韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 8. 제 46권, 제 3호, 331-349

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2007, Vol. 46, No. 3, 331-349

동적기하가 원뿔곡선 문제 해결에 미치는 영향

홍 성 관 (부산대학교)
박 철 호 (부산대학교 대학원)

I. 서 론

1. 연구의 필요성

1980년대는 수학교육에서 문제 해결이 강조된 시대였다. 우리나라에서도 1990년대부터 본격적으로 문제해결에 관한 많은 연구가 진척되었음을 알 수 있다(김부윤 · 이영숙, 2003). 하지만, 인터넷 강의가 학생과 학부모에게 인기를 끌고 있다는 것은, 아직도 많은 사람들이 학생들에게 주어진 개념을 거듭해서 반복설명하거나, 많은 예제 문제를 풀게 하면 관련된 문제해결을 잘 할 것이라고 믿고 있다는 증거가 된다.

그러나 문제 해결을 위하여 학생들에게 예제를 제시하고 그 풀이과정을 알려준다고 해서 실제로 예제와 관련된 문제의 해답을 구할 수 있다고 주장할 수는 없다(Novick & Holyoak, 1991). 그 이유에 대한 분석은 여러 가지로 진행되고 있다. 그 중 하나는 학생 개인이 인식하는 문제나 문제 구조에 대한 유사성은 문제 상황에 대한 개인의 내적인 표상에 따라 달라질 수 있으며, 아주 개인적일 수 있기 때문이다(박현정 · 이종희, 2007). 이런 이유로 유사성이나 표상과 관련한 문제해결에 대한 연구는 많이 진척되고 있다(박현정 · 이종희, 2006; 한정민, 2005; 오미연, 2006).

그렇다면, 문제의 풀이 과정에 대한 설명을 듣고도 유사한 문제를 잘 풀지 못하는 이유 중에서 유사성과 개인적 표상을 제외한 또 다른 요인은 없을까? 동시에 원뿔곡선과 관련한 문제해결에서는 어떤 요인이 작용하는지에 대하여 분석하는 일은 고등학교 원뿔곡선 교수-학습에 매우 유의미한 작업이 될 것이다.

고등학교 수학II 교과서에 나오는 원뿔곡선은 원이나 삼각형과 같이 학생들이 직접 작도하기가 곤란한 단원이다. 따라서 작도를 도와주기 위한 수단으로 동적기하를 사용할 필요성이 제기된다. 한편, 도구의 사용은 학습자의 인식에 영향을 미친다. 즉, 종이라는 도구의 등장으로 인간은 지식을 종이에 저장할 수 있으며, 종이를 통해 지식을 중재할 수 있다. 즉, 인간은 '종이'라는 도구의 분산(저장)과 중재의 기능을 통해 세상을 새롭게 바라볼 수 있다(Shaffer & Clinton, 2005). 마찬가지로 '동적기하'라는 컴퓨터 도구는 학생들의 학습에 또 다른 영향을 미칠 것이다. 따라서 컴퓨터를 사용한 증명과 관련된 활동이 고등학생에게는 어떤 영향을 미치는지에 대한 연구가 필요할 것이다. 현재, 동적기하가 중학생에 미치는 영향을 분석한 연구는 조완영(2000)과 Daniel Scher(2002) 등이 있고 초등학생에 미치는 영향을 분석한 연구는 권성룡(2001)등이 있지만, 동적기하가 고등학생의 기하개념 형성이나 문제해결에 미치는 영향을 분석하는 논문은 부족한 실정이다.

컴퓨터가 도입된 오늘날 증명의 역할과 의미에 대하여 종래의 관점과는 상당한 변화가 있다. 먼저 철학적 관점으로 분류하면, 절대주의에서 증명의 본질은 수학명제가 참임을 밝히는 수단으로 인식한다. 준경험주의에서는 증명을 발견의 수단으로, 그리고 사회적 구성주의 관점에서는 확신과 이해의 수단으로 파악하고 있다.(나귀수, 1998) 역사 발생적 관점에서 Branford는 증명을 실험적 증명, 직관적 증명, 학문적(수학적) 증명의 세 가지 종류로 구분하고, 수학의 역사적 발전 과정에 비추어 볼 때, 증명의 학습도 이러한 과정을 거치는 것이 자연스럽다고 주장한다(권석일, 2006, pp.128). 실제로, 실험적인 증명 활동이나 직관적 증명을 생략한 채,

* 2007년 8월 투고, 2007년 8월 심사 완료
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 원뿔곡선, 동적기하, 문제해결

대수적인 접근만 강조한 원뿔곡선에 대한 교수-학습은 오개념을 일으키는 원인이 된다(홍성관 · 박철호, 2007).

그러므로 증명과 관련된 문제해결에서 구성주의적 관점을 적용할 필요성이 제기된다. 구성주의적 관점에서는 "문제 해결을 위한 물리적 구성과 정신적 구성을 어떻게 이룰 것인가?"가 중요하다(Kafai & Resnick, 1996). 이는 역사 발생적 관점의 문제 해결과정인 실험적 풀이와 직관적 풀이, 그리고 수학적 풀이와 일맥상통하는 것이다. 따라서 동적기하를 사용하여 물리적 구성을 통한 정신적 구성이라는 학습방법은 문제해결에 어떤 영향을 미치는가? 또는 동적기하를 사용한 실험적 풀이와 직관적 풀이는 문제 해결에 어떤 영향을 미치는지에 대한 분석의 필요성이 제기된다.

2. 연구의 목적

Polya(1956)의 문제해결이론은 오늘날 문제해결의 이론적인 기반이 되고 있다. 하지만 이것을 학교교육에 적용하면서, 특히 기하와 같이 증명과 관련된 문제 해결에 적용할 때, 고려되어야 할 점은 무엇인지 등은 아직도 미해결과제로 남아 있는 실정이다. 또한 원뿔곡선에 대하여, Van Hiele(1986)의 '기하사고수준이론'이나 추론의 지도 수준을 학생들에게 어떻게 적용할 것인가에 대한 연구는 미진한 수준이다. 따라서 이 연구의 목적은 고등학교 기하 영역의 한 갈래인 원뿔곡선 단원에서 동적기하가 학생들의 문제해결에 미치는 영향을 분석하여 교수-학습 방법을 개선하는데 있다. 이와 같은 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

첫째, 동적기하는 학생들이 원뿔곡선 문제를 해결하는데 어떤 영향을 주는가?

둘째, 동적기하를 이용한 문제해결은 구성주의적 수업 방식에 어떻게 부합하는가?

셋째, 동적기하를 이용한 수업에서 학생들의 문제해결력 향상을 위한 교사의 역할은 무엇인가?

Ⅱ. 문제해결 및 기하 교수학습에 관련된 이론적 배경

1. Polya의 문제해결과 역사 발생적 관점

"수학은 두 얼굴을 갖는다. 수학은 유클리드식의 엄밀한 과학이지만, 동시에 그와 다른 무엇이기도 하다. … 그러나 구성 도중에 있는 수학은 실험적이고 귀납적인 과학으로 보인다. … 두 번째의 측면은 어떤 관점에서 본다면, 새로운 것이다. 발명되고 있는 과정에 있는 수학이 바로 그 방식 그대로 학생 또는 교사에게 제시된 적이 없다(Polya, 1956, pp. vi)."

위의 글에서, Polya(1956)는 문제 해결을 발견술이라는 관점에서 접근하고 있지만, 동시에 역사 발생적 원리라는 관점에서도 접근하고 있음을 알 수 있다.

Polya는 문제 해결을 위하여 사고의 주요한 4단계를 설정하고 있는데 요약하면 다음과 같다. 첫째, 문제를 「이해」하여야 한다. 곧, 구하는 것이 무엇인지를 분명히 알아야 한다. 둘째, 여러 가지 사항들이 어떻게 관련되는지, 또한 미지의 것이 자료와 어떻게 연결되는지를 알아내어 풀이에 대한 착상을 하고 「계획」을 세워야 한다. 셋째, 우리의 계획을 「실행」하여야 한다. 넷째, 완성된 풀이를 뒤돌아보고 다시 검토하며 논의하여야 한다. 이는 오늘날 고등학생의 문제 풀이가 유사성과 유형에만 의존하는 현실에 많은 시사점을 준다.

2. 기하 학습에서 수준 이론

네덜란드의 교육자 Van Hiele(1986) 부부는 자신들이 지도하고 있는 학생들이 기하학습에 곤란을 겪고 있음에 주목하여 그 원인을 분석하여 '기하사고수준이론'을 제시하였는데, 요약하면 다음과 같다.

1수준: 시각적(Visual) 수준: 학생들은 그것들의 기하학적 조건이 아니라 무엇보다도 모양에 근거해서 대상을 인식한다.

2수준: 서술적/분석적(Descriptive/Analysis) 수준: 학생들이 기하학적 대상을 그것들의 모양을 제외하고, 그것들의 조건에 근거해서 서술한다.

3수준: 추상적/관계적(Abstract/Relational) 수준: 학생들은 기하학적 대상의 조건을 사용하여 그것들을 계층적으로 분류한다.

4수준: 형식적인(Formal) 서술 수준: 학생들은 공리적인 체계로 증명을 구성할 수 있다.

5수준: 엄격함/수학적(Rigor/Mathematical) 수준: 학생들은 다른 공리적 체계를 비교하여 공식적인 추론에 적용한다.

이러한 사고 수준이론에 따르면 학생들은 $n-1$수준을 통과하지 않고 n수준을 통과할 수 없고, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다고 Van Hiele(1986)은 주장한다.

Van Hiele(1986)은 학생들의 수준 상승을 위해서 정보제공→ 지정된 탐구→ 설명→ →자유로운 탐구→ 설명→ 통합의 다섯 단계로 이루어진 지도 과정을 제시하였다. 학생들의 수준 상승을 위해서는 교사의 일방적인 설명보다는 학습자의 스스로의 탐구 활동이 가장 중요하다고 강조하였다(Van Hiele, 1986). 이러한 주장은 학생의 기하 문제해결에도 많은 시사점을 줄 것으로 예상한다.

Freudental(1973)은 Van Hiele(1986)의 제1수준에 해당하는 초기 수준을 바닥 수준(bottom level)이라고 했으며, 이러한 바닥수준으로부터 점진적 '수학화'를 주장하며, 바닥수준을 무시하는 것이 전통적인 수학교육의 오류라고 했다. 바닥수준에서 활동을 탐구 수준(research level)의 활동과 구분하여 비수학적인 활동으로 보아서는 안 되며, 실제 수학을 하는 것은 아니지만, 탐구 수준에서 수학을 할 준비를 하는 예비 수학적 활동으로 보고 있다. 학생의 학습과정은 이와 같이 바닥수준의 활동이 탐구 수준에서 반성됨으로써 비로소 수학이 시작되는 것이며, 이것이 필수적인 것이라고 주장했다(Freudental, 1973 p127-130). 따라서 Van Hiele(1986)의 '기하학습수준이론'은 '수학화' 학습의 방법적 기초 이론으로서 의미를 가질 수 있다.

그러나 Freudental의 관점에서 생각하면 수준은 거시적인 것이라기보다는 미시적인 것이다. 그는 개별적인 학습의 과정에서 드러나는 불연속성을 3-4개의 수준에 따라 구분하여 설명할 수는 없으며, Van Hiele(1986)의 수준은 뚜렷하지만, 너무 광범위한 기하학적 사고를 포괄한다고 본다. 반성을 학습과정의 비약의 원인으로 볼 때, 학습과정에서 명백한 반성이 나타나는 만큼의 많은 불연속성과 수준이 나타난다(Freudental, 1991, pp101). 따라서 Freudental이 제시하는 수준이론은 거시적인 수준의 비약을 위해서는 Van Hiele(1986)의 한 수준 내에서도 여러 개의 수준으로 나누어질 수 있으며, 수준의 상승도 이루어질 수 있음을 의미한다고 할 수 있다. 그렇다면, Van Hiele(1986)의 '기하학습수준이론'의 3-4수준에 해당하는 고등학교 기하 수준 내에서 미시적인 수준의 구분은 어떻게 가능할까 하는 의문이 생긴다. 이 질문에 대한 해답의 실마리는 Branford의 주장에서 찾을 수 있다.

3. Branford의 역사 발생적 기하 지도 원리

권석일(2006)에 의하면, 중학교 기하 과정의 증명활동은 Van Hiele(1986)의 3수준에 해당하는데, 증명의 추론적 활동에서 미시적인 수준을 나누는 데에는 Branford의 실험적 증명, 직관적 증명, 수학적 증명이라는 관점이 도움이 될 수 있다고 주장한다. 이것은 고등학교 기하과정에도 적용될 수 있을 것이다. 이런 이유로 Branford의 주장을 더욱 자세히 살펴볼 필요가 있다.

Branford는 증명을 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계를 거쳐서 발전되었다고 보고 있다(권석일, 2006, p72). 첫째, 실험적 증명은 타당성의 근거를 주로 감각적 지각에서 찾고 있지만, 이를 통하여 일반적인 사실을 유추할 수 있다는 사실에서 생산성을 찾을 수 있고, 실험적 입증이 명제의 본질을 정당화 할 수는 없지만, 증명의 본질을 이해시키기 위해서는 반드시 이 단계를 거쳐야 한다고 주장한다. 둘째, 직관적 증명은 감각적 경험에 의존하지만 일반성을 가지는 단계이다. 예로써 직사각형은 두개의 삼각형으로 나누어진다는 사실을 인지하는 것을 들 수 있다. 셋째, 수학적 증명은 일반성이 확보된 사실들이 상호 연결되는 체계

화를 의미하는데, 공리나 다른 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 증명이 여기에 해당한다. 따라서 증명과 관련된 문제해결에서도 위와 같은 관점으로 문제에 접근하는 것이 필요할 것이다.

마지막으로 위의 4가지 이론에 근거한 교수-학습을 구체적으로 실행하려면, Vygotsky의 '근접발달영역(ZPD: zone of proximal development)'이론에 대한 간단한 점검이 필요하다.

4. Vygotsky의 '근접발달영역(ZPD)'이론

Vygotsky는 러시아의 유태계 심리학자이자 교육학자이다. 그의 이론은 냉전시대에는 잘 알려지지 않았다가, 1970년대부터 미국에서 많은 연구가 진행되었다. 우리나라에서 그의 이론을 적용한 수학학습지도방안은 주로 초등학생을 대상으로 진행되었으며(권성룡, 2001; 반은희, 2002; 곽혜진, 2003 등), 중학생을 대상으로 한 연구는 거의 없는 수준(김동수, 2002; 김성경·이동원, 2005)이고 고등학생을 대상으로 한 연구는 아직 찾기가 힘든 실정이다.

권성룡(2001)과 김성경·이동원(2005)의 연구를 살펴보면, Vygotsky이론의 핵심은 '근접발달영역(zone of proximal development)'과 '비계설정(scaffolding)' 의 개념이다. 먼저 '근접발달영역'은 아동이 독립적으로 문제를 해결하는 실제적 발달 수준과 성인의 안내나 더 유능한 동료와의 협동을 통해서 문제를 해결하는 잠재적 발달수준 사이의 간격을 말한다(Wretch, 1995). 따라서 Vygotsky는 교수학습이 근접발달 영역 안에서 일어나야 하며, 교사의 역할은 이미 획득한 정신적인 조작을 길러내기 위한 과제를 지도하는 것보다는 아동들의 근접발달영역에 있는 과제를 지속적으로 제공해주어야 한다고 주장했다.

'비계설정(飛階設定)(scaffolding)'은 비코츠키 교육이론을 발전시킨 우드와 브루너·로쓰(Wood; Bruner & Ross)가 소개한 개념으로써, '비계설정'이란 사전적 의미로는 건물의 지지대를 세우는 것이며 학습자의 이해를 돕기 위한 지지대를 세우는 것이다. 즉, 교사는 학습자에게 새로운 과제가 주어졌을 때는 많은 도움을 주고, 학습자의 능력이 증가할 때, 도움을 줄여가는 것이다(Wood; Bruner & Ross, 1976). 비계설정을 통한 학습은 중학생의 수학 성취도와 태도에 긍정적인 변화를 줄 수 있다고 한다(김성경·이동원, 2005). 따라서 비계설정을 통한 교수학습이 동적기하 수업에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구방법 및 연구 대상자 선정

이 연구의 목적은 고등학교 기하 영역의 한 갈래인 원뿔곡선 단원에서 동적기하가 학생들의 문제해결에 미치는 영향을 분석하여 교수-학습 방법을 개선하는데 있다. 교사 자신이 연구자가 되어 긍정적인 교육방법의 변화를 이끌어 내는 연구를 전통적인 연구와 구분하여 실행연구(action research)[2]라고 한다. 실행연구는 보통 질적 연구방법을 선택한다(Geoffery E. mills, 2005).

질적 연구는 사람들이 세상을 어떻게 이해하며, 그리고 이 세상에서 습득한 경험을 어떻게 이해하는지에 관심이 있다(Merriam, 1997). 즉, 동적기하가 고등학생들의 기하 학습에 어떤 영향을 미치는지를 탐구하기에는 질적 연구 방법인 사례연구가 타당하므로 본 연구는 연구방법으로서 사례연구의 방법을 채택하였다. 질적 연구에서는 연구자가 연구하고자 하는 사건, 과정 등에 대하여 접근할 수 있는 의도적인 사례를 선정한다(Merriam, 1997).

본 연구는 동적기하가 문제해결에 미치는 영향을 분석하는 목적을 가지고 있음으로 선정기준은 수학성적이 될 수밖에 없다. 그 이유는 문제해결 자체가 불가능한 학생에게서는 적절한 사례 수집을 할 수 없기 때문이다.

연구대상자는 부산에 소재한 인문계고등학교 2학년

2) 'action research'는 주로 '현장연구'로 번역되었으나, 우리나라에서 현장 연구는 주로 승진을 위한 수단이 되고, 현장개선과 관계없는 과학성에 얽매이면서, 부정적인 이미지를 갖게 되었다. 이와 차별하기 위하여 '실행연구'라는 새로운 번역어가 등장하였으며, 현장연구가 주로 실증주의적 연구 전통에 사로잡혀 있다면, 실행연구는 긍정적인 교육의 변화를 이끌어내기 위하여 질적 연구의 경향성을 가지고 있다(Geoffery E. mills, 2005. pp21).

자연반 학생 4명이다. 이들은 2학년 보충수업과 본 수업과정에서 원뿔곡선 단원을 배웠고, 학기말 고사에서 원뿔곡선 문제를 시험 본 학생이다. 연구 대상자의 선발은 2학년 자연반 학생 가운데 연구취지에 동의하는 학생을 모아서 성실하게 연구에 참여하며 연구동의서에 본인의 서명을 한 학생이다. A, B학생은 평소 수학 수업에 매우 적극적이고 자신의 의견도 잘 표현한다. C, D 학생은 매우 성실하게 노력하지만 수학적 이해력은 다소 떨어지는 학생이다. 하지만 자기의 생각이나 의견은 항상 분명하게 말하는 성격이다. 교육과정평가원에서 실시하는 학력평가에서는 수학성적 평균이 2-3등급인 학생이 2명(A, B)이고 2-4등급인 학생이 2명(C, D)이다. 연구 참여 학생 가운데 남학생이 2명이고 여학생도 2명이다.

2. 연구절차 및 검사과제

예비연구로서 2006년 8월 여름방학 기간 중에 방과후 활동으로 8명의 학생과 동적기하를 이용한 문제해결 및 증명활동에 대한 실험수업을 실시하였다. 이 예비연구를 바탕으로 2007년 2월에 학생들의 희망과 수학성적을 기준으로 4명의 학생을 선발하여 2007년 2월 22일부터 4회에 걸쳐서 동적기하를 이용한 문제해결 및 증명수업을 컴퓨터실에서 실시하였다. 이 과정을 두 대의 비디오 카메라로 녹화하였다.(한대는 직접 촬영했으며, 한대는 고정시켰고 촬영은 동료 연구자의 도움을 받았다.) 학생들의 문제해결 방법을 이해하기 위하여 반구조화된 면담기법을 사용하였다.

전체적인 수업내용은 평소의 수업 시간에 다루기 어려운 수행평가과제, 예컨대, 종이접기로 타원 만들기, 이를 컴퓨터에 적용한 타원의 작도, 그리고 시험에 자주 나오는 문제들로 구성하였다. 문제들은 고등학교 교과서의 수행평가에 나오거나, 원뿔곡선의 정의와 그 활용에 관련된 문제들이다. 본 연구에서 분석된 내용은 4회의 수업 중에서 2회째 수업내용과 4회 수업의 일부분으로서 주로 포물선과 관련된 내용이다. 1회 수업은 GSP 사용법 등이 들어가 있고, 연구자의 미숙함으로 촬영내용을 잘 잡지 못하여 분석하기 곤란하므로 연구대상에서 제외하였고, 3회 4회 수업내용은 현재 분석중에 있다. 본 연구에 사용된 2회 수업 은 60분 예상으로 실행하였으나 실제 80분 정도 진행되었으며, 검사과제로 사용된 학습지는 <부록1>에 수록되어 있다. 본 연구에서 사용한 학습지 내용은 Scher(2002)의 Exploroing Conic Sections의 2장(포물선)의 3절(접혀진 사각형 작도)과 선행연구(홍성관 · 박철호, 2007)와 교과서(금성사)를 참조하여 구성하였다.

이 글에서 '동적기하' (Dynamic Geometry Software)의 의미는 GSP, CabriⅡ와 같은 소프트웨어를 뜻하며, 본 연구에서 사용된 프로그램은 GSP(Geometer's Sketchpad 4.0)이다. 2000년대 초기에는 동적기하를 주로 '탐구형 소프트웨어'로 번역하기도 했지만(조완영, 2000; 권성룡, 2001; 황우형 · 차순규, 2002), 김민정(2004), 김화경(2006)의 논문과 Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998)와 Daniel Scher(2002) Finz & Jackiw (1998) 등의 논문을 참조하여 '동적기하'로 번역하였다.

이 글에서 '원뿔곡선'의 의미는 x, y에 대한 이차 방정식의 그래프이다. 그 이유는 이 그래프가 원뿔의 절단면에서 유래되었기 때문이다(Gordn, 1980). 한편, $F(x,y)=0$이 x, y에 관한 n차 방정식일 때, $F(x,y)=0$가 그리는 도형을 n차 곡선이라고 부른다(강수철 외 4인, 2002). 따라서 x, y에 대한 이차방정식의 그래프는 이차곡선이라고 할 수 있다. 즉, 이차곡선과 원뿔곡선은 같은 의미로 사용될 수 있다. 하지만 이차곡선의 성질은 대수적으로 접근하기가 매우 어렵고 기하학적으로 증명하는 것이 보다 쉽다(홍성관 · 박철호, 2006). 따라서 이 글에서는 기하학적 의미를 강조하기 위하여 '원뿔곡선'으로 표현하였다.

3. 자료수집 및 분석

본 연구에 수행한, 총 4회의 실험수업 내용의 대부분을 촬영하여 컴퓨터에 파일로 저장하였으며, 실험수업에는 4종류의 학습 활동지를 제작하였으며, 그 중 2회의 내용과 4회 내용의 일부를 <부록1>에 제시하였으며, 수업 후 학생들과 간단한 대화를 나누었으며, 학생들의 소감문을 연구자의 학교 홈페이지에 올리게 하였다. 따라서 1차적인 자료는 수업 장면이 담긴 컴퓨터

영상파일과 학생들이 작성한 학습 활동지, 학생들이 올린 수업소감문과 반구조화된 면담기록이다.

이를 본 연구의 연구문제와 관련하여 4가지 범주로 나누어 분석하였다. 첫째, 동적기하가 학생들의 문제해결에 미치는 영향을 파악하기여 '수학적 오개념'(김부미, 2006)과 Branford의 '역사 발생적 기하지도 원리'라는 2가지 범주를 사용하였다. 둘째, 동적기하가 구성주의 수업 방식과 부합하는가를 파악하기 위하여 물리적 구성과 정신적 구성이라는 범주를 사용하였으며, 셋째, 동적기하에서 교사의 역할을 파악하기 위하여 Vygotsky의 '비계설정'이라는 범주를 사용하여 1차 자료를 분석하였다.

Ⅳ. 사례분석 및 논의

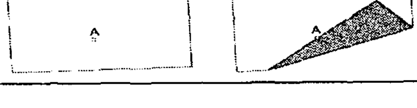
1. 종이(A_4용지) 접기를 통한 포물선 작도에서 증명문제 해결과정

(1) <문제 1-1>에 대한 진술

<표Ⅳ-1, 문제1-1의 맥락>

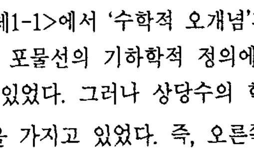
<문제 1-1>

1. 점A를 A_4종이 바닥에서 대략 2.5cm 정도 떨어진 지점과 왼쪽과 오른쪽에서 볼 때 중앙인 지점에 표시하여라.
2. 아래 그림에서 보이는 것처럼, 종이를 접어서 밑바닥이 점A에 겹쳐지도록 하여라. 접혀진 선으로 날카로운 주름이 남아있도록 하여라.
3. 밑바닥의 다른 점들이 점A에 겹쳐지도록 종이를 접고 새로운 주름을 남겨라. 종이를 펼치고 이 과정을 반복하여라.
4. 12개 정도의 주름을 만든 후에, 그것들을 조사하여 무엇인가 떠오르는 모양을 밝혀라.



교사(연구자): 포물선이 되는 이유를 학생(A)가 먼저 말해보렴

학생A: 이 점(A)과 이점(B)의 거리가 같고요.
교사: 왜 같지?
학생A: 수직이등분선이니까요.
교사: 어떤 선이 수직이등분선이지?
학생A: 이 선이요.(접은 선이니까 수직이등분선이 될 거예요)
교사: 음, 그래서
학생A: 그래서 이선($\overline{AP}$)과 이선($\overline{BP}$)의 길이가 같아요. (<그림Ⅳ-1> 참조)
교사: 잘 했다. A가 잘 이해하고 있구나. 다음부터는 이 점 이선 하지 말고 점A, 점B와 같이 이름을 붙여라. 학생C가 한번 설명해볼래
학생C: 잘 모르겠어요. (일동 웃음)
교사: 학생D가 설명해볼래
학생D: 이 선($\overline{AM}$)과 이선($\overline{BM}$)이 길이가 같으니까 포물선이에요.
교사: 왜 같지?
학생D: 이 선이 접은 선이 되니까요. 이 삼각형(△AMP)과 이 삼각형(△BMP)이 합동이니까요.
교사: 포물선의 정의가 무엇이지?
학생D: 한 점(A)와 직선(밑변) 사이의 거리($\overline{AM}$과 $\overline{BM}$)가 같다는 것이어요.
교사: 그래. 음...(생략)
(학생은 포물선의 정의는 정확하게 진술을 하지만, 증명의 구성은 이와 일치하지 않음. 종이의 접선이 많아 착시에 의한 것인지 오개념인지 불분명했음.)



<그림Ⅳ-1 종이 접기에서 포물선 증명>

(2) <문제1-1>에서 '수학적 오개념'과 극복과정

학생A는 포물선의 기하학적 정의에 대한 정확한 해석을 하고 있었다. 그러나 상당수의 학생들은 학생D와 같은 생각을 가지고 있었다. 즉, 오른쪽 그림에서 $\overline{AM}$과 $\overline{BM}$의 길이가 같음을 보이는 것이 이 도형이 포물선임을 증명하는 과정이라고 생각한다. (홍성관, 박철호, 2007) 실제로는 $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$가 같음을 보여야 한다.

위의 오개념은 <문제1-2>와 같은 문제의 해결 과

정에서 장애를 일으키는 요인이 됨을 학생들과의 반구조화된 면담과 수업장면을 관찰한 결과로 확인할 수 있었다. 하지만, 이러한 오개념은 다음에 나오는 <문제2>에서 GSP로 점B를 움직였을 때 곧바로 수정할 수 있었음을 학생들의 학습지와 태도관찰로써 확인할 수 있었다.

이러한 사실은 Branford가 주장한 실험적 풀이(증명)→직관적 풀이(증명)→수학적 풀이(증명)가 고등학교 기하 영역의 교수-학습에서도 시도되어야 함을 의미하는 것이다. 따라서 Freudental(1991)이 제시하는 수준이론, 즉 거시적인 수준의 비약을 위해서는 Van Hiele의 한 수준 내에서도 여러 개의 수준으로 나누어질 수 있으며, 수준의 상승도 이루어질 수 있다는 것을 의미한다고 할 수 있다. 즉, 고등학교의 기하영역이 Van Hiele(1986)의 3-4수준에 있다하더라도, 미시적인 수준으로서 실험적 관찰(혹은 풀이)가 필요하며, 실험적 관찰이 공리적(수학적) 증명(풀이)의 기초가 됨을 의미하는 것이다.

(3) <문제 1-2>에 대한 진술

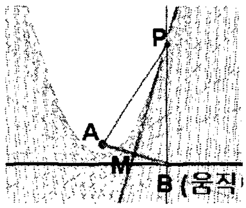
<표IV-2, 문제1-2의 맥락>

<문제 1-2> <문제1-1>에서 점A가 사각형의 위쪽으로 올라갈 때, 포물선의 모양은 어떻게 될 것인가?

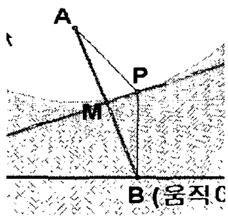
교사(연구자): 점A가 위쪽으로 올라가면 포물선의 모양이 어떻게 될까?
학생C: 크기가 변할 거예요.
교사: 무슨 크기?
학생(C와 D 동시에): 폭(포물선의 폭)
교사: 만약에 위로 올라가면 어떻게 될까?
학생B: 폭이 좁아질 것 같아요.
교사: 만약에 점A가 아래로 내려간다면?
학생: (B와 C, D 동시에) 폭이 완만해져요.
교사: 확인을 하려면 종이를 또 접어야 하는데, 시간이 걸리니 GSP로 확인하자.
........(GSP 확인 후)
교사: 우리의 예상과 달리 점A가 위쪽으로 갔을 때, 폭이 좁아지고,...
학생들: 오-...(전부 놀라는 표정)

(4) <문제1-2>에서 제기된 ZPD

<문제1-2>에 대하여 아무도 올바른 예측을 하지 못했던 이유는 수업이후 실시한 반구조화된 면담결과로 확인할 수 있었다. 즉, 접은 선 그 자체가 포물선을 이룬다는 생각과 <그림IV-2>에서 포물선의 자취는 AB의 중점이 될 것이라고 막연히 추측했으며, 이것을 대수적인 방정식과 연결시켜 생각했다면 쉽게 검증할 수 있었지만, 대수적인 방정식과는 연결시키지 못했다는 것이다.



<그림IV-2, 점A가 아래 쪽인 경우>



<그림IV-3, 점A가 위 쪽인 경우>

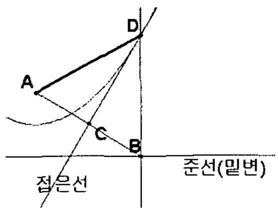
종이접기 상황에서 대수와 기하를 연결시키는 것은 고등학생에게서 Vygotsky의 '근접발달영역(ZPD)'에 해당하는 것으로 보인다. 연구에 참여한 학생들은 수능모의고사 2-3 등급의 성적으로 수학공부를 어느 정도 한다고 평가받는 학생들이다. 하지만 이들은 종이접기 상황을 기하적 상황으로만 해석하였고, 대수적으로 연결하는데 실패하였다. 따라서 종이 접기 상황에서 대수적(해석기하적) 표현을 상기시키는 것은 '근접발달영역'에 해당하는 것으로 보인다. 그리고 점A의 표상을 포물선의 초점좌표 p에 대응시키는 것은 Vygotsky의 교육이론을 발전시킨 우드·브루너·로쓰(Wood; Bruner & Ross, 1976))가 소개한 '비계설정(scaffolding)'의 개념에 해당하는 것으로 해석할 수 있을 것이다.

2. GSP를 사용하여 작도한 자취가 포물선임을 증명하는 과정

<표IV-3, 문제2의 맥락>

<문제2> (GSP작도)

1. GSP로 선(밑변)을 하나 작도한다.
2. 밑변 위의 적당한 위치에 점A를 찍는다.
3. 밑변 위에 선분 위의 점B를 작도한다.
4. 선분 AB의 수직이등분선(접은 선)을 GSP로 작도한다.
5. 점B를 지나고 준선에 수직인 직선을 GSP로 작도한다.
6. 점B를 지나는 수선과 접은 선의 교점을 D라고 한다.
7. 점B를 이리저리 움직이면서 점D의 자취가 포물선임을 증명하여라.



(1) <문제2>에 대한 진술

교사: 점B를 이리저리 움직여 보면 포물선이 만들어졌다는 것을 알 수 있겠니?

학생전체: 예

교사: 우리가 만든 도형이 포물선이라면 무엇을 증명해야하지?

학생C: $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 길이가 같은 것을 ....

교사: 그러면 점B를 움직이면서 점C가 포물선 위를 움직이는지 확인해보자.

(학생C 점B를 이리저리 움직여 점C가 포물선 위의 점이 아니라는 것을 확인 한 후)

학생C: 아닌 것 같아요.

교사: 그러면 무엇이 같아야 하지?

학생C: $\overline{AD}$와 $\overline{BD}$인 것 같아요.

교사: 측정메뉴로 $\overline{AD}$와 $\overline{BD}$의 거리를 확인해보자.

학생전체: (직접 측정한 후) 같아요.

교사: 직접 재어보았다는 것은 증명이 될 수 있나? 우연의 일치로 같으면 어떻게 하지?

학생C: 증명이 될 수 없는 것 같은데...

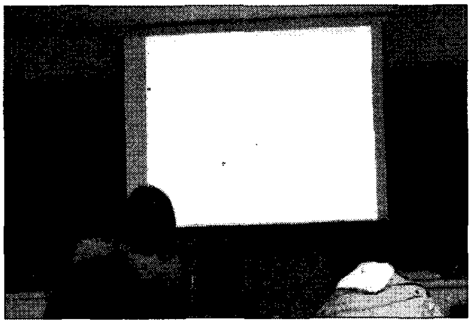
교사: 그럼 어떻게 증명해야지

학생C: 음..

교사: 그렇다면 약간의 힌트를 주지. 학습 활동지와 같은 순서로 증명할 수 있겠니?

학생C: 한번 해볼게요.

교사: 좋아, 틀려도 되니 한번 시도해봐.



<그림IV-4, 문제2를 탐구하는 장면>

(2) 구성주의 관점으로 분석한 <문제2>상황

실제 수업에서 학생들은 이런 문제를 매우 어려워한다. 이와 유사한 내용을 문제로 출제했을 때, 수능시험에서 수리영역'가'를 선택할 학생 50명 중에 6명만 풀었다(홍성관 · 박철호, 2007).

하지만 연구에 참여한 학생들의 답을 보면 알 수 있듯이 4명의 학생은 특별한 설명 없이 학습지의 순서대로 증명에 도달할 수 있었다.(<부록2>참조) 학생들이 이렇게 쉽게 문제를 풀 수 있었던 것은 종이접기와 GSP 작도를 통하여 물리적 구성이 이루어졌기 때문에 정신적 구성을 쉽게 할 수 있었다고 해석할 수도 있을 것이다. 또한, 문제지가 Polya의 문제해결 4단계이론에 알맞게 구성되어 있음도 한 요인이 될 것이다. 사고과정을 중시하는 Polya의 이론이 고등학교 수업현장에 적용될 수 있음을 의미하는 것이다.

수업 초기의 학생C나 학생D와 같이 잘못된 추론의 원인은 포물선에 대한 오개념에서 기인한다. 학생들은 오개념이나 오류를 고치기 위하여 유사한 문제를 반복해서 풀려고 하지만, 이런 방법으로는 오개념은 잘 수정되지 않는다(박선화, 2000). 그러나 동적기하의 기능으로 즉각적인 반례를 확인할 수 있다는 것은 매우 중

요한 시사점을 갖는 것이다.

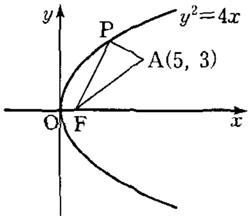
한편 이것은 "사람들이 이미 가진 개념보다 더 높은 차원의 개념은 정의에 의하여 서로 의사소통할 수 없으며, 그들이 경험한 적절한 예들을 함께 모음으로써 가능하다(Richard R. Skemp, 1987, pp.43)."는 주장을 확인시켜주는 예이다.

3. 포물선에서 GSP를 사용한 최단거리 문제해결과정

<표 IV-4, 문제3의 맥락>

<문제3>

아래 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점을 F라 할 때, 점 A(5, 3)과 이 포물선 위의 임의의 점 P에 대하여 △APF의 둘레의 길이의 최소값은?



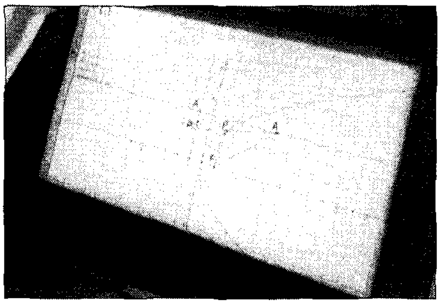
(1) <문제3>에 대한 학생B의 독특한 진술

연구자는 학생들과 함께 GSP 메뉴의 그래프 그리기로 $y^2=4x$그래프를 그리고, 좌표를 입력하여 점찍기 메뉴로 점A(5,3)와 초점 F(1,0)을 작도하였다. 이 후에 포물선 위의 임의의 점P를 작도한 후 $\overline{AF}$, $\overline{PF}$, $\overline{AP}$의 거리를 측정하였고 그 합을 계산하게 하였다. 이 후에 점P를 이리 저리 움직여 보면서 △APF의 둘레의 길이가 최소가 되는 점P의 위치를 찾게 하였다

교사: (학생B에게) 점P가 어느 지점에 있을 때, 최소가 되는 것으로 보이니?

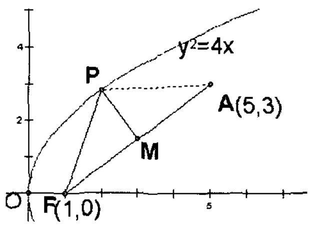
학생B: 오른쪽 그림과 같이 △APF가 이등변삼각형이 될 때가 아닌가요?

교사: 이등변삼각형? 왜 그렇게 생각하지?



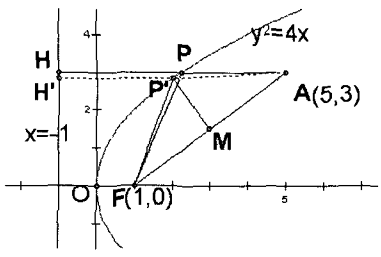
<그림 IV-5, 문제3을 탐구하는 장면>

학생B: 그림으로 보니 대략 그런데, 음... 산술평균 기하 평균 때문이 아닐까요?



<그림 IV-6> 학생B의 풀이

교사: 산술평균 기하 평균이라 (순간적으로 당황했음.) 음... 좋은 생각인데, 직접 확인해볼까? ...(GSP로 이리저리 확인 한 후) 화면(<그림 IV-7>)을 보면 아닌 것 같은데...△APF가 최소인데. 무엇이 모순이지. 왜 산술기하평균을 떠올렸지?



<그림 IV-7> 정확한 풀이

학생B: 길이는 양수이고 양수인 경우에는 산술기하 평균을 쓰면 거의 문제가 풀리는데, 이 때 최대 · 최소는 대체로 등호가 성립하는 경우이거든요.

교사: 그래 나중에 확인하지. 그런데 산술평균과 기하평균에서 합의 최소값은 곱이 일정한 값을 가질 때이거나 곱의 최대값은 합이 일정할 때인데 여기서는 곱이 일정하다는 단서 조항이 없기 때문에 적용하기 곤란한 거야.

학생B: 아 그렇군요

(2) <문제3>에서 학생들의 최종진술

교사: 문제를 풀었니?

학생C,D(동시에): 솔직히 어떻게 풀어야 할지 모르겠어요.

교사: 그럼 약간의 힌트를 줄까?

학생들: 예

교사: $y^2 = 4x$의 준선의 방정식은?

학생들: $x = -1$이지요.

교사: 그럼 그것을 화면 위에 그림으로 표현해봐 (교사는 잘 안 되는 학생들에게 도와주었고, 학생들은 직선($x = -1$)을 화면 위에 그렸음.)

교사: 다 되었니?

학생들: 예

교사: 직선$x = -1$을 지정하고 나서 점A도 지정한 후 작도 메뉴에서 수선을 작도해봐

그리고 직선 점A와 직선$x = -1$과 만나는 교점을 H'이라 하고 선분AH와 포물선의 교점을 P'이라고 한 뒤에, 점P에서 $x = -1$에 내린 수선의 발을H라고 하자. 이제 점P를 움직이면서 $\triangle APF$의 둘레의 길이를 관찰해봐. (<그림Ⅳ-7>참조)

…………(잠시 후) ……이제 알겠니?

학생C: 이제 알 것 같아요.

교사: 그럼 풀이과정을 설명해보렴?

학생C: (화면 위의 선분을 손으로 가리키면서) 이것($\overline{AF}$)의 크기는 변하지 않으니까 이것과 이것의 합($\overline{AP}+\overline{PF}$)이 최소가 되면 되는데. 포물선의 성질에서 이 길이는($\overline{PF}$) 이 길이 $\overline{HP}$와 같기 때문에 이것의 합($\overline{AP}+\overline{PF}$)은 이것과 이것의 합($\overline{AP}+\overline{PH}$)이 되고 이 때 이것의 합($\overline{AP}+\overline{PH}$)은 직선이 될 때가 가장 작아요.

교사: 솔직히 선생님이 준선과 연결시켜 생각할 것을 말하지 않았다면, 이 문제를 풀 수 있었을까?

학생C: 못 풀었을 거예요.

교사: 좋아 이렇게 풀 때와 좋았던 점은 무엇이지?

학생C: 움직여 보니까. 직접 움직여 보면서(길이를 비교해보니까) 이해하기가 쉬웠던 것 같아요.

교사: A너는 제일 먼저 풀었는데 계산이 약간 틀렸구나? ($\overline{AF}$의 길이에 대한 계산이 실수로 틀림)

학생A: 이 전에 이런 문제를 참고서로 풀어본 적이 있어서

교사: 지금과 그 때의 차이는?

학생A: 예. 참고서를 보고 풀 때는 처음에 헤매다가, 답지 보고 했는데요.(풀었다.) 답지의 답도 이랬는데 정답의 직선 하나와 (여러 개의 선을 주지 않고)다른 선 한개만 더 줘서 막연히 이해했는데 이제 완전히 이해한 것 같은데요,

교사: B는 앞에서 이등변 삼각형이라고 했는데 이제는 이해가 되니? 이등변 삼각형은 왜 안 되는지는 나중에 이야기하자.

학생B: 예, 이등변 삼각형이 아니라는 것도 알겠고, 이제 완전히 이해가 되요.

교사: 혹시 참고서에서 이 문제를 풀어본 적 있니? 이 문제는 항구에서 도로를 건설할 때 최단 거리등의 문제로 많이 나오는데. 그 때와 차이점은?

학생B: 문제집을 보면 그냥 글자만 있어 뭔 말인가 싶지만 그냥 풀이를 따라가 외우기만 해요. 이제 이런 경우, 저런 경우 정확하게 비교하니까 훨씬 머리에 잘 들어오고, 완전히 이해한 것 같아요.

교사: D는 풀어본 기억이 있니?

학생D: 시험기간에 공부하면서 푼 기억은 나는데요. 처음에는 잘 풀지 못했어요.

교사: 그 때와 지금 이렇게 공부하는 것의 차이점은?

학생D: 그냥 그러려니 했는데요. 아무래도 눈으로 보면서 이렇게 하니까 이해가 잘 되지요. 이제 완전히 이해가 가는 것 같아요. 이제 이런 문제는 잘 풀 수 있을 것 같아요.

(3) Branford와 Vigotsky의 관점으로 분석한 <문제 3>의 해결과정

<문제3>은 학생들이 매우 어렵게 생각하는 문제 중의 하나이다(홍성관・박철호, 2007). 본 연구에서도 학생A를 제외하면 스스로 정답에 이르지 못했다. 그런데 학생A는 문제를 완전히 이해했다기보다는 "기억을 되살려서 문제를 풀었고, 참고서에 나온 답처럼 이렇게 될 것이라고 막연히 생각했다"라고 진술했다. 이것은 학생A도 이 문제를 완전하게 풀지 못했다는 근거가 된다. 그렇다면 이 문제가 학생들에게 어렵게 느껴지는 이유는 무엇일까?

그 원인의 하나는 실험적 해결 방법의 부재이다. 학생A의 진술 "정답의 직선(<그림Ⅳ-7>의 $\overline{AH}$)하나와 다른 선분($\overline{AP}, \overline{PH}$) 만이 제시된 정답에서는 막연히 이해했었다."와 학생C의 진술 "움직여 보니까 이해가 쉬웠다."와 "아무래도 눈으로 보면서 하니까 이해가 잘되지요."라는 학생D의 진술은 학생들이 직접 관찰을 하면서 풀이를 이해했다는 근거가 된다. 이것을 Branford의 관점으로 해석하면, 실험적 문제해결 과정의 부재가 이런 문제의 해결을 어렵게 했다는 증거이다. 다른 말로 하면, 실험적 문제해결의 과정 즉, 길이를 직접 재어보는 과정과 점P를 움직이면서 선분의 길이의 합을 관찰하는 직관적 문제해결의 과정(통찰의 과정)을 경험할 때, 수학적 문제해결을 잘 할 수 있음을 의미하는 것이다. 이것은 "이해의 과정에는 수준이 있고, 이해의 과정에 포함된 수준은 차례로 거쳐야 하며 이를 위해서는 자신의 검증과 타인의 검증을 거쳐야 한다(이종희, 1999, p156)."는 주장과 일치하는 현상이다.

한편, Freudental의 관점으로 이야기하면, '바닥수준'의 활동이 '탐구수준'의 활동의 기초가 되며, 바닥수준을 무시하는 것은 수학교육의 문제점이라고 지적한 것과 같은 맥락이다. 즉, '수학화'는 수준의 불연속적인 상승으로 이루어지는데, 수준의 상승을 위해서는 Van Hiele의 3-5단계 수준 내에서도 미시적인 수준을 나누어 지도해야 한다는 관점을 확인시켜주는 것이다. 이런 의미에서 참고서의 정답, 혹은 정답만을 제시하는 EBS의 방송강의, 문제의 정답만을 설명하는 학교 수업 등은 학생의 이해를 불완전한 상태로 두어 문제해결에 대한 자신감을 결여하게 하는 요인이 될 수 있다.

한편 위와 같은 학생들의 진술은 서동엽(1999)의 연구와 일치하는 것이다. 중학생들은 몇 가지 예에 대한 측정을 통한 정당화를 증명으로 받아들이며, 논리적인 증명보다 측정을 통한 정당화를 더 선호하는 경향이 있다고 한다(서동엽, 1999, p174). 즉, 고등학생들도 증명보다는 실험을 선호하는 경향이 있음을 <문제3>의 해결과정에서 관찰할 수 있었다. 그러나 이것은 또 다른 문제의 소지가 될 수도 있다. 이종영(1999)의 주장과 같이, 기하에서 연역적인 증명이 요구되는 부분까지도 컴퓨터의 구체적이고 시각적인 조작을 통해 귀납적으로 지도하려는(학습하려는) 문제점이 제기될 수도 있다.

<문제3>의 해결에 실패한 또 하나의 이유는 많은 학생들이 포물선 안쪽의 영역에서만 생각을 했기 때문이다. 많은 학생들은 포물선의 바깥 쪽(준선)을 전혀 떠올리지 않았기 때문이다. 따라서 준선과 연결시켜 생각하도록 지도하는 것이 '비계설정'에 해당할 것이다. 다음 진술은 그 증거가 될 것이다.

"교사: 솔직히 선생님이 준선과 연결시켜 생각할 것을 말하지 않았다면, 이 문제를 풀 수 있었을까? 학생C: 못 풀었을 거예요."

한편 지필 환경에서는 정확한 작도가 어려웠기 때문에 준선을 생각했어도 그림을 보고 올바른 직관을 얻기 어려웠을 것이다. 이는 학생B와 같이 잘못된 추론의 근거가 될 수도 있다. 따라서 이 때 동적기하 환경은 구성주의에서 말하는 Micro World에 해당하고, 오늘날 수학교육은 학생들이 활동하기 쉬운 Micro World 즉 동적기하 환경을 제공할 필요가 있다는 주장은 더욱 설득력을 얻을 것이다(조한혁, 2003; 김화경, 2006).

한편 학생A의 진술"기억을 되살려서 문제를 풀었고, 참고서에 나온 답처럼 이렇게 될 것이라고 막연히 생각했다."와 학생B의 진술은 "길이는 양수이고 양수인 경우에는 산술기하 평균을 쓰면 거의 문제가 풀리는데, 이 때 최대・최소는 대체로 등호가 성립하는 경우이거든요"

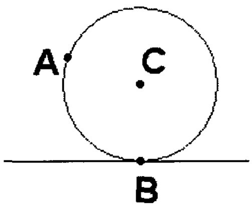
이것은 학생들의 객관적인 풀이나 성취도만으로 학생의 학습능력을 평가할 수 없음을 암시하는 것이다. 이것은 전통적인 성취도 검사들이 아동의 학습능력을 측정하는 타당한 척도가 아니라는 Vygotsky의 주장(Berk & Winsler, 1995)과 일치한다.

실제로 학생B의 주장은 <문제3> 상황에 얼핏 들어맞는 것처럼 보였다.(<그림Ⅳ-7> 참조) 한편, 이와 같은 생각을 밝힘으로써 교사와의 대화를 통해 학생B가 갖고 있는 산술, 기하 평균에 대한 오개념이 정확한 개념으로 수정되는 계기가 되었다. 즉, 아동은 교사와의 협력활동을 통해 학습하고 이런 과정을 통해 아동은 과학적 개념을 점차적으로 내면화한다는 Vygotsky의 주장은 고등학생에게도 적용할 수 있다는 근거가 될 것이다.

실제로 <문제3>에 관한 대수적적인 접근은 $\sqrt{(\frac{y^2}{4}-1)^2+y^2}+\sqrt{(\frac{y^2}{4}-5)^2+(y-3)^2}$ 의 최소값을 구하는 문제이다. 식을 보는 것만으로도 이 문제에 접근이 쉽지 않음을 알 수 있다. 기하는 이렇게 복잡한 문제를 간단하게 해결할 수 있음을 보여주는 좋은 소재가 될 수 있다. <문제3>은 포물선에서 빛의 경로를 역으로 추정하는 문제이다. 빛은 최단거리로 움직이기 때문에, <문제3>을 물리의 관점에서 보면 포물선의 초점에서 입사된 빛은 중심축(x축)에 평행하게 반사된다는 사실이다. 그런데 학생들은 빛이 직진한다고만 인식하였고 최단 거리로 움직인다는 사실을 잘 몰랐다. 이것은 이 논문의 범위를 벗어나므로 논의를 제외한다.

4. 한 직선에 접하고 정점을 지나는 원의 중심의 자취를 구하는 과정

<표Ⅳ-5, 문제4의 맥락>

문제4) 포물선 폴더의 사각형 접기 파일에 있는 '접하는 원.gsp'를 열어라. 점A를 지나는 원이 점B에서 직선에 접하고 중심이 C인 원을 볼 수 있다. 점B를 끌어라(drag). 점C가 움직이면서 그리는 자취는 무엇인가?


(1) 학생C의 진술

교사: 화면의 GSP폴더에서 '접하는 원.gsp'파일을 열어봐.

교사: 점C의 자취는 무엇이 되지?

학생C: 포물선이어요.(다른 학생들도 동시에)

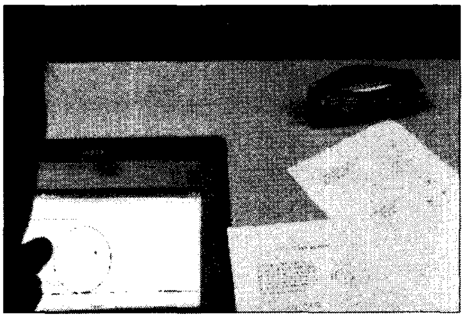
교사: 움직이는 점은 무엇이지?

학생C: 점B와 점C인 것 같아요.

교사: 포물선의 초점은 무엇일까?

학생C:(그림을 보면서) A인 것같아요

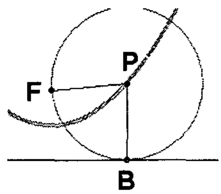
교사: 그렇다면 점A를 F로 점C를 P로 고쳐봐. 약 5분간의 시간을 줄테니 이리저리 움직이면서 수학적 증명을 하도록 해봐. (약간의 시간이 지난 후) 선생님이 앞에서 증명한 것을 떠올려봐. 선분을 연결해봐



<그림Ⅳ-8, 학생A가 <문제4>를 탐구하는 장면>

학생C: 이제 알겠어요.

교사: 그럼 이유를 말해봐.



<그림Ⅳ-9, <문제4>의 증명>

학생C: $\overline{FP}=\overline{BP}$인데 그 이유는 반지름이고요, 반지름은 접선에 수직이기 때문에 한 점과 직선으로부터 거리가 같은 점의 자취는 포물선이 되는 거예요.

교사: 잘했어.

(2) 구성주의 관점에서 학생C의 진술 분석

위의 <문제4>는 고등학교 수학II((주)금성사) 교과서의 '발전문제'3)에 나온 것을 약간 변형시킨 것이다. 대부분의 학생들은 이 문제를 어려워한다. 그 이유의 하나는 이 문제를 연필로 그려서 그림을 그리기 곤란하기 때문이다. 하지만, 학생C를 비롯한 연구 참여 학생들은 이 문제를 쉽게 증명할 수 있었다. 이것은 학생들이 앞에서 3회의 수업에서 자신의 증명결과를 직접 확인하였기 때문에 이 후 문제 풀이에서 자신감을 가지고 있음을 학생들에 대한 관찰을 통하여 확인할 수 있었다.

이 문제 역시 Branford가 주장한 '역사 발생적 기하지도 원리'에 잘 들어 맞는 사례로서 "1단계로서 『실험적 증명』-끌기(drag)를 통한 관찰을 통하여 중심의 자취는 포물선임을 확인하고, 2단계로서 『직관적 증명』: $\overline{BP}=\overline{FP}$임을 측정하고 움직여도 같음을 확인하고, 3단계로서 『수학적 증명』: $\overline{BP}=\overline{FP}$ (같은 원의 반지름)이고, 접선과 반지름은 서로 수직이기 때문이다."로 접근할 수 있다.

이러한 학습방법은 구성주의적 학습 방법과 '기하사고수준이론'에 일맥상통하는 것이다. 한편, 이러한 '사고수준'에 따른 접근 방법은 Vygotsky가 주장한 '근접발달영역'의 간격을 효과적으로 좁혀주고 있음을 알 수 있다. 이 때, '동적기하'라는 도구 자체가 '비계설정'의 역할을 함을 알 수 있다.

V. 결 론

본 연구의 목적은 동적기하(GSP)가 원뿔곡선 문제해결에 미치는 영향을 분석하여 효과적인 교수학습 방법을 구현하는데 있다. 이를 위하여 먼저 종이접기라는 활동을 통하여 포물선의 작도를 증명하는 과정과 동적기하를 사용하여 포물선을 작도한 후 그 도형이 포물선임을 증명하는 과제와 이를 응용한 문제를 해결하게 하였다. 이 과정에서 학생들의 문제 해결에 관한 인식과정과 교사의 역할을 사례연구를 통하여 구성주의적 관점으로 분석하였다. 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 동적기하는 학생들의 사고 수준에 알맞은 탐구활동을 할 수 있었으며, Branford의 '역사 발생적 기하원리'에 따른 학습을 가능하게 하였다. 그 결과, 학생들의 문제 해결 이후에 자신의 풀이가 정당함을 직접 확인할 수 있었고, 조작적 활동을 통하여 반례를 확인함으로써, 오개념을 즉시 수정할 수 있는 효과적인 학습이 가능하였다. 이 과정은 이 후의 문제 해결에 자신감을 부여하는 것으로 관찰되었다. 이것은 "참고서의 정답이나 인터넷 풀이를 보고 막연히 이해했다."진술과 비교할 때, 고등학교 기하 교육에 많은 시사점을 줄 것이다.

둘째, 동적기하를 사용한 수업은 Micro World에서 자유롭게 '물리적 구성'과 조작이 가능하며, 이를 통한 '정신적 구성'을 이룰 수 있는 것으로 관찰되었다. 이 때 교사는 '동적기하'를 '교수매체'로 보기보다는 '수학학습도구'라는 관점으로 접근하여야, 구성주의적 수업방식에 부합하는 수학수업이 가능함을 확인하였다.

셋째, 동적기하를 이용한 수업에서는 교사의 역할은 학생들의 '근접발달영역'을 파악하는 것과 동시에 그들을 효과적 도울 수 있는 '비계설정'임을 확인할 수 있었다. 이 때 교사의 역할은 학생과 상호작용으로 대화를 나누어 학생의 인식 수준 상승을 유도하는 것이 주된 임무임을 확인하였다.

넷째, 학생들은 수식으로 구성된 풀이와 내용을 완전하게 확신하지 않는다는 사실을 확인할 수 있었다. 따라서 가능하다면, 문제해결 이후 학생들은 자신의 답 혹은 문제집의 답이 완전한 답임을 실험적, 혹은 직접적으로 확인하는 과정이 필요함을 확인하였다.

본 연구는 수학 성적이 중상위권인 학생을 대상으로 한 연구이기 때문에 중위권(수능4-5등급)에 해당하는 학생들에 대한 연구도 필요할 것이다. 그리고 기하영역이 아닌 수학의 다른 분야, 예를 들면, 미분 적분이나 대수 분야에서도 본 연구의 결과와 유사한 주장이 나올 수 있는지는 연구가 더 진행되어야 할 것이다. 따라서 본 연구의 결과는 동적기하가 문제해결에 미치는 영향을 탐구하는 하나의 단서로 사용될 수 있을 것이다.

3) 각 단원의 마무리는 연습문제→평가문제→종합문제→발전문제로 구성되어 있다.

참고문헌

강철수 외 4인 (2002). 대수학과 기하학. 서울: 경문사

곽해진 (2003). 근접발달영역(ZPD) 이론을 적용한 수학적 문제해결 활동에 대한 연구, 서울교육대학교 대학원 석사학위논문.

권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위논문

권성룡 (2001). 탐구형 기하 소프트웨어 학습 환경에서의 지식의 내면화에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

김성경·이동원 (2005). 근접발달영역을 고려한 중학교 수학의 학습지도방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **44(1)**, pp.41-65. 한국수학교육학회.

김민정 (2004). 동적기하환경의 (DGS)의 수학교육적 고찰: 마이크로월드(Microworld)적 관점을 중심으로. 서울대학교 교육학 석사학위논문.

김부미 (2006). 수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰. 이화여자대학교 박사학위논문

김화경(2006). '컴퓨터와 수학교육' 학습지도 환경에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문.

나귀수 (1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. 대한수학교육학회 논문집, 제 **8(1)** pp.351-364.

오미연 (2006). 표상 활동이 문제해결에 미치는 영향 - 지수함수와 로그함수 중심으로, 단국대학교 대학원 석사학위논문.

박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구, 수학교육학연구**10(2)**, pp.248-249, 대한수학교육학회.

박현정·이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. 수학교육학연구, *16(2)*, pp.115-138, 대한수학교육학회.

__________ (2007). 대수 문장제 해결을 위한 학생들의 풀이과정 분석: 일련의 표시 관점의 사례 연구 <학교수학>, **9(1)** pp.141-160. 대한수학교육학회.

반은희(2001). 근접발달영역을 고려한 초등학교 수학과 학습지도방안에 관한 연구. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색: 중학교 수학을 중심으로, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이재학 외 4인 (2003). 수학II. 서울. (주)금성출판사

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이종희 (1999). 이해에 대한 수학교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구, 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **42(2)** pp.177-192, 한국수학교육학회.

한정민 (2005). 표상활동을 통한 수학 학습 과정에서 나타나는 학생의 수학적 신념 변화, 단국대학교대학원 석사학위논문.

홍성관·박철호 (2006). 고등학교 이차곡선에 대한 교과서 분석과 그 대안, 수학교육논총29. pp.341-362, 대한수학교육학회.

__________ (2007). 원뿔곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석, <학교수학> **9(1)**, pp.119-139, 대한수학교육학회.

황우형·차순규(2002). 탐구형소프트웨어를 사용한 해석기하지도에 관한 사례연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **41(3)**, pp.341-360, 한국수학교육학회.

Berk, L. E & Winsler, A (1995). Scaffolding Children's Learning; Vigotsky and Early childhood Education, 홍용희 역(1995) 어린이들의 학습에 비계설정: 비고츠키와 유아교육, 서울: 창지사.

Dniel Scher. (2002a). *Student's Conception of Geometry in a Dynamic Geometry Software Environment*. doctoral dissertation, New York University.

__________ (2002b). *Exploring Conic Sections with The Geometer's SKETCHPAD*. Emeryville : Key Curriculum Press.

Finz & Jackiw. (1998). Dynamic manipulation of

mathematical object.
http://www.keypress.com/sketchpad/talks//s2k/index.html

Freudental, H. (1973). *Mathematics as an Educational task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

__________ (1991) *Revisiting Mathematics Education*, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Geoffery E. mills. (2003). *Action Rearch: A Guide For The Teacher Researcher*. 강성우 외8인 역(2005). 교사를 위한 실행연구, 서울: 우리교육.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.) *Designing learning environment for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Gordon Fuller (1980). *Analytic Geometry*. ADDISON-WESLY Publishing Company

Kafai & Resnick, (1996). *Constructionism in Practice*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Novick, L. R. & Holyoak, K. J. (1991). mathematical problem solving by analogy. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17, 398-415.

Richard R. Skemp, (1987). *The Psychology of Learning Mathematics* 황우형, 역(2004) 수학학습 심리학, 서울: 사이언스북스

Sharan B. Merriam. (1997). *Qualitative Research and Case Study Application in education*. John Wiley & Sons, Inc.

Polya, G (1957). *How to solve it*. 우정호, 역(1986) 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: 천재교육.

Shaffer, D. W. & Clinton, K. A. (2005). Why all CSL is CL
http://coweb.wcer.wisc.edu/cv/papers/allCSLisCLatCSCL05.pdf

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight : a theory of mathematics education. Orland: Academic Press, Inc.

Wood, D; Bruner, J, S. & Ross, G. (1976). *The Role of Tutoring in Problem Solving*, Journal of child Psychology and Psychiatry, 17, pp89-100.

Wertch, (1985). *Vigotsky and Social formation of the mind*, 한양대 사회인지발달연구모임, 역(1995). 비고츠키, 마음의 사회적 형성, 서울: 정민사.

The Impact of Dynamic Geometry Software on High School Students' Problem Solving of the Conic Sections

Seong-Kowan Hong
Pusan National University
E-mail:aromhong@hanafos.com

Cheol-Ho Park
Graduate School of Pusan National University
E-mail:pkch510@hanmail.net

This study aims to improve the teaching and learning method on the conic sections. To do that the researcher analyzed the impact of dynamic geometry software on students' problem solving of the conic sections. Students often say, "I have solved this kind of problem and remember hearing the problem solving process of it before." But they often are not able to resolve the question. Previous studies suggest that one of the reasons can be students' tendency to approach the conic sections only using algebra or analytic geometry without the geometric principle. So the researcher conducted instructions based on the geometric and historico-genetic principle on the conic sections using dynamic geometry software. The instructions were intended to find out if the experimental, intuitional, mathematic problem solving is necessary for the deductive process of solving geometric problems.

To achieve the purpose of this study, the researcher video taped the instruction process and converted it to digital using the computer. What students' had said and discussed with the teacher during the classes was checked and their behavior was analyzed. That analysis was based on Branford's perspective, which included three different stage of proof; experimental, intuitive, and mathematical.

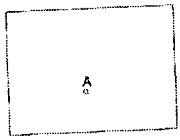
The researcher got the following conclusions from this study. Firstly, students preferred their own manipulation or reconstruction to deductive mathematical explanation or proving of the problem. And they showed tendency to consider it as the mathematical truth when the problem is dealt with by their own manipulation. Secondly, the manipulation environment of dynamic geometry software help students correct their mathematical misconception, which result from their cognitive obstacles, and get correct ones. Thirdly, by using dynamic geometry software the teacher could help reduce the 'zone of proximal development' of Vigotsky.

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Classification : 97C30
* Key Words : conic sections, dynamic geometry software, problem solving, zone of proximal development

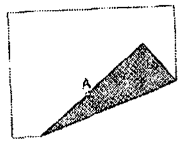
<부록1> 학생들이 사용한 학습지

준비물: 직사각형 혹은 정사각형의 투명 종이나 얇은 종이가 필요하다. 만약에 이런 종이를 준비하지 못했다면, 펼쳐진 종이를 사용하여라.

1. 점A를 종이 바닥에서 대략 1인치 정도 떨어진 지점과 왼쪽과 오른쪽에서 볼 때 중앙인 지점에 표시하여라.



2. 오른쪽 아래에서 보이는 것처럼, 종이를 접어서 밑바닥이 점A에 겹쳐지도록 하여라. 접혀진 선으로 날카로운 주름이 남아있도록 하여라.
3. 밑바닥의 다른 점들이 점A에 겹쳐지도록 종이를 접고 새로운 주름을 남겨라. 종이를 펼치고 이 과정을 반복하여라.
4. 12개 정도의 주름을 만든 후에, 그것들을 조사하여 무엇인가 떠오르는 모양을 밝혀라.
5. 종이 접기를 계속하면 윤곽이 잘 잡혀진 곡선이 보일 것이다. 이것은 약간 시간이 걸리am로, 성급하게 굴지 말아야 한다.
6. 여러분이 본 것을 친구들과 토론하고, 자신의 곡선과 친구의 곡선을 비교하여라.



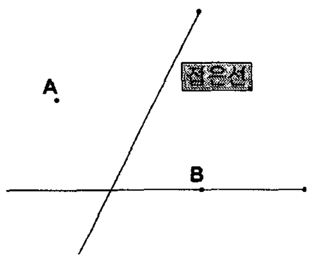
질문들

질문1) 종이 위에 주름들은 포물선의 윤곽선을 구성하는 것으로 보인다. 어디에 그 초점과 준선이 보이는가?

질문2) 만약에 점A를 바닥 쪽으로 가깝게 움직여서, 또 다른 곡선을 접는다면, 처음 곡선과 비교하여 그 모양이 어떻게 될 것이라고 생각하는가?

GSP 모형을 작도하기

접고 펼치고 종이의 접기는 상당한 노력을 요구한다. 종이 한 장, 또는 두 장을 접기는 재미있지만, 점A가 다른 위치에 있을 때, 계속 종이 접기를 하기를 원한다면 무슨 일이 일어날까? 아마 새로운 종이를 가지고 시작해야 할 것이고, 새로운 주름을 접어야 할 것이다.



GSP는 작업을 간단하게 만들 것이다. 단지 하나의 주름 선만을 가지고, 당신이 점A를 새로운 위치로 끌어당길 때마다, 그들 스스로 즉시 조정될 것이다.

7. 새로운 그림판을 열어라. 직선도구를 사용하여, 화면의 바닥 쪽에 수평선을 그려라. 이 직선은 종이의 바닥 모서리를 나타낸다.
8. 직선 위에, 화면의 좌, 우의 중간에 점A를 그려라.
9. 수평선 위에 점B를 작도하여라.
10. 점B가 A 위에 겹쳐질 때, 주름(접힌 선)을 작도하여라.
11. 점B를 직선을 따라 움직여라. 만약에 접은 선이 정확하게 작도되었다면, 점B의 새로운 위치에 조정될 것이다.
12. 주름 선을 지정하고, 보기 메뉴에서 직선의 흔적 남기기를 선택하여라.
13. 점B를 수평선을 따라서 끌어당기기고 주름 선의 집합을 만들어라.
14. 점A를 다른 위치로 움직이고, 필요하면 보기 메뉴에서 흔적 지우기를 선택하여라.
15. 또 다른 접은 선의 집합을 만들기 위하여, 점B를 끌어당겨라.

점A의 위치에 따라 새로운 접은 선의 흔적을 남기는 것은 확실히 종이접기 보다는 빠르다. 그러나 우리는 더 잘 할 수 있다. 접은 선은 점A를 끌어당기면, 기계적으로 조정될 수 있다. GSP의 자취 명령어가 이것을 가능하게 만든다.

16. 원래 처음의 선의 흔적 남기기를 취소하고, 다시 한 번 보기 메뉴에서 직선의 흔적 남기기를 선택하여라.

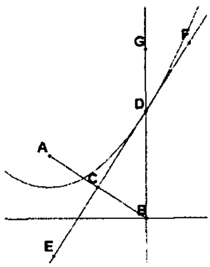
17. 지금 접은 선과 점B를 지정하여라. 작도 메뉴에서 자취 명령어를 선택하여라. 완전한 접은 선의 집합이 보일 것이다. 점B가 그것의 경로를 따라 움직일 때, 접은 선의 자취이다. 만약에 점A를 끌어당기면, 접은 선이 재조정되는 것을 보게 될 것이다.

질문들

질문3) 점A를 수평선 가까이 움직이면, 곡선의 모양은 어떻게 될까?

질문4) 점A를 수평선 위로 움직이면, 곡선의 모양은 어떻게 될까?

어떻게 증명할 것인가?



접혀진 사각형의 작도는 포물선을 생성하는 것으로 보인다. 이것을 증명할 수 있는가? 당신은 자신의 증명을 개발하는 것을 시도하거나, 다음 단계의 질문과 절차를 통하여 증명하여라.

오른쪽에 보이는 그림은 GSP 작도와 닮았다. 직선EF(선분 AB의 수직이등분선)은 주름선을 표상하고, 점A가 B에 겹쳐졌을 때, 접은 선을 표상한다.

질문5) 점D가 포물선 위를 움직인다고 하면, 어떤 두 개의 선분이 길이가 같다고 증명할 것인가?

질문6) 삼각형의 합동 정리를 사용하여 $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$를 증명하여라.

질문7) 포물선에 대한 거리의 정의를 사용하고, 질문6)의 결과를 사용하여 점D가 포물선 위를 움직이는 점이라는 것을 증명하여라.

심화탐구

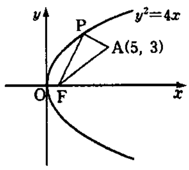
1. 포물선 폴더에 있는 접하는 원.gsp 그림을 열어라. 당신은 점A를 지나는 원이 점B에서 직선에 접하고 중심이 C인 원을 볼 것이다. 점B를 끌어라. 왜 점C가 포물선 위를 움직이는가?

2. 포물선은 초점 하나가 무한에 있는 타원으로 서술될 수 있다.

포물선 폴더에 있는 원뿔 연결.gsp 그림을 열어라. 당신은 접혀진 원의 작도에 의한 타원을 보게 될 것이다. 초점을 무한대로 보내기 버튼을 눌러라. 점A는 타원의 초점이고 원의 중심인데 화면의 끝으로 사라질 것이다. 움직임이 멈추었을 때, 그 결과를 조사하여라. 어떤 방법으로 접혀진 사각형과 닮았는가?

3. 포물선 증명 그림을 사용하여 다음을 보여라. $\angle GDF = \angle ADC$

확인문제

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$의 초점을 F라할 때, 점 A(5, 3)과 이 포물선 위의 임의의 점 P에 대하여 $\triangle$APF의 둘레의 길이의 최소값은?	

<부록2 학생들의 증명사례>

질문5) 점D가 포물선 위를 움직인다고 하면, 당신은 어떤 두 개의 선분이 길이가 같다고 증명할 것인가?

$\overline{AD} = \overline{BD}$

질문6) 삼각형의 합동 정리를 사용하여 △ACD≡△BCD를 증명하여라.

C는 A와B의중점. $\overline{AC} = \overline{BC}$ $\overline{CD}$는 공통직선이되므로 합동이 된다

질문7) 포물선에 대한 거리의 정의를 사용하고, 질문6)의 결과를 사용하여 점D가 포물선 위를 움직이는 점이라는 것을 증명하여라.

심화탐구

$\overline{AD}$와 $\overline{BD}$가 같기때문에 포물선위의점에서 준선까지의 거리가 항상 같게 되므로 포물선의 정의가 맞는다.

1\. 포물선 폴더에 있는 접하는 원.gsp 그림을 열어라. 당신은 점A를 지나는 원이 점B에서 직선에 접하고 중심이 C인 원을 볼 것이다. 점B를 끌어라. 왜 점C가 포물선 위를 움직이는

<학생C의 풀이>

질문5) 점D가 포물선 위를 움직인다고 하면, 당신은 어떤 두 개의 선분이 길이가 같다고 증명할 것인가? $\overline{AD} = \overline{BD}$

질문6) 삼각형의 합동 정리를 사용하여 △ACD≡△BCD를 증명하여라. $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACD = \angle BCD$ ($\overline{CD}$는 $\overline{AB}$의 수직이등분선)

$\overline{CD}$는 공통이므로 $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (RHS 합동)

질문7) 포물선에 대한 거리의 정의를 사용하고, 질문6)의 결과를 사용하여 점D가 포물선 위를 움직이는 점이라는 것을 증명하여라. 초점과 포물선위의 한점과의 거리는 그 한점과 준선과의 거리와 같다.

심화탐구

점D와 준선 (5선) 과의 거리 $\overline{BD}$와 초점과 점D와의 거리가 같으므로 (질문6에서 증명)

<학생A의 풀이>