한국수학사학회지 제20권 제3호(2007년 8월), 1-16

李尙爀(翼算)의 堆垜術과 부분합 복수열*

숙명여자대학교 수학과 **한용현**
yhhan@sm.ac.kr

李尙爀(翼算)의 堆垜術중 三角垜, 四角垜 계열에 관한 부분을 조사하고, 翼算의 결과를 부분합 복수열의 성질로 재해석한다. 유한생성 부분합 복수열의 개념을 도입하고 三角垜, 四角垜 계열에 의한 부분합 복수열이 유한생성 부분합 복수열임을 보인다. 단위 부분합 복수열이 부분합 복수열의 연구에 핵심적 역할을 함을 보인다. 또한, 부분합 복수열이 유한생성이 되기 위한 필요충분조건을 구한다. 그리고, 茭草積에 대한 곱셈법칙에 대응하는 三角垜積, 三角落一積에 대한 곱셈법칙을 구한다.

주제어 : 堆垜術, 三角垜, 李尙爀, 翼算, 계차수열, 복수열, 부분합 복수열.

0. 서론

李尙爀(1810～?)의 **翼算**(1868, [2])은 상권과 하권으로 이루어졌으며, 상권에서 방정식을([4]), 하권에서 유한수열과 유한급수를 다룬다. 중국의 **算書** 즉, **九章算術**(Jiu zhang suan shu), 沈括(Shen Gua, 1031～1095)의 **夢溪筆談**(Meng Xi bi tan, 1095, [1]), 楊輝(Yang Hui)의 **詳解九章算法**(Xiang jie jiu zhang suan fa, 1261)과 **楊輝算法**(Yang Hui suan fa, 1274～1275), 朱世傑(Zhu Shi Jie)의 **算學啓蒙**(Suan xue qi meng, 1299), **四元玉鑑**(Si yuan yu jian, 1303), 安止齋(An Zhi Zhai)의 **詳明算法**(Xiang ming suan fa, 1373) 등이 모두 유한수열과 유한급수를 다루고 있다([3]). **翼算**이 이들과 다른 점은 수열과 급수를 매우 체계적으로 다루고 있는 점과, 분적법의 활용이라 하겠다.

이 논문에서는 **翼算**의 결과 중 三角垜, 四角垜 계열의 급수를 연구하고 부분합 복수열, 단위 부분합 복수열의 개념을 도입하여 위의 급수들을 부분합 복수열로 일반화한다. 부분합 복수열의 항들 사이의 관계를 조사하고, **翼算**의 결과와 비교한다. 또한, 유한생성 부분합 복수열의 개념을 도입하고 위의 급수들이 이루는 부분합 복수열이 유한생성임을 보인다. 또한, 圓錐垜의 일반항 a_n 을 n 의 다항함수로 나타낼 수 없음을 보인다.

* 본 연구는 2006년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

1절에서는 부분합 복수열, 단위 부분합 복수열의 성질을 연구하고, 부분합 복수열의 연구에 있어 단위 부분합 복수열이 매우 중요한 역할을 함을 본다. **翼算**의 三角垜 계열의 급수가 단위 부분합 복수열을 이룸을 보이고, 三角垜, 四角垜 계열의 급수 사이의 관계에 대한 **翼算**의 결과를 일반화한다.

2절에서는 유한생성 부분합 복수열의 개념을 도입하고 부분합 복수열이 유한생성이 되기 위한 필요충분조건이 한 행의 일반항이 다항함수로 표시되는 것임을 보인다. 유한생성이 아닌 부분합 복수열의 예로 **翼算**의 圓錐垜에 의해 생성되는 부분합 복수열을 들고 이를 연구한다.

3절에서는 茭草積(3각형수)에 대한 곱셈정리에 대응하는 三角垜積(四面體數), 三角落一積(4차원 四面體數)에 대한 곱셈정리를 구하였다. 이는 **翼算**에서 다루고 있지 않지만 三角垜계열의 급수의 중요한 성질이다.

조선시대의 퇴타술에 대한 수학사적 연구는 [3]을 참고한다.

翼算[2]에서의 三角垜계열, 四角垜계열의 정의는 다음과 같다.

$$S_n^0 = n,\ S_n^{r+1} = \sum_{k=1}^{n} S_k^r,\ (r=0,1,2,3,4).$$
$$T_n^0 = n^2,\ T_n^{r+1} = \sum_{k=1}^{n} T_k^r,\ (r=0,1,2,3,4).$$

S_n^1: 茭草積, S_n^2: 三角垜積, S_n^3: 三角落一積, S_n^4: 三角撒星積, S_n^5: 三角撒星更落一積.
T_n^1: 四角垜積, T_n^2: 四角落一積, T_n^3: 四角撒星積, T_n^4: 四角撒星更落一積.

1. 부분합 복수열

이 절에서는 복수열, 부분합 복수열, 단위 부분합 복수열의 성질을 조사하고 **翼算**의 결과와 비교한다.

정의 1.1 a) 함수 $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 를 **복수열**이라 한다. $f(m,n)$ 을 A_n^m 등으로 나타내고, 복수열을 $(A_n^m)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ 또는 간단히 (A_n^m)으로 나타낸다.

b) 복수열 $(A_n^m)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}}$ 이 $A_n^{m+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k^m \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$를 만족할 때, (A_n^m) 을 **부분합 복수열**이라 한다.

(A_n^m) 이 부분합 복수열이면 $A_1^m = A_1^{m+1}$, $A_{n+1}^m = A_{n+1}^{m+1} - A_n^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ 이 성립한다. 또한, 역도 성립한다. 그러므로 $(A_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ 은 $(A_n^{m-1})_{n \in \mathbb{N}}$ 의 부분합의 수열이고, 동시에 $(A_n^{m+1})_{n \in \vec{N}}$의 **계차수열**[1]이다. 그러므로 부분합 복수열은 임의의 한 행 $(A_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ 에 의해 완전히 결정된다.

정의 1.2 $E_n^1 = 1\,(n \in \mathbb{N})$ 에 의해 결정되는 부분합 복수열 $(E_n^m)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ 를 **단위 부분합 복수열**이라 한다.

정리 1.3 단위 부분합 복수열 $(E_n^m)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ 의 각 항의 값은 다음과 같다.

$$E_n^m = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ \dfrac{m(m+1)\cdots(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)} & n > 1. \end{cases}$$

증명 E_n^m 이 위와 같이 정의되었다고 하자. 모든 정수 m 과 모든 자연수 n 에 대해 $E_1^m = 1 = E_1^{m+1}$ 이고

$$\begin{aligned} E_{n+1}^{m+1} - E_n^{m+1} &= \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} - \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)} \left(\frac{m+n}{n} - 1\right) \\ &= \frac{m(m-1)\cdots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \\ &= E_{n+1}^m \end{aligned}$$

또한, 모든 자연수 n 에 대해 $E_{n+1}^1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} = 1$ 이므로 $(E_n^m)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ 은 단위 부분합 복수열이다.

자연수 m, n 에 대해 $E_n^m = \dbinom{m+n-2}{n-1}$ 임을 알 수 있다. 다음은 단위 부분합 복수열 (E_n^m) 의 표이다.

이 표에서 m 이 자연수인 부분에서 Pascal 의 삼각형을 사각형모양으로 배열한 것이 나타나고, m 이 0 이거나 음의 정수인 부분에서 부호가 교대로 바뀌는 Pascal 의 삼각형이 나타남을 볼 수 있다.

1) 일반적으로 정의하는 (x_n)의 계차수열은 $(x_{n+1} - x_n)$이고 여기에서의 의미와 다르다.

$m\diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7
-3	1	-3	3	-1	0	0	0
-2	1	-2	1	0	0	0	0
-1	1	-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462

E_n^3 는 茭草積 S_n^1, E_n^4 는 三角垜積 S_n^2, E_n^5 는 三角落一積 S_n^3, E_n^6 는 三角撒星積 S_n^4, E_n^7 는 三角撒星更落一積 S_n^5 임을 알 수 있다. 정수 m 에 대해 $S_n^m = E_n^{m+2}$ 으로 정의한다.

翼算에서 다른 四角垜積, 四角落一積, 四角撒星積, 四角撒星更落一積 등도 부분합 복수열을 이룬다.

부분합 복수열 $(A_n^m)_{m\in \mathbf{Z}, n\in \mathbf{N}}$ 에 대해 편의상 $n\leq 0$ 일 때, $A_n^m=0$ 으로 정의한다.

임의 정수 n_0에 대하여 순서 집합 $n\in\overrightarrow{Z}: n_0\leq n$ ($n\in\overrightarrow{Z}: n\leq n_0$)은 자연수 전체의 정렬집합 $\overrightarrow{N}$과 대응 $m\mapsto n_0-1+m$ ($m\mapsto n_0+1-m$) 에 의하여, 순서 동형 (순서 반동형)이므로 다음을 얻는다.

보조정리 1.4 $P(n)$ 이 정수 n 에 대한 명제이고 n_0 가 한 정수일 때

a) $P(n_0)$ 가 참이고,

b) 정수 n 에 대해 $P(n)$ 이 참일 때, $P(n+1)$과 $P(n-1)$ 이 참이면

모든 정수 n 에 대해 $P(n)$ 이 참이다.

다음의 두 정리는 부분합 복수열의 항들 사이의 관계를 나타내는 방법에 대한 것이다. 여기에서 단위 부분합 복수열의 중요성을 확인할 수 있다.

정리 1.5 (A_n^p) 이 부분합 복수열이면, 자연수 n 과 정수 p, q 에 대해

$$A_n^p = \sum_{k=1}^{n} E_k^{q+1-k} A_{n+1-k}^{p-q+k}.$$

특히, $q=p$ 일 때

$$A_n^p = \sum_{k=1}^{n} E_k^{p+1-k} A_{n+1-k}^{k}.$$

증명 $q=1$ 일 때, (우변)$= \sum_{k=1}^{n} E_k^{2-k} A_{n+1-k}^{p-1+k} = E_1^1 A_n^p = A_n^p =$(좌변).

한 정수 q 에 대해 위의 식이 성립하면,

$$\begin{aligned}
A_n^p &= A_{n-1}^p + A_n^{p-1} \\
&= \sum_{h=1}^{n-1} E_h^{q+1-h} A_{n-h}^{p-q+h} + \sum_{k=1}^{n} E_k^{q+1-k} A_{n+1-k}^{p-1-q+k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} E_{k-1}^{(q+1)+1-k} A_{n+1-k}^{p-(q+1)+k} + \sum_{k=1}^{n} E_k^{q+1-k} A_{n+1-k}^{p-(q+1)+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (E_{k-1}^{(q+1)+1-k} + E_k^{q+1-k}) A_{n+1-k}^{p-(q+1)+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k^{(q+1)+1-k} A_{n+1-k}^{p-(q+1)+k}.
\end{aligned}$$

그리고,

$$\begin{aligned}
A_n^p &= \sum_{k=1}^{n} E_k^{q+1-k} A_{n+1-k}^{p-q+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (E_k^{q-k} + E_{k-1}^{q+1-k}) A_{n+1-k}^{p-q+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k^{q-k} A_{n+1-k}^{p-q+k} + \sum_{k=1}^{n} E_{k-1}^{q+1-k} A_{n+1-k}^{p-q+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k^{q-k} A_{n+1-k}^{p-q+k} + \sum_{k=0}^{n-1} E_k^{q-k} A_{n-k}^{p-q+1+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} E_k^{(q-1)+1-k} (A_{n+1-k}^{p-q+k} + A_{n-k}^{p-1+1+k}) + E_n^{q-n} A_1^{p-q+n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} E_k^{(q-1)+1-k} A_{n+1-k}^{p-(q-1)+k} + E_n^{q-n} A_1^{p-(q-1)+n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k^{(q-1)+1-k} A_{n+1-k}^{p-(q-1)+k}.
\end{aligned}$$

그러므로 위의 보조정리에 의해, 모든 정수 q 에 대하여 위의 식이 성립한다.

예 위의 정리는 부분합 복수열의 항사이의 관계식 $A_{n+1}^{m+1} = A_n^{m+1} + A_{n+1}^m$ 의 일반화이다. 즉, $(A_n^p)=(E_n^p)$, $p=2$, $n=3$, $q=0, 1, 2, 3, 4, \cdots$, $-1=-2=-3, \cdots$ 일 때,

$$\begin{aligned}
3 = E_3^2 &= E_1^1E_3^2 + E_2^0E_2^3 + E_3^{-1}E_1^4 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\
&= E_1^2E_3^1 + E_2^1E_2^2 + E_3^0E_1^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\
&= E_1^3E_3^0 + E_2^2E_2^1 + E_3^1E_1^2 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
&= E_1^4E_3^{-1} + E_2^3E_2^0 + E_3^2E_1^1 = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\
&= E_1^5E_3^{-2} + E_2^4E_2^{-1} + E_3^3E_1^0 = 1 \cdot 1 + 4(-1) + 6 \cdot 1 \\
&= \cdots \\
&= E_1^0E_3^3 + E_2^{-1}E_2^4 + E_3^{-2}E_1^5 = 1 \cdot 6 + (-1)4 + 1 \cdot 1 \\
&= E_1^{-1}E_3^4 + E_2^{-2}E_2^5 + E_3^{-3}E_1^6 = 1 \cdot 10 + (-2)5 + 3 \cdot 1 \\
&= E_1^{-2}E_3^5 + E_2^{-3}E_2^6 + E_3^{-4}E_1^7 = 1 \cdot 15 + (-3)6 + 6 \cdot 1 \\
&= \cdots .
\end{aligned}$$

따름정리 1.6 정수 p, q 자연수 n 에 대해

$$\begin{aligned}
E_n^p &= \sum_{k=1}^{n} E_k^{q+1-k} E_{n+1-k}^{p-q+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k^{p+1-k} E_{n+1-k}^{k}.
\end{aligned}$$

예 마지막 결과에서 $p=n$ 일 때, $E_n^n = \sum_{k=1}^{n} E_k^{n+1-k}E_{n+1-k}^k = \sum_{k=1}^{n}(E_k^{n+1-k})^2$ 이므로 2항계수로 표시하면 $\binom{2n-2}{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}^2$ 즉, 자연수 n 에 대해

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

정리 1.7 부분합 복수열 $(A_n^m)_{m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}}$ 과 정수 l, m, 자연수 n 에 대하여

$$A_n^{l+m} = \sum_{k=1}^{n} A_k^l E_{n+1-k}^m.$$

증명 $m=0$ 인 경우는 자명하다.
한 자연수 m 에 대해 위의 식이 성립할 때,

$$A_n^{l+m+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k^{l+m} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{k} A_h^l E_{k+1-h}^m = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=h}^{n} A_h^l E_{k+1-h}^m$$
$$= \sum_{h=1}^{n} A_h^l \sum_{k=h}^{n} E_{k+1-h}^m = \sum_{h=1}^{n} A_h^l \sum_{r=1}^{n+1-h} E_r^m = \sum_{h=1}^{n} A_h^l E_{n+1-h}^{m+1}.$$

또한,

$$A_n^{l-m-1} = A_n^{l-m} - A_{n-1}^{l-m} = \sum_{k=1}^{n} A_k^l E_{n+1-k}^{-m} - \sum_{k=1}^{n-1} A_k^l E_{n-k}^{-m}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^l (E_{n+1-k}^{-m} - E_{n-k}^{-m}), \ (\because E_0^{-m} = 0)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^l E_{n+1-k}^{-m-1}.$$

보조정리 1.4 에 의하여, 모든 정수 m 에 대하여 위의 식이 성립한다.

자연수 m, n 에 대해 $E_n^m = \dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = E_m^n$ 임을 알 수 있다. 이를 이용하여 다음의 정리를 얻는다.

정리 1.8 a) 정수 $l, m,$ 자연수 n 에 대해 $E_n^{l+m} = \sum_{k=1}^{n} E_k^l E_{n+1-k}^m.$

b) 자연수 l, m, n 에 대해 $E_{l+m}^n = \sum_{k=1}^{n} E_l^k E_m^{n+1-k}.$

이상혁은 **翼算**에서 截積에 대한 공식

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^0 = S_n^1 + S_n^0 S_{m-1}^0, \quad \sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 = S_n^2 + S_n^1 S_{m-1}^0 + S_n^0 S_{m-1}^1,$$
$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^2 = S_n^3 + S_n^2 S_{m-1}^0 + S_n^1 S_{m-1}^1 + S_n^0 S_{m-1}^2$$

등을 소개하고 여러 방법으로 이를 설명(증명)하고 있다. 특히 그 만의 독창적 방법인 분적법을 사용한 증명은 매우 독창적이다. 위의 식으로부터 다음을 얻는다.

$$S_{m+n-1}^3 - S_{m-1}^3 = S_n^3 + S_n^2 S_{m-1}^0 + S_n^1 S_{m-1}^1 + S_n^0 S_{m-1}^2$$
$$S_{m+n-1}^3 = S_n^3 S_{m-1}^{-1} + S_n^2 S_{m-1}^0 + S_n^1 S_{m-1}^1 + S_n^0 S_{m-1}^2 + S_n^{-1} S_{m-1}^3.$$

$S_n^m = E_n^{m+2}$ 이므로 정리 1.8의 b)는 **翼算**의 위의 공식들에 해당된다.

정리 1.9 부분합 복수열 (A_n^m) 과 자연수 p, q, m, n 에 대해,

$$\sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k}E_n^{m+k} = \sum_{h=1}^{n} E^{m}_{n+1-h}A_q^{p+h}.$$

증명 n 에 대한 귀납법을 사용한다.

$n=1$ 일 때, (좌변) $= \sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k}E_1^{m+k} = E_1^{m}\sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k} = A_q^{p+1} =$ (우변).

한 자연수 n 에 대해 위의 식이 성립한다면

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k}E_{n+1}^{m+k} &= \sum_{k=1}^{q} A^{p}_{n+1-k}(E^{m}_{n+1} + \sum_{h=1}^{k} E_n^{m+h}) \\
&= A_q^{p+1}E^{m}_{n+1} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{h=1}^{k} A^{p}_{q+1-k}E_n^{m+h} \\
&= E^{m}_{n+1}A_q^{p+1} + \sum_{h=1}^{q}\sum_{k=h}^{q} A^{p}_{n+1-k}E_n^{m+h} \\
&= E^{m}_{n+1}A_q^{p+1} + \sum_{h=1}^{q} E_n^{m+h}\sum_{k=h}^{q} A^{p}_{q+1-k} \\
&= E^{m}_{n+1}A_q^{p+1} + \sum_{h=1}^{q} A^{p+1}_{q+1-h}E_n^{m+h} \\
&= E^{m}_{n+1}A_n^{p+1} + \sum_{i=1}^{n} E^{m}_{n+1-i}A_q^{p+1+i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} E^{m}_{n+1-i}A_q^{p+1+i} \\
&= \sum_{h=1}^{n+1} E^{m}_{(n+1)+1-h}A_q^{p+h}.
\end{aligned}$$

이므로 $n+1$ 에 대해서도 성립한다.

따름정리 1.10 자연수 p, q, m, n 에 대해, $\sum_{k=1}^{q} E^{p}_{q+1-k}E_n^{m+k} = \sum_{h=1}^{n} E^{m}_{n+1-h}E_q^{p+h}$.

예 1. $n=1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k}E_1^{m+k} = E_1^{m}A_q^{p+1}$, 즉 $\sum_{k=1}^{q} A^{p}_{q+1-k} = A_q^{p+1}$.

2. $A_q^p = E_q^p$, $m=2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)E^{q}_{p+k} = \sum_{h=1}^{q} E^{p}_{q+1-h}E_n^{h+2}$.

S_n^r 으로 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)S^{r}_{m-1+k} = \sum_{h=1}^{r+2} S^{r+1-h}_{m-1}S^{h}_{n}$ 이고, 여기에서

$r=0$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(m-1+k)=S_{m-1}^{0}S_n^1+S_{m-1}^{-1}S_n^2=(m-1)S_n^1+S_n^2,$

$r=1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)S_{m-1+k}^{1}=S_{m-1}^{1}S_1^1+(m-1)S_n^2+S_n^3,$

$r=2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)S_{m-1+k}^{1}=S_{m-1}^{2}S_n^1+S_{m-1}^{1}S_n^2+(m-1)S_n^3+S_n^4$

등을 얻는다. 이는 翼算의 결과와 일치한다.

3. $p=1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{q}E_{q+1-k}^{1}E_n^{m+k}=\sum_{h=1}^{n}E_{n+1-h}^{m}E_q^{p+h}$ 즉

$\sum_{k=1}^{q}E_{m+k}^{n}=\sum_{h=1}^{n}E_m^{n+1-h}E_q^{p+h}$ 에서 三角垜계열의 截積에 대한 공식

$\sum_{k=m}^{m+n-1}S_k^r=\sum_{h=1}^{r+2}S_{m-1}^{r+1-h}S_n^{h+1}$ 을 얻는다. 이 것 또한 翼算의 결과와 일치한다.

따름정리 1.11 모든 자연수 p, q, m, n, s 에 대해

$$\sum_{k=1}^{q}E_{q+s+1-k}^{p}E_n^{m+k}=\sum_{h=1}^{n}E_{n+1-h}^{m}E_{q+s}^{p+h}-\sum_{h=1}^{n}E_{n+1-h}^{m+q}E_s^{p+h}.$$

증명

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q}E_{q+s+1-k}^{p}E_n^{m+k}&=\sum_{k=1}^{q+s}E_{q+s+1-k}^{p}E_n^{m+k}-\sum_{h=1}^{s}E_{s+1-k}^{p}E_n^{m+q+k}\\&=\sum_{h=1}^{n}E_{n+1-h}^{m}E_{q+s}^{p+h}-\sum_{h=1}^{n}E_{n+1-h}^{m+q}E_s^{p+h}.\end{aligned}$$

정리 1.12 자연수 p,q,k 에 대해 $E_k^pE_{k-q+1}^q=E_q^pE_{k-q+1}^{p+q-1}$.

증명

$$\begin{aligned}E_k^pE_{k-q+1}^q&=\frac{k(k+1)\cdots(k+p-2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(p-1)}\,\frac{(k-q+1)(k-q+2)\cdot\cdots\cdot(k-1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(q-1)}\\&=\frac{(k-q+1)(k-q+2)\cdots(k+p-2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(p+q-2)}\,\frac{p(p+1)\cdots(p+q-2)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(q-1)}\\&=E_q^pE_{k-q+1}^{p+q-1}.\end{aligned}$$

정리 1.13 자연수 p, q, n 에 대해 $\sum_{k=1}^{n} E_k^p E_k^q = \sum_{h=1}^{q} E_h^{q+1-h} E_h^p E_{n+1-h}^{p+h}$.

증명

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} E_k^p E_k^q &= \sum_{k=1}^{n} \left(E_k^p \sum_{h=1}^{q} E_h^{q+1-h} E_{k+1-h}^{h}\right) \\
&= \sum_{h=1}^{q} \left(E_h^{q+1-h} \sum_{k=1}^{n} E_k^p E_{k+1-h}^{h}\right) \\
&= \sum_{h=1}^{q} \left(E_h^{q+1-h} \sum_{k=1}^{n} E_h^p E_{k+1-h}^{p+h-1}\right) \\
&= \sum_{h=1}^{q} E_h^{q+1-h} E_h^p E_{n+1-h}^{p+h}.
\end{aligned}$$

따름정리 1.6 에 의해 첫 번째 등식을 얻고, $v < 1$ 일 때 $E_v^u = 0$ 이므로, 마지막 등식을 얻는다.

예 $q = 2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} kE_k^p = E_n^{p+1} + E_2^p E_{n-1}^{p+2} = E_n^{p+1} + pE_{n-1}^{p+2}$.

三角嵐峰積계열의 식으로 $\sum_{k=1}^{n} kS_k^r = S_n^{r+1} + (r+2)S_{n-1}^{r+2} = S_n^{r+2} + (r+1)S_{n-1}^{r+2}$ 이므로 翼算의 결과와 일치한다.

2. 유한생성 부분합 복수열

이 절에서는 유한생성 부분합 복수열의 개념을 도입하고, 부분합 복수열이 유한생성이 될 필요충분조건을 구한다. 또한, 유한생성이 아닌 부분합 복수열의 예를 본다.

정의 2.1 복수열 (A_j^i) 에 대해 정수 m, 자연수 p 가 존재하여 $A_p^m \neq 0$, $A_j^m = 0\,(j > p)$ 을 만족할 때, (A_j^i) 의 m 번째 행을 **길이가** p **인 유한행**이라 하고 유한행이 아닌 행을 **무한행**이라 한다. 유한행을 갖는 부분합 복수열을 **유한생성 부분합 복수열**이라 한다.

단위 부분합 복수열은 대표적인 유한생성 부분합 복수열이다. 부분합 복수열 (A_j^i)

에서 m행이 유한행이고 길이가 p 이면 $m-1$행은 길이가 $p+1$인 유한행이고, $m+1$ 행은 무한행이거나 길이가 $p-1$ 인 유한행임을 알 수 있다. 그러므로 0 이 아닌 유한생성 부분합 복수열은 최소 길이의 유한행을 갖는다.

정리 1.7 로부터 다음 정리를 얻는다.

정리 2.2 유한생성 부분합 복수열은 단위 부분합 복수열의 일차결합으로 표시된다. 즉, 부분합 복수열 (A_j^i) 의 m 행이 길이가 p 인 유한행일 때, 다음이 성립한다.

$$A_j^i = \sum_{k=1}^{p} A_k^m E_{j+1-k}^{i-m}$$

또는,

$$(A_j^i) = A_1^m(E_j^{i-m}) + A_2^m(E_{j-1}^{i-m}) + \cdots + A_p^m(E_{j-p+1}^{i-m}).$$

이 정리의 역도 성립한다. 위의 정리를 이용하여 k번째 계차수열이 유한수열인 수열의 일반항을 구할 수 있다.

예 수열 $(a_n) = (1, 6, 15, 28, 45 \cdots)$ 의 일반항을 구하자. 이의 3차 계차수열이 유한이므로 부분합 복수열 (A_n^m)을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{array}{lllllll}
(A_n^3): & 1, & 6, & 15, & 28, & 45, & \cdots \\
(A_n^2): & 1, & 5, & 9, & 13, & 17, & \cdots \\
(A_n^1): & 1, & 4, & 4, & 4, & 4, & \cdots \\
(A_n^0): & 1, & 3, & 0, & 0, & 0, & \cdots
\end{array}$$

위의 정리에 의해, $a_n = A_n^3 = E_n^3 + 3E_{n-1}^3 = \dfrac{n(n+1)}{2} + 3\dfrac{(n-1)n}{2} = 2n^2 - n$ 임을 알 수 있다.

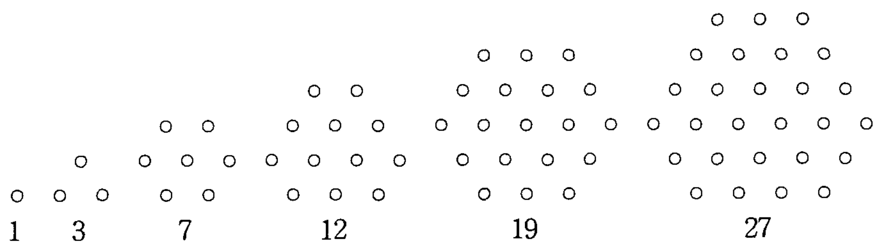
부분합 복수열 (A_j^i) 에서 m 행의 일반항이 j 의 다항함수로서 차수가 n 이면 $m-n-1$ 행이 최소 길이의 유한행이고 그 길이가 $n+1$이하이므로 다음을 얻는다.

정리 2.3 부분합 복수열 (A_j^i) 이 유한생성일 필요충분조건은 이의 한 행, $(A_j^i)_j$ 의 일반항이 j 의 다항함수인 것이다.

유한생성이 아닌 부분합 복수열의 예를 든다. (B_j^i) 가 $B_2^0 = 0$, $B_j^0 = (-1)^{j+1}$ $(j \neq 2)$ 로 정의된 부분합 복수열이라 하자. 다음은 이 복수열 (B_j^i) 의 표이다.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	2	1	2	1	2	1
2	1	2	4	5	7	8	10	11
3	1	3	7	12	19	27	37	48
4	1	4	11	23	42	69	106	154
5	1	5	16	39	81	150	256	410
6	1	6	22	61	142	292	548	958

아래 도형의 원의 개수가 이 복수열의 3행의 각 항을 나타냄을 알 수 있다.



翼算에서는 이 행의 $2k$ 항이 $3k^2$ 이어서 원주율을 3으로 할 때, 지름이 $2k$ 인 원의 면적과 일치하므로 이를 **원**이라 하고, $2k-1$ 항의 경우 $3(\frac{2k-1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 이 되어 지름이 $2k-1$ 인 **원**의 면적과 $\frac{1}{4}$의 차이가 있음을 지적하였다. 그리고 이 행의 부분합, 즉 B_j^4 를 圓錐垜라 하였다.

6각형 피라미드 모양으로 샴페인 잔을 쌓아놓고 꼭대기의 잔에 샴페인을 부어서 모든 잔을 채울 수 있다. 위에서 j 번째 층의 잔의 개수가 B_j^3이고 맨 위층부터 이 층까지의 잔의 개수가 B_j^4 이다. $(B_j^0)=(0,1,0,0,0,\cdots)+(1,-1,1,-1,1,\cdots)$이므로 정리 1.7 에 의하여, $B_j^i=E_{j-1}^i+\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k+1}E_{j+1-k}^i$ 를 얻는다. 이를 이용하면 인원수에 맞춰 샴페인 잔의 탑을 쌓을 수 있다.

3. 三角垜積, 三角落一積의 곱셈정리

茭草積($S_n^1 = E_n^3$)은 삼각형의 형태를 이룬 점들의 수를 나타낸다. 그러므로 이를 **삼각형수**라고도 부른다. 삼각형수의 흥미로운 성질은 다음과 같다([5], [6], [7]). 이들은 위의 식을 대입하여 증명할 수 있고, (8)은 (5)와 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다. 아래의 도형은 이를 이해하는 데 도움이 된다. 편의상 $S_n^1 = E_n^3$ 을 t_n 으로 나타낸다. $(m)_n$ 은 n 진법으로 나타낸 수를 뜻한다.

$$t_n + t_{n+1} = (n+1)^2 \qquad \text{(거듭제곱정리)}$$

$$t_{m+n} = t_m + mn + t_n \qquad \text{(덧셈정리)}$$

$$t_{m\times n} = t_m t_n + t_{m-1} t_{n-1} \qquad \text{(곱셈정리)}$$

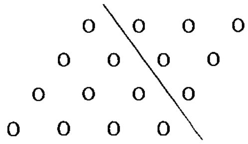
$$t_{m\times n-1} = t_m t_{n-1} + t_{m-1} t_n \qquad \text{(곱셈정리)}$$

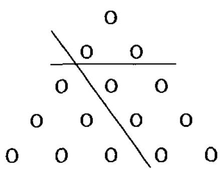
$$9t_n + 1 = t_{3n+1}$$

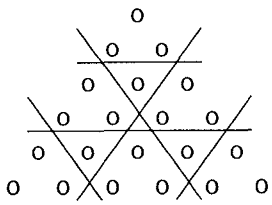
$$8t_n + 1 = (2n+1)^2$$

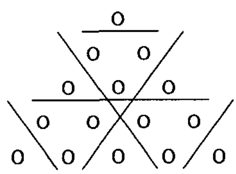
$$(t_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

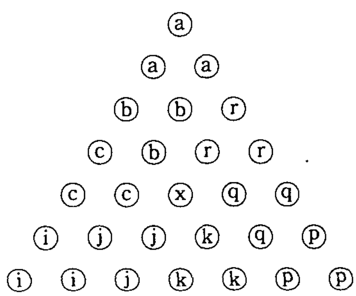
$$t_{(11\cdots1)_3} = (11\cdots1)_9.$$

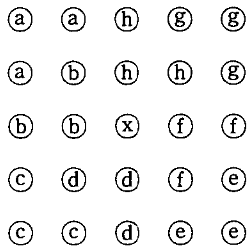

(1) $t_3 + t_4 = 4^2$

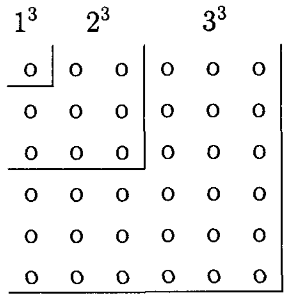

(2) t_{2+3}


(3) $t_{2\times3}$


(4) $t_{2\times3-1}$


(5) $9t_2 + 1 = t_{3\times2+1}$


(6) $8t_2 + 1 = (2\times2+1)^2$



(7) $(t_3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$

정리 2.7의 b)는 덧셈정리 (2)의 일반화이다.

이 절의 목적은 곱셈정리 (3), (4)에 대응하는 三角垜積($S_n^2 = E_n^4$), 三角落一積($S_n^3 = E_n^5$)에 대한 곱셈정리를 구하는 것이다. E_n^4, E_n^5 을 각 각 4면체수, 4차원4면체수라 부르기도 한다.

정리 3.1 三角垜積의 곱셈정리

$$E_{mn}^4 = E_m^4 E_n^4 + 4E_{m-1}^4 E_{n-1}^4 + E_{m-2}^4 E_{m-2}^4.$$

$$E_{mn-2}^4 = E_m^4 E_{n-2}^4 + 4E_{m-1}^4 E_{n-1}^4 + E_{m-2}^4 E_n^4.$$

증명

$$\begin{aligned}
&(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)+4(m-1)(m+1)(n-1)(n+1)\\
&\qquad +(m-2)(m-1)(n-2)(n-1)\\
&=(m+1)(n+1)[(m+2)(n+2)+2(m-2)(n-1)]\\
&\quad +(m-1)(n-1)[(2(m+1)(n+1)+(m-2)(n-2)]\\
&=(m+1)(n+1)(3mn+6)+(m-1)(n-1)(3mn+6)\\
&=3(mn+2)[(m+1)(n+1)+(m-1)(n-1)]\\
&=6(mn+1)(mn+2)
\end{aligned}$$

양변에 mn을 곱하고 36으로 나누면 첫 번째 식을 얻는다.

같은 방법으로 두 번째 식을 얻을 수 있다.

정리 3.2 三角落一積의 곱셈정리

$$E_{mn}^5 = E_m^5 E_n^5 + 11E_{m-1}^5 E_{n-1}^5 + 11E_{m-2}^5 E_{n-2}^5 + E_{m-3}^5 E_{n-1}^5 - E_{m-1}^4 E_{n-1}^4.$$

$$E_{mn-3}^5 = E_m^5 E_{n-3}^5 + 11E_{m-1}^5 E_{n-2}^5 + 11E_{m-2}^5 E_{n-1}^5 + E_{m-3}^5 E_n^5 + E_{m-1}^4 E_{n-1}^4.$$

증명

$$\begin{aligned}
&(m+1)(m+2)(m+3)(n+1)(n+2)(n+3)\\
&+11(m-1)(m+1)(m+2)(n-1)(n+1)(n+2)\\
&+11(m-2)(m-1)(m+1)(n-2)(n-1)(n+1)\\
&+(m-3)(m-2)(m-1)(n-3)(n-2)(n-1)\\
&-16(m-1)(m+1)(n-1)(n+1)\\
&=(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)[(m+3)(n+3)+3(m-1)(n-1)]\\
&+8(m-1)(m+1)(n-1)(n+1)[(m+2)(n+2)+(m-2)(n-2)-2]\\
&+(m-2)(m-1)(n-2)(n-1)[3(m+1)(n+1)+(m-3)(n-3)]\\
&=(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)(4mn+12)\\
&+8(m-1)(m+1)(n-1)(n+1)(2mn+6)\\
&+(m-2)(m-1)(n-2)(n-1)(4mn+12)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=4(m+1)(n+1)(mn+3)[(m+2)(n+2)+2(m-1)(n-1)] \\
&\quad +4(m-1)(n-1)(mn+3)[2(m+1)(n+1)+(m-2)(n-2)] \\
&=12(mn+2)(mn+3)[m+1)(n+1)+(m-1)(n-1)]
\end{aligned}
$$

양변에 mn을 곱하고 24^2으로 나누면 첫 번째 식을 얻는다.

같은 방법으로 두 번째 식을 얻을 수 있다.

4. 결론

李尙爀은 **翼算** 하권에서 三角垛, 四角垛 계열의 급수를 많이 다루고 있다. 이 논문에서는 이들의 개념을 단위 부분합 복수열로 일반화하였고 또한, 이들에 관한 **翼算**의 결과를 일반화하였다. 부분합 복수열의 성질을 연구하는 데 있어 단위 부분합 복수열이 핵심적 역할을 함을 볼 수 있었다. 급수 또는 수열을 연구할 때, 부분합 복수열을 이용할 수 있음을 보였다. n번째 계차수열이 유한수열이 되는 수열의 일반항을 구하는 방법도 제시하였다.

유한생성 부분합 복수열의 개념을 도입하고 복수열이 유한생성이 될 필요충분조건으로 이의 한 행의 일반항을 다항함수로 나타낼 수 있는 것임을 보였다.

茭草積(3각형수)의 곱셈정리에 대응하는 三角垛積(4면체수)와 三角落一積(4차원 4면체수)에 대한 곱셈정리를 얻었다.

참고 문헌

1. 沈括, *夢溪筆談*, 國學基本叢書, 臺灣商務印書館印行, 1967.
2. 李相爀, 홍성사 역, ***翼算*** 하편, 교우사, 2006.
3. 홍성사, 朝鮮 算學의 堆垛術, 한국수학사학회지 19(2006), No. 2, 1-24.
4. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學者 李相爀의 方程式論, 한국수학사학회지 17(2004), No. 1, 1-14.
5. Beiler, A. H., *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, 1966.
6. Conway, J. H., Guy, R., *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996.
7. Eaton, C. F., *Problem 1482*, Math. Mag. 68, 307, 1995.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 20 No. 3 (Aug. 2007), 1-16

DUI DUO SHU in LEE SANG HYUK's IKSAN and DOUBLE SEQUENCES of PARTIAL SUMS

In order to generalize theory of series in Iksan(翼算), we introduce a concept of double sequence of partial sums and elementary double sequence of partial sums, which play a dominant role in the study of double sequences of partial sums. We introduce a concept of finitely generated double sequence of partial sums and find a necessary and sufficient condition for those double sequences. Finally we prove a multiplication theorem for tetrahedral numbers and for 4 dimensional tetrahedral numbers.

Key Words: 翼算, Triangular numbers(茭草積), Tetrahedral numbers(三角垜積), 4-Dimensional Tetrahedral numbers(三角落一積), 三角撒星積, 三角撒星更落一積, Square Pyramidal Numbers(四角垜積), 四角落一積, 四角撒星積, Difference Sequences, Double Sequences, Double Sequences of Partial Sums.

2000 Mathematics Subject Classification: 01A13,01A50,01A55,05-03,05A10,11B65

논문 접수: 2007년 3월　　　　심사 완료: 2007년 6월