 수학이 불가능하다면, 명제(2)는 수학적 대상들과 수학적 사실들은 수학자들의 마음의 행위와 결정으로부터 독립적이고 객관적으로 존재함을 함의한다([7, p.311]). 그렇다면 명제(2)를 참으로 받아들이는 수학자는 '플라톤주의'에 가깝다고 할 수 있다.

괴델은 논리합에서 명제(1)이 참인 경우와 명제(2)가 참인 경우를 허용하였다. 즉 명제(1)과 명제(2)는 양립가능하다. 그러므로 다음과 같은 제3의 명제가 존재한다 ([28]). 즉,

(3) 사람의 마음이 어떠한 유한기계(튜링머신 모델을 의미)도 무한히 능가한다는 것(명제1)과 절대로 해결될 수 없는 수학적 문제가 존재한다는 것(명제2)은 양립가능하다.

그렇다면, 괴델에게 직관주의와 플라톤주의는 양립가능한 견해인가? 괴델에게 명제(3)이 의미하는 것은 무엇인가? 사실상, 이러한 질문들은 수학의 근본적인 토대와 관련되어 있다. 그렇지만 이 질문은 수학 자체 내에서는 해결할 수 없고, 이미 수학의 영역을 넘어선 성격의 질문이다. 질문에 대한 답변들은 수학에 관한(about) 이론은 될 수 있지만, 결코 수학의(of) 이론은 될 수 없기 때문이다. 이러한 점에서, 수학사와 수학철학은 수학을 이해하고 더욱 건실하게 발전시키고 새롭게 구성하는 일에 일정한 기능과 역할을 담당한다고 할 수 있다([27]). 본 소고에서는 괴델이 보는 수학의 토대를 조명하고, 그것이 담고 있는 수학사적 의미를 고찰할 것이다.

2. 수학과 그 대상

수학에 포함되는 모든 것을 환원시킬 수 있는 수학의 토대(the foundations of mathematics)는 무엇인가? 프레게(G. Frege) 이래로 20세기의 초반의 수학자들은 그 이전의 어느 시기에서도 생각하지 못했던 새로운 문제를 풀어야 했다. 즉 수학 내부의 문제를 넘어 수학 자체를 다루는 문제를 풀어야 했다. 집합이라는 새로운 언어와 공리적 형식화(axiomatic formalization)라는 방법이 도입된 새로운 상황 속에서 수학이 계속 건실하게 발전하기 위해서는, 먼저 완전하고 결정가능하고 모순이 없는 안전한 토대를 찾거나 구축할 필요가 있었다. 특히 집합론에서 체르멜로-러셀의 패러독스와 같은 패러독스의 발견은 이러한 움직임을 촉발하는 계기가 되었다([32]).

이를 위하여 화이트헤드와 러셀은 논리주의적 토대를, 힐베르트는 형식주의적 토대를, 그리고 브라우어는 직관에 근거한 구성주의적 토대를 마련하기 위해 전력을 다했다. 이러한 접근방식의 차이는 바로 수학과 그 대상을 바라보는 차이에서 기인한 것이었다.

(a) 러셀의 논리주의에 의하면, 수학은 하나의 거대한 항진명제(tautology)로서 논리로 환원될 수 있고 수학적 대상은 순수 논리언어 내에만 존재하는 논리적 대상이다([1], [13], [23]). 수학의 모든 정리는 순수하게 논리적인 공리와 논리적인 추론규칙에 의해서 도출될 수 있다는 것이다. 러셀의 논리주의에서, 무한집합과 같은 수학적 대상의 실재성은 보장될 수 없으며([6]), 무한집합이나 클래스와 같은 수학적 대상은 발견의 대상이 아니다.

(b) 힐베르트의 형식주의에 의하면, 수학은 내용의 의미가 배제된 기호들을 공리와 추론규칙을 통하여 조작하는 일종의 게임과 같으며 수학적 대상은 형식화된 명제(formulas)이다([1], [13], [23]). 논리주의와 달리 형식주의는 논리적 공리와 규칙에 제한되지 않으나, 유한한 과정에 의한 증명을 전제로 삼았다. 힐베르트의 형식주의에서, 무한집합과 같은 수학적 대상의 실재성은 보장될 수 없으며, 무한집합과 같은 수학적 대상은 발견의 대상이 아니다.

(c) 브라우어의 직관주의에 의하면, 수학은 직관에 의한 구성으로 얻을 수 있는 것이어야 하고 수학의 대상은 주어진 자연수로부터 직관에 의해 구성되는 것들만 인정된다([1], [13], [23], [25]). 형식주의와 달리, 직관주의에서는 수학의 내용이 배제되지 않는다. 브라우어의 직관주의에서, 실무한과 집합과 같은 수학적 대상의 실재성은 보장될 수 없으며, 무한집합과 같은 수학적 대상은 발견의 대상이 아니다.

수학의 토대를 마련하는 이러한 프로그램들에 대하여 1931년에 수학계에 발표된 괴델의 불완전성 정리는 매우 근본적인 질문을 제기하였다. 괴델의 불완전성 정리에 의하면, 모순이 없는 형식체계 내에서 참이지만 증명할 수 없는 명제가 존재한다. 그리고 이 명제는 증명과 반증이 모두 불가능한 명제, 즉 결정할 수 없는 명제이며(제1불완전성정리), 결국 수학이 모순이 없는 형식체계라고 하더라도 수학은 그 자체의 무모순성을 증명할 수 없다(제2불완전성정리).

괴델의 불완전성 정리에 의해 기존의 어떠한 효율적인 프로그램으로도 수학을 위하여 안전하고 완전한 토대를 구축할 수 없음이 증명되었다. 괴델은 수학의 진리가 수학적 증명을 넘어서(beyond) 있다는 것을 증명한 것이다. 괴델의 정리에 의하면, 수학적 진리를 모두 증명할 수 있는 완전한 시스템은 없으며, 그러므로 수학은 어떠한 형식체계나 논리체계로 환원될 수 없다. 즉 공리적 형식체계나 논리체계는 수학의 토대가 되기에 부족하다.

그렇다면 괴델의 불완전성 정리 이후에 수학의 토대는 수학자들이 중요하게 고려하는 주제에서 제외되었는가? 괴델은 이 주제를 어떻게 생각하였을까? 괴델 자신은 1951년 브라운대학에서 개최된 미국수학회의 제25회 깁스 강연(Gibbs Lecture)에서 수학의 토대를 주제로 다루면서, 제2불완전성 정리를 전제로 가진 수학의 토대를 위한 중요한 견해의 일부를 밝히게 된다([7]).

이 강연에서 괴델은 수학을 객관수학(objective mathematics)과 주관수학(subjective mathematics)의 두 가지 수학으로 구분하였다. 객관수학은 절대적인 의미에서 수학적 진리들로 이루어진 수학이다. 즉 조건적인 진리가 아니라 절대적인 진리의 명제들로 이루어진 수학이다. 이와는 대조적으로, 주관수학은 사람이 인지할 수 있는 수학적 진리들로 이루어진 수학이다. 즉 사람의 마음에서 표현되고 인지될 수 있는 모든 명제들로 이루어진 수학이다.

두 수학은 일치될 수 있는가? 앞에서 언급한 1.1의 내용과 관련하여, 다음의 두 경우가 추론될 수 있다([4]). (1′)객관수학과 주관수학이 일치된다면, 수학 내에서 사람의 인지능력은 공리와 추론규칙에 의해 일정 체계로 한정될 수 없으므로, 어떠한 형식공리체계(또는 튜링기계)도 사람의 생각이 수학을 하는 가능한 모든 능력을 포함할 수는 없다. (2′)객관수학과 주관수학이 일치되지 않는다면, 객관적 진리는 결코 사람이 인지할 수 없으며, 괴델의 제2불완전성 정리에 의해서 절대로 풀릴 수 없는 수학적 문제가 존재하게 된다.

두 경우는 서로 배타적이지 않고 동시에 참일 수 있다. 말하자면 (1′)객관수학과 주관수학이 하나가 되는 경우, 어떠한 공리적 형식체계도 수학자를 대신할 수 없다는 것을 의미한다. 수학자는 단지 유한한 기계에 불과한 것이 아니다. 그리고 수학이란 단지 공리적 형식체계가 아니다. (2′)두 수학이 하나가 될 수 없는 경우, 수학은 단지 공리적 형식체계를 의미하게 된다. 그러므로 괴델의 제2불완전성 정리에 의해서 수학에는 절대로 해결할 수 없는 문제가 존재한다. 여기에서 각각 한 가지만이 배타적으로 참이 되는 것은 아니다. (1′)와 (2′)는 모두 참일 수 있다. 즉 수학자의 마음은 유한 기계가 아님이 참이고, 절대로 해결할 수 없는 수학적 문제가 존재함도 참이라고 할 수 있다는 것이다. 이것은 괴델이 사용한 용어(1.1부분 참조)에 의하면, 괴델은 직관주의자이면서 동시에 플라톤주의자가 가능함을 허용하는 것이다. 그렇다면 괴델은 구성주의와 플라톤주의가 양립가능하다고 인정한 것인가?

3. 수학적 플라톤주의

괴델에게 수학적 플라톤주의와 개념실재주의(conceptual realism)는 교환가능한 용어이다. 플라톤주의는 수학적 대상들과 사실들이 수학자들의 정신적 행위나 결정으로부터 객관적이고 독립적으로 존재한다고 보는 견해이다([7, p.311]). 괴델은 깁스강연에서 유명론이나 규약주의등 기타의 다른 입장들을 반박하고 플라톤주의가 유일하게 지속가능하다고 주장하였다. 괴델이 정의하는 수학적 플라톤주의를 풀어서 옮기면 다음과 같다([7, p.323]).

"내가 의미하는 플라톤주의란, 수학은 비감각적(non-sensual) 실재를 서술한다고 보는 견해이다. 그 수학적 실재는 수학자 마음의 의도와 행위로부터 독립적으로 존재한다. 수학적 실재는 오직 수학자의 마음에 의해서 감지되는데, 매우 불완전하게 감지될 것이다."

괴델에게 수학적 플라톤주의는 수학이 감각의 기준을 넘어서 실재하는 대상을 서술한다고 생각하는 입장이었다. 그래서 괴델은 형식주의에는 동의할 수 없었다. 그가 중

요시하는 수학의 의미와 진리가 공리와 규칙에 의해 운영되는 형식체계에서는 발견될 수 없었기 때문이다. 물리적 대상이 존재하는 것처럼 수학적 대상은 실재한다고 주장했던 점에서([6], [7], [8]), 그는 수학적 플라톤주의자임에 틀림없다. 괴델에게 수학적 대상은 단지 수학자의 창조물이나 상징물이 아니었기 때문이다.

괴델은 자신을 수학적 플라톤주의자로 부르는 것에 동의하였는가? 그랜진(B. Grandjean)에게 보낸 서신(1975년)에 의하면, 괴델은 1925년경 이후부터 자신이 개념실재주의자이자 수학적 실재주의자였다고 동의하고 있음을 알 수 있다([11, p.444]). 베나세라프(P. Benacerraf)와 퍼트남(H. Putnam)같은 수리철학자는 괴델을 가리켜 플라톤 이후 가장 플라톤과 가까운 견해를 가진 사람일 것이라고 평가한다([1]). 다소 차이는 있으나 괴델은 플라톤주의 또는 실재론을 대표하는 인물로 소개된다([1], [2], [3], [13], [15], [16], [17], [18], [22]).

그러나 괴델의 견해에 포함된 수학적 플라톤주의의 특징을 논하는 것과 괴델의 견해를 플라톤주의라는 용어로 규정하는 것은 전혀 다른 차원의 문제이다. 예를 들어, 현재 활동하는 수학자 가운데 자타가 공인하는 플라톤주의자는 영국의 펜로즈(Roger Penrose)이다([18]). 그는 세 가지의 세계, 곧 수학적 세계, 마음의 세계, 물리적 세계가 실재한다고 주장하고, 심지어는 수학적 세계라는 용어 대신에 직접 플라톤적 세계라고 표현할 정도이다. 하지만 그는 무한집합 전체의 계층구조를 수용하지 않는다. 그렇다면 이것은 괴델의 입장과는 명백하게 배치되는 부분이다.

괴델에게 추상적인 집합(set)은 실재하는 수학적 대상이었다([10]). 그가 주장했던 수학적 실재에는 개념들(concpets)([6]), 명제들(propostitions)과 개념들 간의 관계(relation between concepts)([8])까지도 포함된다. 괴델이 가장 추상적 대상으로 여겨지는 무한과 신의 실재성을 믿고 수학적 증명을 시도했다는 것은 이미 공개된 비밀이다([14], [31]). 집합과 개념의 실재성에 대한 괴델의 생각은 다음을 통해서 잘 드러난다.

"그러나 집합들과 개념들도 역시 실재의 대상들로 생각될 수 있다. 즉 "사물들의 다수성들"로서의 클래스 또는 사물들의 다수성으로 이루어진 구조들로서의 클래스, 그리고 수학자의 정의 및 구성과는 독립적으로 존재하는 사물들의 관계들과 속성들로서의 개념들로 생각될 수 있다.

나에게는 그러한 대상들을 가정하는 것이 물리적 물체들을 가정하는 것만큼이나 매우 정당하다고 여겨지며, 물리적 물체들의 존재를 믿는 것만큼의 충분한 이유가 있다고 여겨진다."([6, p.128])

괴델에게 집합 개념(concepts of sets)은 '집합'에 대한 막연한 개념이 아니라 '집합

구조들(set structures)'에 대한 개념을 의미했다. 적어도 그러한 구조들을 결정할 수 있는 개념을 의미하는 것이다([16]). 그러므로 단지 '개념의 차원'이 아니라, '개념에 대한 개념의 차원'에서 괴델의 개념은 적절하게 이해될 수 있다. 그리고 이러한 개념위에서 '모든 수학적 진리들은 진리이다'라는 그의 설명이 성립될 수 있는 것이다([7, p.321-322]).

1938년에 괴델은 '모든 집합은 구성가능하다(Every set is constructible)'는 명제를 구상하고, 결국 이 명제와 체르멜로-프랜켈 공리 ZF의 무모순성을 증명하였다. 이것은 ZF가 선택공리와 연속체가설과는 모두 모순이 없음을 함의하게 된다. 이때 괴델은 이미 새로운 공리가 추가된다면 '모든 집합은 구성가능하다'라는 명제에 의해서 무한집합들에 대한 결정이 확정적 방법으로 이루어질 수 있을 것으로 보았다.

괴델은 1964년의 논문 '칸토르의 연속체문제란 무엇인가?'(What is Cantor's Continuum Problem?)에서 집합론의 개념과 정리들은 잘-결정된 실재(well-determined reality)를 서술하는 것이므로, 칸토르의 연속체가설(Continuum Hypothesis)도 반드시 참이거나 거짓 중의 하나가 될 것이라고 주장하였다. 그에게 공리적 집합론의 결정불가능성은 단지 현재의 공리들이 실재를 완전하게 서술하지 못함을 의미하는 것이었다. 그래서 괴델은 새로운 공리가 발견되면 연속체가설의 참과 거짓을 확정할 수 있을 것이라고 확신했다([10]).

괴델의 주장대로 무한기수들과 같은 수학적 대상들이 실재한다면, 수학자는 그 대상을 어떻게 인지할 수 있으며, 어떻게 그것에 대한 수학적 지식을 획득할 수 있는가? 이 문제에 대해 괴델은 수학적 직관을 통하여 가능하다고 보았다.

4. 수학적 직관

괴델이 강조하는 수학적 직관이란 무엇인가? 괴델은 수학적 직관에 대한 명확한 정의를 내리지는 않았다. 괴델에게 수학적 직관은 하나의 특별한 지각작용(perception)이다. 괴델은 수학적 직관에 의해서 연속체문제와 같은 문제들을 완전히 결정할 수 있다고 생각했다.

수학적 직관에 대한 괴델의 다음 논의를 살펴보면, 플라톤주의적 요소와 직관주의적 요소가 함께 양립되고 있음을 알 수 있다.

"수학적 직관은 관심을 가지는 대상들에 대한 *직접적 지식*(immediate knowledge)을 주는 능력으로 생각될 필요가 없다는 것에 유의해야 한다. 오히려, 물리적 경험의 경우에서와 마찬가지로, 직접적으로 주어지는 그 외의 무엇을 기초로 하여 우리가 그러한 대상들에 관한 생각을 *형성*(form)하는 것으로 생각된다. 단지 이러한 그 외의 무엇이 여기에서 감각(sensations)은 *아니다.* 물리적 대상을 지시하는 우리의 생각조차

도 감각이나 감각들의 단순한 조합(예, 대상 자체에 대한 생각)과는 질적으로 다른 구성요소들을 포함하고 있다는 사실로부터, 감각 이외의 무엇이 직접적으로 주어진다는 결론이 (수학과는 독립적으로) 나온다. 다른 한편, 우리가 생각에 의해서 질적으로 새로운 요소들을 창조할 수는 없다. 우리는 단지 주어진 것들을 결합하고 재생산하는 것이다. 분명히, 수학의 토대가 되는 "주어진 것(the given)"은 우리들의 경험적인 생각에 포함되어 있는 추상적 요소들과 밀접하게 관계되어 있다."([10, p.268] 이탤릭은 원문에 따른 것임)

괴델에게 수학적 직관은 수학자와 실재 사이에 있는 '다른 종류'의 관계에서 나오는 '그 외의 무엇'과 관련된 자료를 다루는 지각작용이다. 여기에서 다른 종류란 감각(sensation)과는 다른 것임을 의미한다. 수학적 직관은 감각과는 다른 구성요소를 포함할 수 있는 인지작용이다.

괴델에 의하면 수학적 자료(data)에는 적어도 두 가지가 있는 셈이다. 제1의 자료는 감각의 자료이고, 제2의 자료는 직관의 자료이다. 제1의 자료는 물리적 대상들에 대한 것이지만, 제2의 자료는 추상적 대상들에 대한 것이다. 직관과 관련된 자료는 직접적인 지식을 제공하는 자료와는 다른 것이다. 그는 이러한 다른 종류의 자료가 수학자의 감각 기관에 근거한 행동과 연합될 수 없다는 이유로, 순전히 주관적인 것이라는 결론은 나올 수 없다고 주장한다. 오히려 그 자료들은 감각과는 반대로 수학자와 실재 사이의 다른 종류의 관계에 기인하여 객관적 실재의 측면을 표현할 수 있다는 것이다([10]).

이런 점에서 괴델은 칸트와는 분명히 다른 주장을 개진하고 있으며, 또한 무한집합과 관련된 연속체문제를 무의미하게 보는 브라우어의 직관주의와도 다르다. 괴델이 말하는 수학적 직관이 투명하게 설명되기는 어렵지만, 수학적 직관은 수학자의 마음이 가질 수 있는 고유한 영역이며 형식체계로 환원될 수 없는 성질의 능력을 의미한다.

괴델에 대한 최근의 연구들은 괴델이 주장하는 직관을 이해하기 위해서는 라이프니츠와 칸트의 관념론(idealism)과 후설의 현상학(phenomenology)과의 관계를 파악할 필요가 있다는 점에 동의한다([2], [3], [5], [17], [20], [21]). 괴델의 논문과 기록들 그리고 증언을 통해서, 괴델은 칸트, 라이프니츠 등 독일 관념론의 열렬한 독자였고, 후설의 철학에 큰 관심을 가지고 탐독했음을 알 수 있다([20]). 1960년대 괴델은 특히 후설의 초월적 관념론(transcendental idealism)을 연구하면서, 자신의 생각과 매우 유사함을 알았다. 괴델에게 후설의 견해는 독일 관념론의 과학적 형태와도 같았기 때문이다([21]). 예를 들면, 철학자 파슨스(C. Parsons)는 괴델을 비판적으로 분석한 후, 괴델이 '합리주의적 직관주의자'였다고 결론을 내리고 있다([17]).

5. 결어

20세기의 저명한 집합론자 베르나이스(P. Bernays)의 구분에 의하면([1]), 수학에서의 플라톤주의에는 제한된 플라톤주의(restricted Platonism)와 절대화된 플라톤주의(absolute Platonism)가 있다. 제한된 플라톤주의는 체르멜로-러셀의 패러독스에 의해서 제한되지 않는다. 그러나 절대화된 플라톤주의는 체르멜로-러셀의 패러독스 때문에 더 이상 유지되기 어렵다. 그는 플라톤주의 기하학과 직관주의 산술(arithmetic)의 상호보완성을 강조하였다. 기하학은 플라톤주의적 배경을 가지고 있고, 산술은 직관주의적 배경을 가지고 있다고 보았다. 따라서 두 가지의 경향이 모두 필요하다는 것이 베르나이스의 결론이다. 플라톤주의와 직관주의는 서로를 보완해 준다. 베르나이스에 의하면, 플라톤주의와 직관주의가 서로를 부인하는 것은 곧 스스로에게 폭력을 행사하는 것과도 같다([1, p.269]).

괴델은 베르나이스가 강조하는 플라톤주의와 직관주의의 상호보완의 필요성과 그 의미를 잘 알고 있었던 수학자로 평가될 수 있다. 괴델에게 플라톤주의적 존재론과 직관주의적 인식론은 양립가능했다. 괴델에게는 다음의 두 명제 모두가 수학의 토대를 위해 필요한 진리명제였다.

(1) "수학자의 마음은 어떠한 유한기계도 무한히 능가한다."

(2) "절대로 해결될 수 없는 수학적 문제가 존재한다."

결국, 양립가능한 다음의 논리합이 성립한다.

(3) "수학자의 마음은 어떠한 유한기계도 무한히 능가하거나, 절대로 해결될 수 없는 수학적 문제가 존재한다."

이 둘은 배타적이지 않으며 양립가능하다. 이것이 불완전성 정리 이후 수학의 토대를 위한 괴델의 새로운 제안이었다.

참고 문헌

1. Benacerraf, P., Putnam, H., *Philosophy of Mathematics* (2nd ed.), Cambridge University Presss, 1983.
2. Crocco, G., *Gödel on Concepts*, History and Philosophy of Logic, vol. 27(2006), 171-191.
3. Davis, M., *What Did Gödel Believe and When Did He Believe It?* The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 11, no. 2(2005), 194-206.
4. Feferman, S., *Are There Absolutely Unsolvable Problems? Gödel's Dichotomy*, Philosophia Mathematica 14(2006), 134-152.

5. Føllesdal, D., *Gödel and Husserl*, From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics, Jaakko Hintikka (ed.), Kluwer Academic Publishers, 1995.
6. Gödel, K., *Russell's Mathematical Logic(1944)*, Collected Works, Vol. II, S. Feferman et al.(eds.), Oxford University Press, 1990.
7. Gödel, K., *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications(1951)*, Collected Works, Vol. III, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 1995.
8. Gödel, K., *Is Mathematics Syntax of Language?(1953)*, Collected Works Vol. III, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 1995.
9. Gödel, K., *The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the light of Philosophy(1961)*, Collected Works, Vol. III, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 1995.
10. Gödel, K., *What is Cantor's Continuum Problem?(1964)*, Collected Works, Vol. II, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 1990.
11. Gödel, K., *Collected Works*, Vol. IV, S. Feferman et al. eds., Oxford University Press, 2003.
12. Hauser, K., *Gödel's Program Revisited Part I: The Turn to Phenomenology*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 12, no. 4, (2006), 529-590.
13. Hersh, R., 허민 옮김, 도대체 수학이란 무엇인가?(What is Mathematics, Really?), 경문사, 2003.
14. Jech, T., 무한의 현대사, 한국수학사학회지 12 (1999), No.2, 159-165.
15. Mac Lane, S., *Mathematics Form and Function*, Springer-Verlag, 1986.
16. Martin, D. A., *Gödel's Conceptual Realism*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 11, no. 2, (2005), 207-224.
17. Parsons, C., *Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 1, no. 1, (1995), 44-74.
18. Penrose, R., 박승수 옮김, 황제의 새 마음(The Emperor's New Mind), 이화여자대학교출판부, 1996.
19. Takeuti, G., *Memoirs of a Proof Theorist*: Gödel and Other Logicians, World Scientific, 2003.
20. Tieszen, R., *Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961)*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol.4, no. 2, (1998), 181-203.
21. van Atten, M., Kennedy, J., *On the Philosophical Development of Kurt Gödel*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 9, no. 4, (2003), 425-476.
22. Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, 1996.

23. 김상문, 현우식, 20세기 수리논리학의 사상과 흐름, 한국수학사학회지 8 (1995), No. 1, 6-13.
24. 박창균, 20세기 수학의 패러다임, 한국수학사학회지 9 (1996), No. 2, 22-29.
25. 박창균, 직관주의, 한국수학사학회지 10 (1997), No. 2, 82-88.
26. 박창균, 플라톤주의와 사회구성주의, 한국수학사학회지 15 (2002), No. 2, 69-76.
27. 박창균, 수학에서 수학사와 수리철학의 기능과 역할, 한국수학사학회지 18 (2005), No. 4, 17-28.
28. 현우식, Gödel's Disjunctive Conclusion, 한국수학사학회지 13 (2000), No. 1, 137-141.
29. 현우식, On Gödel's Program from Incompleteness to Speed-up, 한국수학사학회지 15 (2000), No.3, 75-82.
30. 현우식, Gödel's Critique of Turing's Mechanism, 한국수학사학회지 17 (2004), No. 4, 27-36.
31. 현우식, 쿠르트 괴델의 수학적 신학, 한국기독교신학논총 49 (2007), 171-196.
32. 홍성사, 홍영희, Zermelo 이후의 선택공리, 한국수학사학회지 9 (1996), No.2

Gödel on the Foundations of Mathematics

University College, Yonsei University **Woo Sik Hyun**

Following Gödel's own arguments, this paper explores his views on mathematics, its objects, and mathematical intuition. The major claim is that we simply cannot classify the Gödel's view as robust Platonism or realism, since it is conceivable that both Platonistic ontology and intuitionistic epistemology occupy a central place in his philosophy and mathematics.

Key words: Gödel, mathematical objects, mathematical intuition, Platonism, intuitionism

2000 Mathematical Subject Classification: 01A60 03A05

논문 접수: 2007년 6월 심사 완료: 2007년 7월