韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 8. 제 46권, 제 3호, 315-329

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2007, Vol. 46, No. 3, 315-329

# 중학교 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학 개념 분석

권 오 남 (서울대학교)
박 정 숙 (서울대학교 대학원)
박 지 현 (서울대학교 대학원)

## I. 서 론

비를 사용하여 판단하거나 사고하는 경우는 일상생활 속에서 흔히 찾아볼 수 있다. 예를 들면 3개의 물건이 하나로 포장된 상품과 5개의 물건이 하나로 포장된 상품 중 어느 상품의 가격이 더 저렴한지 알아보기 위해 물건 1개의 가격에 대한 단위 가격이 필요하다. 어떤 산의 경사를 측정하는 일은 측량하는 사람, 스키 타는 사람 그리고 등산을 즐기는 사람들의 공통적인 관심사가 될 수 있을 것이다. 또한 소금이나 설탕의 농도 역시 음식을 만들 때 이용되는 조리법에서 중요한 비중을 차지하고 있다. 이와 같이 우리가 일상생활에서 흔히 사용하는 부분 대 전체, 부분과 부분의 비교나 속력, 상대적 성장, 세금 계산, 인구밀도 등은 모두 두 수의 비를 비교하는 승법적 비교를 포함하고 있고, 비의 측정을 필요로 한다.

수학이나 과학의 중요 개념에도 상당수 비와 비례식이 포함되어 있다. 선형함수, 직선의 기울기, 확률, 닮음비, 삼각비 그리고 밀도의 측정과 기어의 변속 등에서 비가 활용되고 있다. 비례적 관계는 지질학, 미술, 의학, 경제학 등에서도 중요하게 사용되고 있다.

비와 비례는 일상적으로 다양하게 사용되고 있음에도 불구하고 획득하기 어려운 개념이다. 두 양 또는 두 수를 다루면서 하나의 대상으로 파악하는 것은 쉽지 않은 일인 것이다. Hull(2000)은 예비 교사들조차 비례 관계를 완전히 이해하지 못하고 있음을 보고하고 있다. 비례 관계에 대한 불완전한 이해는 비례식을 세우지 못하고 그 식을 해결하지 못했음만을 의하는 것은 아니다. 비례 관계의 이해에서는 상황을 식으로 변환하고 그 식에 포함된 수학 구조를 파악하는 비례추론이 중요한 요소이다.

Inhelder와 Piaget(1958)는 비례추론이 형식적 조작기의 가장 초기에 획득되므로 인지발달 전반에 걸친 지표로 간주하였다. 특히 비례추론은 열한살이 되기 전에는 나타나지 않으므로 형식적 조작 단계를 밝히는 보증서의 역할을 한다고 하였다.

또한 비례추론은 학교 교육과정에서 성공하기 위한 필수적인 요소이며 인지 발달에서 가장 높은 단계로 고려되고 있다(Tourniaire & Pulos, 1985). Lesh, Post 그리고 Behr(1988)가 지적하였듯이 비례적으로 사고하는 능력은 중학교 대수를 비롯하여 삼각비, 기하, 미적분, 통계, 화학, 물리, 생물학에서 필요하므로 다른 고등 개념들과 연계되어 있는 기본적이고 핵심적인 아이디어라고 할 수 있다. 따라서 문제해결력의 발달을 촉진하는데 잠재적인 역할을 할 수 있다. 또한 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 Curriculum and Evaluation Standards(1989)에서도 비례추론을 수학적 추론의 하나로 그 중요성을 언급하고 있다.

비례추론에 관한 연구들은 대개 비와 비례 개념에 대한 연구와 맞물려있다. 우리나라 교육과정에서 비와 비례 개념이 처음 등장하는 것은 초등학교 6학년 과정이다. 따라서 비와 비례 개념이 관련된 교육과정이나 교과서 분석은 주로 초등학교를 중심으로 이루어지고 있다.

장혜원(2002)은 제 1차 교육과정으로부터 현재 제 7차 교육과정에 이르기까지 초등 수학 교과서를 분석함으로써 비의 값[1]과 비율에 대한 관련 내용이 어떻게 변화

* 본 연구는 한국학술진흥재단 교과교육공동연구(2006-B00042)의 지원에 의해 이루어졌음
* 2007년 8월 투고, 2007년 8월 심사 완료
* ZDM분류 : F83
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 비, 비례, 비율, 비례추론.

1) 장혜원(2002)은 초등학교에서 비의 값과 비율을 구별하지 않고 '비율'이라는 하나의 용어를 사용하는 것이 적절하다고

했는지 고찰하면서 비의 값과 비율 개념이 의미상 혼용되어 왔음을 지적하였고, 정은실(2003a, 2003b)은 비 개념에 교육적 분석, 역사적 분석, 수학적 분석, 심리적 분석을 통해 비 개념과 관련한 교육적 시사점을 탐구하였다. 구체적인 교과서 비교에 대한 연구로 신재은(2005)은 초등학생을 위한 비개념 지도방안의 한 부분으로 우리나라 교과서의 '비와 비율', '비례식'과 비개념과 직접적으로 관련된 MiC 교과서를 비교분석하였다. 그 결과 MiC 교과서에 비해 우리나라 교과서는 소재의 다양성이 부족하였으며 비례추론과 관련된 문제 유형도 3개의 숫자를 주고 다른 하나의 숫자를 찾는 결측치 문제가 주를 이루며, 한정된 전략을 사용하고 있음을 지적하였다. 임경화(2006)는 한국과 싱가포르의 수학교과서를 분석하여 싱가포르의 교과서가 비와 비례 개념을 보다 확대 심화하여 가르치고 있음을 밝히고 있다. 이 연구들은 모두 초등학교 과정만을 비교한 것으로 비와 비례 개념이 다른 영역과 어떻게 연결되어 있는지, 초등학교 다음 단계인 중학교 교육과정에서 비와 비례 개념이 어떻게 확장되어 적용되고 있는지에 관하여서는 밝히지 않고 있다.

본 연구는 비와 비율 그리고 비례에 대한 이론적인 접근에서 시작하여 학생들의 비례적 사고의 특징을 검토한 후, 우리나라 중학교 수학 교육과정에서 비와 비례 개념을 포함한 수학개념이 교과서에서 어떻게 나타나는지 분석함으로써 초등학교의 비와 비례개념이 중학교에서 어떻게 확장되어 사용되고 있는지를 고찰하고 그 과정에서 요구하는 비례추론의 특성을 탐구하고자 한다.

## Ⅱ. 비와 비율 그리고 비례

일상생활에서 비(ratio), 비율(rate) 그리고 비례(proportion)는 자주 사용되고 있고 특별한 구분 없이 혼용하여 사용되고 있다. 비에 대한 분명한 정의와 비와 비율을 어떻게 구분하는지에 대하여 명확하게 정리한 문헌은 없다(Lesh et al., 1988; Thompson, 1994a). 그렇다면 이러한 모호함은 어디에서 기인한 것인가? 비에 대해 형식적으로 정의한 기록이 처음 나와 있는 Euclid의 원론에서 그 이유를 찾을 수 있다.

하였다. 따라서 본고에서는 비의 값과 비율을 구분하지 않고 비율이라는 단어로 통일하기로 한다.

### 1. 비와 비율 그리고 비례의 역사

비와 비례에 대한 역사적인 기록은 Euclid 이전부터 찾아볼 수 있으며 특히 Pythagoras가 수의 성질을 연구하면서 비례를 다루고 있는데서 구체적으로 발견할 수 있다(Kline, 1972). Euclid가 제시한 비례 이론은 방정식, 분수의 성질, 실수체계의 성질과 같이 다양한 영역의 성질을 탐구하는데 있어 결정적인 역할을 하였다(Katz, 1998). Euclid의 비례이론은 Eudoxus의 비례론에서 비롯되었으며 원론 제5권과 제7권은 비와 비례의 기본 개념에 할당하고 있고 제5권은 연속량에 대하여 제7권은 이산량에 대한 비례론을 다루고 있다(Fowler, 1979). 제5권의 정의 3에서 다음과 같이 '비'를 정의하고 있다.

> 제5권의 정의 3] 비는 같은 종류의 두 양(magnitude) 사이의 크기(size)에 대한 일종의 관계이다. (Katz, 1998, p.80)

여기서 중요한 것은 Euclid가 다룬 양(magnitude)은 크기라는 것이다. 현대수학에서는 양이 수에 쉽게 포함될 수 있지만 Euclid 시대에는 그렇지 못했다. 따라서 오늘날 두 비가 같음을 $a:b=c:d$로도 정의할 수 있지만 그리스 사람들은 같은 종류의 양으로 나누는 경우에만 분수로 인정하였다(Katz, 1998). 두 비가 같음에 대한 정의 5를 현대의 대수 기호를 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

> 제5권의 정의 5] 양의 정수 $m, n$에 대하여 $ma > mb$일 때는 언제나 $mc > md$가 되고, $ma = mb$일 때는 언제나 $mc = md$가 되며, $ma < mb$일 때는 언제나 $mx < md$가 된다면 $a:b=c:d$이다. (Katz, 1998, p.80)

이 정의는 비가 통약불가능한 수인가 그렇지 않은가에 관계없이 항상 성립할 수 있으므로 비의 상등을 해결하는데 중요한 역할을 하였다(Heath, 1956). 원론에서 비는 $a:b$라는 기호와는 독립적인 의미로 시작되었다. $a:b$라는 기호는 오히려 비례의 정의에서 비롯되었다고 볼 수 있고 비례의 동치류에 대응된다. 5권의 3번을 제외하고 원론 내에서 비에 대한 대안적인 정의를 찾을 수

없으므로 비는 비례 안에서 의미 있게 고려될 수 있다 (Fowler, 1979).

Euclid의 비례론에서 '비례'에 대한 정의는 크게 두 가지로 볼 수 있다. 하나는 제5권의 정의 6이며 다른 하나는 제7권의 정의 20이다. 구체적인 내용은 다음과 같다.

> 제 5권의 정의 6] 같은 비를 갖는 양을 비례한다고 한다. (Katz, 1998, p.78)

> 제 7권의 정의 20] 수들이 서로 비례한다는 말은 첫째 수가 둘째 수의 곱이거나, 같거나, 몫일 때, 셋째 수가 그와 똑같이 넷째 수의 곱이거나, 같거나, 몫인 것을 말한다. (Katz, 1998, p85)

Euclid는 제5권에서는 정의3, 정의5, 정의6을 통해 비를 관계로 정의하고 비례를 같은 비를 갖는 것으로 정의하는데 비해 제7권 정의 20에서는 수 사이의 비례 관계를 직접 정의하여 비례의 정의에 관하여 두 가지 해석이 가능하도록 하는 계기를 마련하였다(Fowler, 1979; Heath, 1956).

여기서 주목할 것은 비율에 대한 언급이 없다는 것이다. Euclid가 제기한 비의 두 가지 해석은 '관계'인가 '수'인가에 관한 것이며, 이 시대의 양은 모두 선분과 관련된 것으로 같은 단위로 측정이 가능한 것이었다. 따라서 비와 비례에 비해 '비율'은 서로 다른 단위의 양을 하나의 값으로 나타낼 필요가 있었던 시기에 비와 구별하기 위해 나타난 것으로 보인다.

Euclid의 기하학적 양인 비를 유리수로 전환한 사람은 14세기의 Oresme이라고 할 수 있다. 그는 복비를 구하는 것을 비의 곱셈으로 다루어 비와 비를 곱하는 것을 가능하게 하였다. 이는 비를 하나의 수로 보는 계기를 마련하였다(Katz, 1998; Grattan-Guinness, 1997). 비를 수로 보는 관점은 18세기까지 계속되었다. 그러나 1756년 Simson은 원론을 재발간하면서 제6권의 정의 5, 즉 "비의 크기를 서로 곱하여 어떤 새로운 비를 만들면 그 비를 복비라고 한다(Heath(1956), p189)"를 삭제하여 비를 관계로 보는 전통을 복원시키려고 하였다(Sylla, 2002).

Sylla(2002)는 Leibniz와 Clarke 사이에 교환된 편지를 통해 Leibniz는 비를 양으로 생각하였고 Clarke는 비를 관계로 보고 있음을 밝혔다. 또한 Wallis는 비를 수로 보고 비가 기하보다 산술과 훨씬 관련이 깊다는 주장을 하였고 Barrow는 Newton보다 더 보수적으로 비가 양이 아니라 관계로 보고 있음을 서술하였다.

중세시대 이후 비를 관계로 보는 Euclid 식의 관점과 비를 수로 보는 관점에 대한 논쟁은 지속적으로 이루어져 왔으며 비를 나타내는 표기 방법 및 이론 또한 함께 발전하였다(Sylla, 2002; 정은실, 2003a). 그 후 근대에 와서 Dilworth의 "Schoolmaster's Assistant"(1976)라는 교재에 나타난 바와 같이 3개의 수가 주어지고 다른 하나의 값을 계산하는 방법이 제기되면서 학교 교육과정의 일부가 되었다. 따라서 비와 비율, 그리고 비례에 대한 모호한 정의는 다양하게 나타나는 Euclid 원론에 대한 해석에서부터 기인한다고 볼 수 있다.

### 2. 비와 비율 그리고 비례에 대한 해석

비와 비율 그리고 비례는 역사적으로 볼 때 정의조차 명확하지 않으며 하나의 독립된 개념으로 발전한 것이 아니라 분수, 곱셈, 나눗셈 등과 같이 여러 가지 다른 개념들과 밀접한 연관을 맺으며 발달하였다.

유현주(1995)는 유리수 개념의 본질을 비 동치관계로 보았으며 Kieren(1976)은 비를 유리수의 하부구조로 명명하였다. 또한 Vergnaud(1988)는 승법적 구조의 개념장 안에 비를 위치시켰다. 여기서 승법적 구조의 개념장이란 Vergnaud가 명명한 것으로 곱셈 또는 나눗셈이 필요한 문제 그리고 간단하고 복잡한 비례 문제를 분석할 수 있는 모든 상황들로 이루어진 것을 말한다. 다시 말하면 측정, 스칼라 비, 차원의 몫과 곱, 분수, 비율, 유리수, 벡터 공간, 선형 함수, 상수 계수, 선형적 조합과 선형 사상, 등은 물론 곱셈과 나눗셈들의 상호 연결된 개념의 집합이라고 할 수 있다.

비와 비례는 구분이 비교적 분명한 반면 비와 비율에 대한 구분은 연구자들마다 조금씩 다르다. 연구자들 사이에 서로 다른 비와 비율의 이해는 학생들의 교수 전략에 영향을 미치게 된다. 이 절에서는 먼저 비와 비율을 구분하고 있는 연구자들의 관점을 살펴보고 각각의 연구자들의 해석에 따라 비와 비율의 개념이 어떻게 달라지는지 살펴볼 것이다. 연구자들이 비와 비율을 구분하는 기준은 주로 승법적 비교가 일어나는 양(quantity)의 측

정 공간 분석에 바탕을 두고 있다. 측정 공간이란 같은 대상을 가지고 있는 양들의 집합을 말한다(Romberg et al., 1988). 예를 들어 같은 측정공간에 들어 있는 5개의 꽃과 8개의 꽃은 2개의 꽃병과 4개의 꽃병이 속하는 측정공간과는 다르다.

Vergnaud(1988)는 초기 그리스인들의 전통에 따라 비를 같은 성질을 가지고 있는 두 양 사이의 비교로, 비율은 서로 다른 성질을 가지고 있는 두 양 사이의 비교로 보았다. 예를 들어 주스의 양과 물의 양은 모두 액체이며 같은 성질을 가지고 있으므로 같은 단위로 측정할 수 있어 (주스의 양) : (물의 양)은 비라고 할 수 있다. 반면 (스푼의 수) : (물의 양)는 서로 다른 성질의 양이므로 같은 단위로 측정할 수 없으므로 비율로 볼 수 있다 (Vergnaud, 1988).

Schwartz(1988)는 비와 비율을 구분하기에 앞서 양을 외연적 양(extensive quantity)과 내포적 양(intensive quantity)으로 구분하였다. 외연적 양은 얼마나 많은지를 지칭하는 것이다. 이 양은 직접적인 측정에서 얻어질 수 있으며 (예를 들면, 4피트, 7개의 오렌지, 5000원, 3파운드, 6분 등) 외연적 양의 대상은 하나의 양이다. 내포적 양은 '하나의 꽃병에 5개의 꽃이 들어 있다'와 같이 물체의 "질(quality)"을 기술하는 것이다. 내포적 양의 대상은 두 개의 물체를 포함하고 있다. 내포적 양은 각각의 양이 얼마만큼 있는지를 나타내는 것이 아니라 내포적이거나 외연적인 두 양 사이의 관계를 나타내는 것이다. Schwartz의 견해에 따르면 비는 두 양 사이의 관계인 반면 비율은 하나의 내포적 양이다.

Ohlsson(1988)은 한 양에 대한 다른 양에 대한 관계를 수치로 표현한 것을 비라 하고, Freudenthal(1983)의 개념에 따라 같은 양의 크기를 비교한 것이면 내적비, 서로 다른 크기를 비교한 것이면 외적비라 하였다. 예를 들어, 직사각형의 가로와 세로의 비는 내적비이고 대학 내 사무실 공간에 대한 학생 수의 비는 외적비이다. 반면 양과 시간 사이의 비를 비율이라고 하였다. Ohlsson(1988)은 비와 비율 개념 모두 함수 개념과 밀접한 연관이 있다고 보았다. 이러한 비와 비율의 구분은 상황의 형식적 분석에 따른 것이다.

Thompson(1994)은 학생이 승법적 관계를 어떻게 이해하는지 이해 수준에 따라 비는 두 양을 승법적으로 비교한 결과로, 비율은 일정한 비를 반영적으로 추상화한 것으로 보았다. 예를 들어 어떤 학생이 3 : 2를 인식함에 있어서 레몬 주스 3컵과 라임 주스 2컵을 포함한 것으로 인지한다면 비가 되고 양 사이의 승법적 관계가 불변일 때 섞는 양의 변화를 인식할 수 있으면 비율이 된다. 이상을 정리하면 다음 <표 1>과 같다

<표 1> 연구자에 따른 비와 비율의 해석

| 연구자 | 비(ratio) | 비율(rate) |
|---|---|---|
| Vergnaud | 동종의 양 사이의 비교 | 이종의 양 사이의 비교 |
| Schwartz | 양의 순서쌍이 포함된 이원 관계 | 하나의 양과 다른 양의 하나의 단위 사이의 관계인 내포적 양 |
| Ohlsson | 하나의 양이 다른 하나의 양에 대해여 얼마나 많은가를 표현하는 수치적 표현 | 양과 시간 사이의 비 |
| Thompson | 두 양을 승법적으로 비교한 결과 | 일정한 비를 반영적으로 추상화한 것 |

Vergnaud는 비를 같은 성질을 가지고 있는 두 양 사이의 비교로, 비율은 서로 다른 성질을 가지고 있는 두 양 사이의 비교한 반면 Freudenthal(1983)은 첫 번째를 내적비, 두 번째를 외적비로 구분하여 모두 비에 포함시키고 있다. 우리나라 초등교과서에는 비와 비율을 모두 사용하고 있으며 비는 관계로 비율은 비의 값이라는 수로 나타내고 있다. 그러나 이 구분은 정의상의 구분일 뿐 그 이외에는 같은 의미로 사용할 때가 많다(정은실, 2003b).

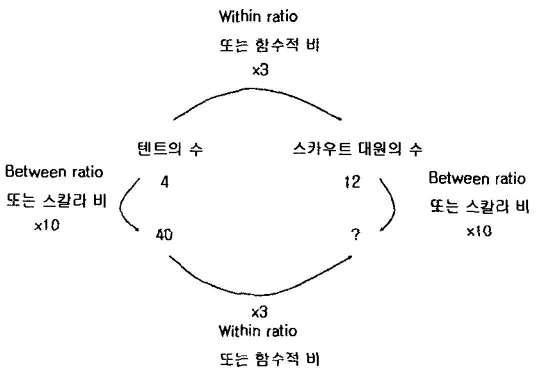
Lesh 등(1988)은 수학자들은 교육적으로 또는 심리적으로 의미있는 과제 특성을 지니고 있는 것에 대해 엄밀하게 정의하려고 하지 않는다고 하였다. 그 이유는 수학자의 목표가 과제 사이의 심리적 차이점보다 구조적 유사성에 두기 때문이다. 심리적으로 의미 있는 과제 특성에 대응하는 올바른 정의는 존재할 수 없다고 보는 것이다. 따라서 본고에서는 비와 비율을 구분하지 않고 비와 비례만 구분하여 사용하기로 한다.

두 비의 동치관계( $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ), 즉 두 비가 같음을 뜻하는 비례에서 찾을 수 있는 구조적 관계는 Vergnaud(1983)로부터 찾아볼 수 있다. 그는 두 측정 공간 사이의 비례에서 두 가지 유형의 승법적 관계 즉

'within ratio'와 'between ratio'가 존재한다고 하였다. 예를 들어, 다음과 같은 문제를 생각해보자.

4개의 텐트에 12명의 스카우트 대원이 있을 때 40개의 텐트에는 몇 명의 학생들이 있는가?(Carpenter et al., 1999, p25)

위의 문제에서 측정 공간은 스카우트 대원의 수와 텐트의 수이다. 이 예에서 4명과 12명의 스카우트 대원들 사이의 'within ratio'는 3이고, 4와 40 사이의 'between ratio'는 10이다. 두 비는 모두 정수비이며 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




<그림 1> 텐트의 수와 스카우트 대원의 수 사이의 관계

'within ratio'는 함수적 비(functional-ratio)로 언급되기도 한다(Vergnaud 1988). 예를 들면 텐트의 수에 3을 곱하면 학생 수라는 관계가 성립한다. 비례 문제에 대한 학생들의 문제 해결 전략에 관한 초기 연구들은 'within ratio' 또는 'between ratio'에 대한 문제를 풀 때 학생들이 어떤 관계를 이용하는지 밝히는데 초점을 두고 있다(Karplus et al., 1983a; Vergnaud, 1983). 어떤 연구(Vergnaud, 1983)는 'within ratio'가 학생들에게 더 선호하고 있음을 발견하였다고 주장하는 반면 또 다른 연구(Karplus et al.,1983b)는 학생들이 'within ratio'를 더 선호한다고 주장하였다. 'within ratio' 또는 'between ratio' 전략 중 학생들이 어떤 것을 더 선호하는지에 대한 연구는 아직 결론이 나지 않았다. Karplus et al (1983)는 어떤 전략도 다른 무엇보다 "자연적"인 전략이 아니며 학생들은 어떤 전략이 정수비를 만드는지에 따라 선택하여 이용한다고 주장하였다.

비, 비율 그리고 비례에 대한 학자들의 다양한 해석은 이론적인 접근에서 학생들의 실제 사고의 수준과 과정 또는 문제해결전략을 보는 관점으로 이동하고 있다. 다음 장에서는 학생들의 비례적 사고에 대한 연구들을 검토하여 비례 상황을 포함하고 있는 문제 상황과 학생들의 문제해결전략의 유형 등을 살펴본다.

## Ⅲ. 학생들의 비례적 사고에 관한 연구

학생들의 비례적 사고에 관한 연구는 많은 연구들이 비례추론이라는 용어를 사용하여 진행되었다. 먼저 비례추론이 무엇인지 살펴보고 문제유형과 해결전략에 관해 알아본다.

### 1. 비례추론

비례추론은 비와 비례 개념을 바탕으로 이루어지는 수학적 추론 형태로 학교에서 배우지 않은 직관적인 경험으로부터 보다 형식적인 학교 경험을 통해 점차적으로 발달한다(Lesh et al., 1988). 비례추론은 비례 개념이 포함된 상황을 학생들이 어떻게 인식하고 해결하는가에 관심을 두고 있어 일반적인 비와 비례 개념에 관한 연구에 비해 학생의 문제해결전략이나 발달 수준과 깊은 관련이 있다. 비례추론에 대한 연구는 Piaget와 그의 동료들에 의해 가장 먼저 시작되었다고 할 수 있으며 비례추론에 대한 정의는 학자들마다 조금씩 다르다.

Inhelder와 Piaget(1958)는 비례추론이라는 구체적인 용어를 사용하진 않았지만 학생들의 비례적 사고의 특성을 단계별로 가장 먼저 밝힌 한 사람으로 비례적 사고의 필연적인 특성으로 두 관계사이의 관계(이차적 관계)를 포함해야 한다고 보았다. 예를 들어 Piaget는 A/B= C/D에 어울리는 추론이 아닌 A×B=C×D가 어울리는 추론과제인 지렛대의 평형문제를 이용하여 비례성이 포함된 상황을 학생들이 어떻게 해결하고 있는지 연구하였다.

Piaget에 따르면 학생들의 비례적 사고는 (1) 포괄적인 보상 전략으로부터 자연스럽게 (2) 모든 경우로 일반화 하지 않고 승법적 전략으로 (3) 마지막으로 비례법칙의 형식화로 발달한다(Tourniaire & Pulos, 1985; Lesh et al., 1988). Inhelder와 Piaget(1958)은 비례적 사고가 질적인 사고에서 전 비례적 사고를 거쳐 승법적 사고로 발달한다고 하였다. 전 비례적 사고 단계에서 학생들은 두 비 사이의 관계를 이해하고 그 이해에 근거한 전략을 개발한다. 이 단계에서의 한 가지 전략은 더해가기(build-up) 전략이다. Piaget의 마지막 단계는 형식적인 비례적 사고 단계로 두 비 사이의 승법적 관계를 모두 이해하는 단계이다.

Piaget 학파의 이론에 따르면 비례적 사고에서 구체적인 문제 상황은 중요하지 않다. 학생들이 일차함수의 개념을 이해할 수 있다면 다양한 상황에서 다양한 비를 가진 문제를 해결할 수 있다고 보는 것이다. 즉 비례적 사고를 일반적인 인지 구조의 구현으로 바라보고 있다. 그러나 실제 비례적 사고는 문제 유형에 대하여 학생들은 맥락에 따라, 문제에 제시된 숫자에 따라, 자신이 이해한 비례성에 따라 서로 다른 전략을 사용하며 그에 따라 학생들의 성취 정도도 다른 것을 알 수 있다(Tourniaire & Pulos, 1985).

Karplus, Pulos, & Stage (1983)는 일차함수 관계가 존재하는 두 변수 사이에서 일어나는 추론을 특별히 비례추론이라 하였다. 또한 비례추론은 일차함수의 미정계수를 결정하는 내포적 비율을 인식하고 외연적 변수에 더해지는 값 또는 데이터로부터 계산된 내포적 변수의 두 값의 비교할 때 주어진 데이터와 관계를 활용하는 단계를 거쳐 개념화될 수 있다고 하였다.

Lesh, Post, Behr(1988)는 비례추론을 공변과 다중 비교를 포함하는 수학적 추론의 한 형태로 여러 가지 정보를 마음속에 저장하고 처리하고 능력이라고 보았다. 비례추론은 추론, 예측과 밀접한 관련을 가지고 있으며 사고의 질적 양적 방법을 모두 포함한다. 또한 비례추론은 비율, 비, 몫 그리고 분수와 같은 유리수 표현 사이의 전체적(holistic) 관계에 대한 추론을 포함한다. 따라서 일반적인 인지능력으로 보는 Piaget와 달리 Karplus 등(1983)과 Lesh 등(1988)은 비례추론을 수학적 추론의 일부로 보고 있음을 알 수 있다.

Lesh 등이 제기한 비례추론의 개념은 단순히 방정식의 두 변이 같음을 이해하는 것을 넘어 동치류, 변수, 그리고 변환과 같은 대수적 이해와 깊은 관련이 있음을 밝히고 있다. 그러나 Piaget의 연구 이래로 많은 연구자들이 비의 구조적인 불변을 인식하지 않고도 옳은 답을 구하는 과정을 비례추론과 구분하지 않고 막연히 적용하고 있음을 찾아볼 수 있다(Lamon, 1989). 그 예는 Tourniaire와 Pulos(1985)가 비례추론에 관한 문헌을 정리한 논문에서 찾을 수 있다.

본고에서는 '비례추론'을 실세계의 현상을 추측하는데 유용한 비개념의 이해뿐 아니라 일차함수 관계가 존재하는 두 변수의 공변성과 승법적 비교를 포함하는 수학적 추론으로 해석한다. 이는 Piaget의 입장을 포함하긴 하나 Lesh의 입장에 더 가깝다고 볼 수 있다.

2. 비례추론의 문제유형과 문제해결전략

The Rational Number Project에서는 비례성을 평가하기 위해 크게 세 가지 유형의 과제를 개발하였다(Cramer & Post, 1993). 첫 번째 유형은 비례추론을 연구할 때 가장 자주 사용하는 결측치 문제(missing value problem)로 세 개의 수가 주어지고 남은 하나의 수를 구하는 문제이다. 대표적인 문제는 Karplus 등(1974)의 '키다리와 난쟁이' 문제가 있다. 두 번째 유형은 수치 비교 문제로 두 개의 비가 주어지고 이 비를 비교하는 문제이다. 가장 대표적인 문제는 Noelting(1980a)의 주스 문제가 있다. 세 번째 유형은 질적인 추측과 비교에 관한 문제로 구체적인 수에 의존하지 않고 비교하거나 추측하는 문제이다. 구체적인 문제의 예는 다음의 <표 2>와 같다.

<표 2> Cramer 와 Post의 비례추론 문제 유형

| | |
|---|---|
| 결측치 문제 | 난쟁이 씨의 키는 클립 6개의 길이와 같고 큰 단추 4개의 크기와 같다. 키다리 씨는 큰 단추 6개의 크기와 같다고 한다. 키다리 씨의 키를 클립으로 재면 클립 몇 개와 같은가? |
| 수치 비교 문제 | 지수는 오렌지 분말 2컵과 물3컵을 섞어 주스를 만들었다. 영신이는 오렌지 분말3컵과 물4컵을 이용하여 주스를 만들었다. 어느 주스가 더 진하다고 할 수 있는가? |
| 질적인 추측·비교 문제 | 성민이는 어제보다 레모네이드 분말의 양은 적게 하고 물은 더 많이 넣었다. 성민이가 만든 레모네이드의 맛은 어제보다<br>a) 더 진하다. b) 더 약하다. c) 어제와 같다. d) 충분한 정보가 없다. |
| | 민수와 정희는 서로 다른 판자에 일렬로 못을 박고 있다. 민수는 지희보다 많은 못을 가지고 있지만 판자의 길이가 정희보다 짧다고 한다. 판자에 박힌 못과 못 사이의 거리는 누구의 것이 더 가까운가? |

과거 비례추론을 정의하기 위한 많은 연구들이 결측치 문제에 대한 학생들의 반응을 다루었다(Noelting, 1980a; 1980b; Karplus, Pulas, & Stage, 1983). 그 이유는 결측치 문제가 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 꼴로 표현되는 문제 유형이기 때문이었을 것이다. 그러나 결측치 문제는 비례추론의 한 유형일 뿐 비례추론 전부를 나타낸다고 볼 수 없다.

Kaput과 West(1994)는 결측치 문제를 해결하는 학생들의 전략을 더해가기 과정(build-up process), 생략된 더해가기 과정(Abbreviated Build-up process), 단위 요인 접근(unit factor approaches), 형식적 방정식에 기반을 둔 접근(The Formal equation-based approach)으로 나누었다. 다음 예를 통하여 4가지 접근 방법의 차이를 설명해보자.

> Ellen, Jim, 그리고 Steve는 3개의 헬륨 풍선을 사고 2달러를 지불하였다. 그들은 학급의 모든 학생들에게 풍선을 사다주기로 마음먹었다. 24개의 헬륨풍선을 사기 위해 얼마를 지불하여야 하는가? (Lamon, 1993a, p53)

더해가기 과정은 다음과 같이 표를 이용하여 해결하는 방법이다.

| 헬륨풍선개수 | 3 | 6 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 금액 | 2 | 4 | 6 | 8 |

위와 같은 표를 만들어 가면 24개를 사는데 16달러가 필요함을 알 수 있다. 생략된 더해가기 과정은 반복되는 덧셈 과정을 생략하고 곱셈이 일어나는 과정으로 24를 3으로 나누면 8이 되면 이 값을 2에 곱하여 16을 얻는 과정을 말한다. 단위 요인 접근은 풍선 1개의 금액이 $\frac{2}{3}$ 달러임을 알고 $24\times\frac{2}{3}=16$(달러)를 얻는 과정이다. 형식적 방정식에 기반을 둔 접근은 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$를 이용하여 해결하는 것을 말한다.

Lamon(1993)은 비례추론 문제 유형으로 문제 상황 구조에 따라 의미론적 유형(semantic type)을 구분하였다. 구체적인 예는 다음의 <표 3>과 같다.

Lamon은 의미론적 유형에 따라 형식적 전략을 배우지 않은 학생들이 어떻게 비례관계를 이해하고 해결하는가에 대한 연구에서 단위화(unitizing)와 기준화(norming)가 비례추론 발달에 중요한 과정임을 제안하였다. 이 때, 단위화는 주어진 비 관계로부터 대상 단위를 구성하는 것을 말하며 기준화는 대상 단위에서 다른 단위를 재해석하는 과정을 말한다.

학생들의 비례적 사고에 관한 연구들을 살펴보면 비례 상황이 포함된 다양한 문제 맥락에 따라 학생들의 문제해결전략도 다양함을 알 수 있다. 또한 형식적 알고리즘을 배우지 않은 학생들을 대상으로 어떤 전략을 사용하는지 탐구함으로써 비례 추론을 발달시키는데 핵심이 되는 사고 과정을 제안하고 있다. 그렇다면 실제 교과서는 비와 비례 개념의 이론과 학생들의 사고 전략을 얼마나 반영시키고 있을까? 다음절에서는 중학교 수학 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학개념을 분석한다.

<표 3> Lamon(1993)의 비례추론 문제 유형

| | |
|---|---|
| 유형1 : 양의 측정 | 2판의 피자를 7명의 여학생이 먹고 1판의 피자를 3명의 남학생이 먹는다. 여학생과 남학생 중 누가 피자를 더 많이 먹었다고 할 수 있는가? |
| 유형2 : 부분-부분-전체 | 두 가지 종류의 계란 판이 있다. 한 판에는 8개의 흰 계란과 4개의 노란 계란이 들어 있고 다른 판에는 10개의 흰 계란, 8개의 노란 계란이 들어 있다. 어느 판에 노란 계란이 더 많다고 할 수 있는가? |
| 유형3 : 관련된 집합 | 어떤 학생이 한 운전사의 운전 거리를 나타낸 표를 보고 있다. 130마일, 325마일, 445마일, 510마일을 운전하는 동안 각각 2, 5, 7, 8시간이 걸렸다. 이 운전사는 항상 일정한 속도로 운전했다고 말할 수 있는가? |
| 유형4: 확대와 축소 | 두 가지 종류의 나무 그림이 있다. 나무 A는 8피트이고 나무 B는 10피트이다. 5년이 지나고 나무 A는 14피트가 되었고 나무 B는 16피트가 되었다. 5년 동안 어느 나무의 높이가 더 많이 자랐다고 할 수 있는가? |

## Ⅳ. 중학교 수학 교육과정에서 비례적사고가 필요한 수학 개념

제7차 교육과정은 비와 비율에 대해 다루는 양이 6차에 비해 적으며 '정비례와 반비례'와 같은 단원은 <7-가>로 올라간 상태이다. 초등학교 <6-가> 에서는 명시적으로 비와 비례식에 관한 단원을 설정하여 ① 두 수

량 사이의 비와 비율의 의미를 이해하고, ② 비율을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있으며, ③ 비례식을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 하고 있다. 그러나 비와 비율의 지도는 실생활의 장면을 들어 지도하고, 여러 가지 비율 사이의 관계는 강조하지 않을 것과 비례식은 간단한 경우에 한하여 지도할 것을 권고하고 있다. 초등 교과서에 나타난 비와 비율 그리고 비례에 관한 개념을 정리하면 다음과 같다.

> 남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 : 를 사용합니다. 남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3 : 5로 나타내고, 3대 5라고 읽습니다. 이것을 5에 대한 3의 비 또는 3의 5에 대한 비라 하고 간단히 3과 5의 비라고 합니다(교육부, 2002a, p86).
> 자원 봉사자 8명을 기준으로 하여 여자 5명을 비교할 때, 8명을 기준량, 5명을 비교하는 양이라고 합니다.
> 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 합니다
> 기준량을 1로 볼 때의 비율을 비의 값이라고 합니다.
> 자원 봉사자 8명을 1로 볼 때, 8에 대한 5의 비의 값은 $\frac{5}{8}$입니다.
>
> $(\text{비율}) = \frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$ (교육부, 2002a, p.88).
>
> 기준량을 100으로 할 때의 비율을 백분율이라 하고, 기호 %를 써서 나타냅니다. 85%를 85퍼센트라고 읽습니다(교육부, 2002a, p90).
>
> $2:3=4:6$ 과 같이 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식을 비례식이라고 합니다.
> (교육부, 2002b, p.101)

중학교 교육과정에서 비와 비례 개념이 내재된 수학 개념을 찾아보면 '규칙성과 함수' 영역에서는 정비례와 기울기, '도형' 영역에서 닮음비와 삼각비에서 나타나고 상대적인 값을 다루는 '확률과 통계', 측정단위의 관계를 밝히는 '측정' 영역에서 찾아볼 수 있다. 본 연구에서는 비례추론과 관련 깊은 정비례와 기울기 그리고 닮음비를 중심으로 교과서에 제시된 정의가 비와 비례 개념을 포함하고 있는지, 교과서에 제시된 문제가 학생들의 비례추론 향상에 도움이 될 수 있는지 선행 연구 결과와 비교하여 분석하였다.

1. 정비례

<7-가>에 나타난 정비례의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

> 일반적으로 변화하는 두 양 $x, y$ 에서 $x$ 의 값이 2배, 3배, 4배, ...로 됨에 따라 $y$ 의 값도 2배, 3배, 4배, ...로 될 때, $y$ 는 $x$ 에 정비례한다고 한다. (강행고 외, 2007a, p.147)

정비례는 용어상에서 비례를 포함하고 있어 초등학교 때 학습한 비와 비례 개념을 연상시킬 수 있다. 초등학교 때 이미 $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$라는 비례식을 학습한 상태이나 $x$ 의 값이 2배, 3배, ...로 됨에 따라 $y$ 의 값도 2배, 3배, 4배로 된다는 정수비를 이용하여 정의를 유도하고 있어 학생들이 두 변수 사이에 자연수 배가 됨을 인식할 수만 있으면 정비례를 이해할 수 있도록 되어 있다.

제 7차 교육과정에서 정비례가 함수 개념 이전에 제안된 것은 두 변수 사이의 공변 관계를 인식하여 함수를 쉽게 도입하기 위함이다. 이를 위해 다음과 같은 형식화를 하고 있다.

> 일반적으로 0이 아닌 수 $a$ 에 대하여 $x$ 와 $y$ 사이의 관계식이 $y=ax$ 로 나타내어질 때, $y$ 는 $x$ 에 정비례한다.(강행고 외, 2007a, p.148)

따라서 학생들이 두 변수가 정비례 관계인지 알아보기 위해서는 하나의 변수가 몇 배가 될 때 다른 변수가 어떻게 변하는지 살펴보지 않아도 관계식의 형태만 보면 정비례 관계인지 아닌지를 판단할 수 있다. 이 과정에서 관계식의 초점은 공변에 맞추어 있을 뿐 비 $\frac{y}{x}$가 항상 $a$ 로 일정하다는 부분은 생략되어 있어 6학년 때 학습한 비례식과의 연결을 고려하기 힘들다.

맥락 속에서 정비례 관계식에 대한 문제해결과정을 살펴보기 위해 <그림 2>와 같은 문제를 생각해보자.

> 바닥에 $x$개의 타일을 이어 붙였을 때, 그 넓이는 $ycm^2$이라 한다. 타일 한 개의 넓이가 $9cm^2$일 때 다음 물음에 답하여라.
> (1) $x$ 와 $y$ 사이의 관계식을 구하여라.
> (2) 10개의 타일을 이어붙일 때, 그 넓이를 구하여라.
> (강행고 외, 2007a, p.171).

<그림 2> <7-가>의 정비례 문제의 예

<그림 2>의 과제에 대한 풀이는 다음과 같이 제시하고 있다.

> 생각하기 : 타일의 개수와 타일을 이어붙인 넓이 사이에는 정비례 관계가 있다.
> 풀이 : (1) $y=ax$ 에서 $x=1$일 때, $y=9$이므로 $a=9$이다.
> (2) $x$에 10을 대입하면 $y=9\times 10=90(cm^2)$
> (강행고 외, 2007a, p.171)

<그림 3> <7-가>의 정비례 문제의 풀이

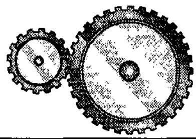
<그림 3>의 방법은 정비례가 6학년 때 배운 비례 개념과 관련이 깊음을 인식하는데 거의 도움이 되지 않는다. 대부분의 학생들은 <그림 2>를 새로운 풀이 방법으로 인식하고 다른 문제도 이러한 방법을 적용하려 할 것이다. 이 문제에서 (2)번을 먼저 물어보고 (1)번을 물어본다면 타일 1개의 넓이가 9라는 단위가 1일 때의 값을 주고 타일이 10개일 때의 넓이를 묻는 질문이 되어 6학년 때 학습한 비례 개념과 연결될 수 있고 형식적 관계식을 세우지 않아도 해결가능한 문제가 된다.

<그림 2>의 문제는 $\frac{1}{9}=\frac{x}{y}$ 또는 $\frac{1}{9}=\frac{10}{\square}$와 같은 비례식을 활용하여 해결할 수 있으나 오히려 어렵게 느낄 가능성이 있어 교과서에서는 사용하지 않고 있다.

<그림 4>의 두 문제를 생각해보자.

초등학교에서 비례식으로 해결할 수 있었던 문제가 <7-가>에 오면서 함수 관계로 변화되어 변수 $x$ 또는 $y$의 관계식을 찾는데 집중하게 되면서 비례식과 관련된 아이디어를 잊어버리게 될 가능성이 있다. 또한 초등학교에서 다루어지는 비례상수는 자연수가 아닌 경우도 다루고 있는 것에 비해 중학교에서 다루어지고 있는 비례상수는 실생활 맥락문제에 관한 한 모두 자연수로 한정되어 있어 중학교의 정비례 관계식에 대한 다양한 실생활 맥락문제가 필요하다.

> 비례식을 이용하여 문제를 풀어 봅시다.
>
> ▸ 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴가 있습니다. (가) 톱니바퀴가 2번 도는 동안에 (나) 톱니바퀴가 3번 돕니다. (가) 톱니바퀴가 54번 도는 동안에 (나) 톱니바퀴는 몇 번 돌게 됩니까?
> (교육부, 2002a, p. 108)
>
> 톱니의 수가 각각 16개, 32개인 톱니바퀴 A, B가 서로 맞물려 돌고 있다. A 가 $x$ 번 회전할 때, B 는 $y$ 번 회전한다고 한다. $x$ 와 $y$ 사이의 관계식을 구하고 그 그래프를 그려라 (강행고 외, 2007a, p.171).



<그림 4> <7-가>의 톱니바퀴 문제

2. 기울기

<8-가>에 나타난 기울기의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

> 일반적으로 일차함수 $y=ax+b$ 에서 $x$의 값의 증가량에 대한 $y$의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며 그 비율은 $x$의 계수 $a$ 와 같다. 이 증가량의 비율 $a$ 를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기라고 한다.
> 즉 일차함수 $y=ax+b$에서 그래프의 기울기는 다음과 같다.
>
> $$(\text{기울기})=\frac{(x\text{의 값의 증가량})}{(y\text{의 값의 증가량})}=a$$
>
> (강행고 외, 2007b, p.134).

증가량의 비율을 기울기라 정의하고 있는데 같은 양의 비교를 비라 하고 다른 양의 비교를 비율이라는 관점에서 볼 때는 변수 $x$와 $y$가 무엇인가에 따라 달라지겠지만 6학년에서 정의한 바와 같이 기준량에 대한 비교하

는 양을 비율로 본다면 이 정의에서 사용하는 단어는 비율이 적정한 용어일 것이다.

교과서에 제시된 문제들 중 기울기와 관련된 문제는 <그림 5>와 같다.

일차함수 $y=2x-1$에서 $x$의 값이 다음과 같이 증가할 때,

$\dfrac{(x\text{의 값의 증가량})}{(y\text{의 값의 증가량})}$ 을 구하여라.

(1) 0에서 3까지 (2) -2에서 2까지

(강행고 외, 2007b, p.135).

다음 일차함수의 그래프의 기울기를 말하여라.

(1) $y=3x-1$ (2) $y=-x+6$

(3) $y=\dfrac{3}{4}x+2$ (4) $y=-5x+\dfrac{1}{3}$

(강행고 외, 2007b, p.136).

<그림 5> <8-가>의 기울기와 관련된 문제

교과서에서 기울기는 $\dfrac{(x\text{의 값의 증가량})}{(y\text{의 값의 증가량})}$ 로 다루거나 $y=ax+b$ 에서 $a$ 의 값을 구하는데 사용하고 있어 두 양의 변화량의 비율이라는 의미가 희석되어 있다. 기울기는 고등학교 때 학습하는 변화율을 다루는 것과 밀접한 연관이 있는데 중학교에서 기울기는 변화의 의미를 찾을 수 있는 활동이 교과서에서 거의 찾아볼 수 없으므로 고등학교의 변화율은 기울기와 연결될 수 없는 또 다른 별개의 것이 되어버린다.

$y=ax(a\neq 0)$와 $y=ax+b(a\neq 0,\ b\neq 0)$는 수학적으로 어떻게 다른가? 두 함수의 그래프 모양이 모두 직선이라는 점에서는 공통점이 있지만 전자는 원점을 지나고 후자는 원점을 지나지 않는다는 점에서 큰 차이가 있다. $y=ax(a\neq 0)$는 정비례관계이나 $y=ax+b$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$는 정비례관계는 아니다. 과학시간에 $y=ax+b(a\neq 0,\ b\neq 0)$의 그래프도 비례관계로 다루고 있으나 엄밀하게 이야기하면 옳은 표현은 아니다. Cramer와 Post 등(1993)은 비례추론을 개발하기 위해서 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구별하는 능력이 필요하다고 밝힌 바 있다. 현재 우리나라 교과서에는 비례적인 상황과 비례적이 아닌 상황을 구별할 수 있는 영역을 찾아보기 어렵다.

기울기가 비례추론 개발에 도움이 되는 개념이 되기 위해서는 측정에서 기울기의 의미를 다루거나 실생활을 수학적 모델링하는 과정과 관련시키는 것이 필요하다. Simon과 Blume(1994)은 '측정으로서의 비(ratio-as-measure)'가 두 양 사이의 양적 관계를 비로 표현하는 것이라고 정의하고 측정으로서의 비를 이해하기 위해서 수학화의 일반적 지식이 선행되어야 한다고 주장하였다.

3. 닮음비

<8-나>에 나타난 닮음비의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

> 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 도형을 얻었을 때, 이 도형을 처음 도형과 서로 닮음인 관계에 있다고 한다.
>
> 두 닮은 도형에서 대응하는 변의 길이의 비를 닮음비라고 한다. (강행고 외, 2007c, p.87~88)

비를 이용한 정의가 모처럼 등장하게 되고 $1:2$와 같이 비의 기호를 사용한 식을 교과서 곳곳에서 찾을 수 있다. 비의 기호를 사용한 식을 이렇게 흔하게 발견할 수 있는 것은 6학년 때 이후로 처음이라고 할 수 있다. 닮음인 두 도형의 대응변의 길이를 구하기 위하여 비례식도 흔하게 사용하고 있다. 교과서에 따라 비례식을 사용하는 것은 조금 차이가 있는데 $a:b=c:d$ 라는 표현을 사용하고 있는 교과서도 있고 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 라는 표현을 사용하는 교과서도 있다. 어떤 표현을 사용하는 것이 학생들이 더 이해하기 쉬운지에 대한 연구 결과는 없다.

도형의 닮음에서 쉽게 찾아볼 수 있는 문제는 <그림 6>과 같다.

비례식을 해결할 때 학생들이 사용하는 전략은 내항의 곱과 외항의 곱이 같다 이다. 그 결과를 기억하고 활용할 수 있는 학생들은 많지만 왜 그런 결과를 얻을 수 있는가에 대해서 설명할 수 있는 학생들은 찾아보기 힘들다. 내항의 곱과 외항의 곱은 같다를 활용하게 되면 <그림 5>의 (2)는 일차방정식에서 미지수를 구하는 것과 같은 문제 형태가 되어 비례추론을 적용할 기회를 잃게 된다. Lesh 등(1988)은 비례식을 포함하는 문제가 모두

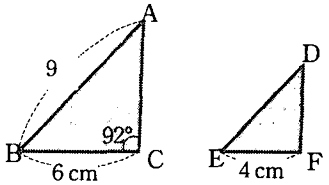
비례추론을 학습하는 것은 아니라는 것을 밝힌 바 있다.

**예제 1** 오른쪽 그림에서 △ABC ∽ △DEF일 때, 다음을 구하여라.

(1) △ABC 와 △DEF 의 닮음비

(2) $\overline{DE}$ 의 길이

(3) ∠F 의 크기




생각하기 : 평면도형에서 닮음의 성질을 이용한다.

풀이 :

(1) $\overline{BC}$와 $\overline{EF}$는 대응하는 변이고 $\overline{BC}$=6cm, $\overline{EF}$=4cm 이므로 닮음비는 $\overline{BC} : \overline{EF} = 6 : 4 = 3 : 2$

(2) 닮음비가 3 : 2 이고 $\overline{AB}$와 $\overline{DE}$는 대응하는 변이므로
$9 : \overline{DE} = 3 : 2 \quad \therefore \overline{DE} = 6$(cm)

(3) ∠F 와 ∠C 는 대응하는 각이므로 ∠F = ∠C = 92°

(강행고 외 , 2007c, p.88)

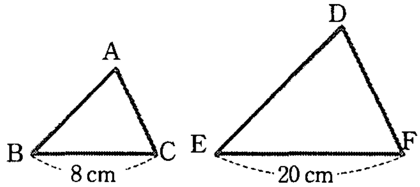
<그림 6> <8-나>의 닮음에 관한 문제

닮음은 Lamon(1993)의 분류유형에 따르면 확대와 축소 문제에 해당하는 것으로 형식적인 비례식을 학습하지 않은 학생들이 문제 상황의 승법적 관계를 잘 이해하지 못하는 문제유형으로 꼽는 영역이다. Nunez 등(1993)은 형식적 알고리즘을 배우지 않은 건축일을 하는 십장들과 형식적 알고리즘을 배운 학생들을 대상으로 도면에 나타난 축척을 보고 실제 거리가 얼마인지를 질문하였을 때 학교에서 배운 알고리즘을 적용한 학생은 한 명 밖에 없었다고 한다. 학교에서 배운 형식적 지식이 실제 활용문제에서는 적용이 안되는 사례를 보여준다고 할 수 있다.

도형의 닮음에서는 닮음비를 이용하여 대응변의 길이를 구하는 문제가 닮음인 도형의 넓이의 비와 부피의 비를 구하는 문제도 함께 다루고 있다. 그 예는 <그림 7>과 같다.

닮은 도형의 넓이를 구하기 위해서 학생들은 닮음비의 제곱이라는 사실과 대응변의 길이를 구하는 문제와 마찬가지로 비례식을 활용해야 한다. De Bock, Van Dooren, Janssens 그리고 Verschaffel(2002)은 학생들이 닮은 도형의 넓이의 비와 부피의 비도 선형관계일 것이라는 직관적 추론을 사용하여 해결하는 사례를 보고하고 있다.

**예제 1** 오른쪽 그림에서 △ABC ∽ △DEF이고, △ABC 의 넓이가 24 cm²일 때, △DEF 의 넓이를 구하여라.




생각하기 : 두 닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다.

풀이 : 닮음비가 2 : 5 이므로, 넓이의 비는 22 : 52 = 4 : 25이다. 따라서 △ABC : △DEF = 24 : △DEF = 4 : 25

$\therefore$ △DEF = 150 cm²

(강행고 외, 2007c, p.112)

<그림 7> <8-나>의 닮은 도형의 넓이에 관한 문제

'닮음'은 기하학적 맥락에서 비의 좋은 소재이고 길이, 부피, 넓이 등 다양한 차원에서 비례식을 이해하고 시각화할 수 있는 이점에도 불구하고 비례추론과 관련된 활동은 소홀히 다루어지고 있다.

## V. 결 론

본 연구는 비, 비율 그리고 비례에 대한 역사로부터 학자들의 다양한 용어의 해석에 이르기까지 이론적인 접근에서 시작하여 선행연구에서 나타난 학생들의 비례적 사고의 특징을 검토한 후 우리나라 중학교 수학 교육과정에서 비와 비례 개념을 포함한 수학 개념이 교과서에서 어떻게 나타나는지 분석하였다.

비와 비율 그리고 비례 개념은 어느 한 영역에서만 다루어지는 것이 아니라 유리수, 기울기, 방정식, 함수, 측정 등 다양한 영역에서 찾을 수 있다는 말을 빌리지 않아도 다양한 영역에서 나타나고 있음을 짐작할 수 있다. NCTM의 Principles and Standards for School

Mathematics(2000)는 비례 관계를 잘 인식하기 위해서는 비례 관계가 있는 양을 인식하고 수로 표현할 수 있으며 그 관계를 인지하여 표, 그래프, 방정식 등으로 나타낼 수 있어야 함을 밝히고 있다. 또한 비례성은 6-8학년에서 학습하는 수학 주제를 통합할 수 있어 중요하게 다루어야 한다고 하였다.

그러나 중학교 교육과정에서 비와 비율, 그리고 비례 개념이 내재된 수학개념을 분석한 결과 정의에서 비와 비율 개념을 사용하고 있으나 실제 비례 관계를 이해하고 적용할 수 있도록 이끌어줄 수 있는 학습 상황이 부족하며 다른 영역과의 관련성도 고려되지 않아 단절된 지식으로 학습할 가능성이 높음을 시사하고 있다. 특히 제7차 교육과정에서 실생활 소재를 많이 추가하고 탐구 활동의 비중이 제6차 교육과정에 비해 증가하였으나 비례추론이 이루어질 수 있는 맥락 문제는 찾아보기 힘들었다. 본 연구의 결과는 초등학교의 비와 비례 개념을 분석한 정은실(2003)의 연구 결과인 교과서에 제시된 문제들이 비와 비례 개념의 본질을 인식하게 하는 사고 교육보다는 비 또는 비례식 그 자체의 외형적 표현과 기계적 알고리즘에 치우쳐 있다는 것과 유사한 결론임을 상기시켜 볼 때 교육과정 전반의 문제라고 볼 수 있다.

이상의 결과로부터 교과서에서 단절된 지식으로 학습하는 비와 비례 개념의 연결성을 고려할 수 있는 교수학습 자료의 개발이 필요함을 알 수 있다. 또한 Nunez 등(1993)의 연구 결과에서 학교 교육을 받지 않은 십장·어부들과 중학교 학생들을 비교한 실험 연구에서 십장들과 어부들은 비례 문제를 해결하기 위한 절차적 과정을 따로 배우지는 않았으나 더 유연한 지식을 개발했으며, 친숙하지 않은 맥락 문제 과제를 더 잘 해결함을 보여주었듯이 다양한 맥락 속에서 학생들이 어떻게 비와 비례 개념을 이해하고 발달시키는지에 대한 후속 연구도 필요하다.

## 참 고 문 헌


강행고·이화영·박진석·이용완·한경연·이준홍·이혜련·송미현·박정숙 (2007a). 중학교 수학 7-가. 서울 : (주) 중앙교육진홍연구소.

강행고·이화영·박진석·이용완·한경연·이준홍·이혜련·송미현·박정숙 (2007b). 중학교 수학 8-가. 서울 : (주) 중앙교육진홍연구소.

강행고·이화영·박진석·이용완·한경연·이준홍·이혜련·송미현·박정숙 (2007c). 중학교 수학 8-나. 서울 : (주) 중앙교육진홍연구소.

교육부 (2002a). 수학 6-가. 서울 : 대한 교과서 주식회사

교육부 (2002b). 수학 6-나. 서울 : 대한 교과서 주식회사

유현주 (1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

임경화 (2007). 한국과 싱가포르의 수학 교과서 비교 연구 - 비와 비례 단원을 중심으로-, 이화여자대학교 석사학위논문.

신재은 (2005). 초등학생을 위한 비 개념 지도방안. 경인교육대학교 석사학위논문.

장혜원 (2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의, 대한수학교육학회지 학교수학, **4(4)**, pp.633-642.

정은실 (2003a). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석, 대한수학교육학회지 학교수학, **5(4)**, pp.421-440.

정은실 (2003b). 비 개념에 대한 교육적 분석, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, **13(3)**, 247-265.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting Research To Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, **86(5)**, pp.404-407

Carpenter, T.; Gomez, C.; Rousseau, C.; Steinthorsdottir, O.B.; Valentine, C. & Wagner, L. (1999). *An analysis of students' construction of ratio and proportion understanding*. Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

De Bock, D.; Van Dooren, W.; Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and irresistibility of secondary school students'errors, *Educational Studies in Mathematics*, **50**, pp.311-334.

Fowler, D. H. (1979). Ratio in early Greek mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society,* **1(6)**, pp.807-846.

Grattan-Guinness, I. (1997). *The norton history of the mathematical sciences : the rainbow of mathematics,* New York: W.W.Norton & Company.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary.* New York: Dover Publications.

Hull, S. (2000). *Teachers' mathematical understanding of proportionality: links to curriculum, professional development, and support.* Unpublished doctoral dissertations, The University of Texas at Austin.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking: From Childhood to Adolescence.* New York: Basic Books, Inc.

Kaput, J. & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems : Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.235-287). Albany, NY: SUNY Press.

Karplus, R.; Polos, S. & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics* **14,** pp.219-233.

Katz, V. J (1998). *A history of mathematics :An introduction second edition.* Addition-Wesley Educational Publishers.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional functions of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* pp.101-144, Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought : from ancient to modern times,* New York: Oxford University Press.

Lamon, S. (1989). *Ratio and proportion : Preinstructional cognitions.* Unpublished doctorial dissertation, University of Wisconsin, Madison.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion : Connecting content and children's thinking, *Journal for Research in Mathematics Education* **24(1)**, pp.41-61.

Lesh, R.; Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts & operations for middle graders* pp. 93-118, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I -Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics* **11**, pp.217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II -Problem-structure at successive stages : problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring, *Educational Studies in Mathematics* **11**, pp.331-363.

Nunes, T.; Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* New York : Cambridge University Press.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts, In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* pp.162-181, Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* pp.162-181, Reston, VA :

National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M.A., & Blume, G.W. (1994b). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elemenrary teachers, *Journal of Mathematical Behavior,* **13**, pp.183-197.

Sylla, E. (2002). Compounding ratios :Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton's Principia. In E. Mendelsohn, (Ed.). *Transformation and tradition in the sciences*, First paperback edition pp11-43, Cambridge : Cambridge University Press.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning* pp.179 - 234, New York: SUNY Press.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning : A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics* **16**, pp.181-204.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* pp.127 - 174, New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

# An analysis on mathematical concepts for proportional reasoning in the middle school mathematics curriculum

**Oh Nam Kwon**
Seoul National University
E-mail: onkwon@snu.ac.kr

**Jung Sook Park**
Seoul National University
E-mail: pjsook9@snu.ac.kr

**Jee Hyun Park**
Seoul National University
E-mail: jeannei4@snu.ac.kr

The concepts of ratio, rate, and proportion are used in everyday life and are also applied to many disciplines such as mathematics and science. Proportional reasoning is known as one of the pivotal ideas in school mathematics because it links elementary ideas to deeper concepts of mathematics and science. However, previous research has shown that it is difficult for students to recognize the proportionality in contextualized situations.

The purpose of this study is to understand how the mathematical concept in the middle school mathematics curriculum is connected with ratio, rate, and proportion and to investigate the characteristics of proportional reasoning through analyzing the concept including ratio, rate, and proportion on the middle school mathematics curriculum. This study also examines mathematical concepts (direct proportion, slope, and similarity) presented in a middle school textbook by exploring diverse interpretations among ratio, rate, and proportion and by comparing findings from literature on proportional reasoning.

Our textbook analysis indicated that mechanical formal were emphasized in problems connected with ratio, rate, and proportion. Also, there were limited contextualizations of problems and tasks in the textbook so that it might not be enough to develop students' proportional reasoning.

* ZDM Classification : F83
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : ratio, rate, proportion, proportional reasoning