韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 8. 제 46권, 제 3호, 303-314

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2007, Vol. 46, No. 3, 303-314

바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)
김 문 섭 (경상대학교 대학원)

Ⅰ. 서 론

공간 도형은 우리를 둘러싼 주변 환경 자체이므로, 수학화의 일차적인 대상이 된다. 그러므로 학생들이 공간 도형을 올바르게 표현하고, 공간 도형에 대한 상상력을 계발하는 것은 수학교육학의 중요한 과제들 중의 하나라고 할 수 있다. 강시중(1991, p.364)은 기하교육의 목표들 중의 하나로 '기본적인 도형지도를 통하여 공간 개념의 이해를 깊게 한다'고 규정하면서, 기하교육에서 공간개념의 중요성을 강조하였다. NCTM(2000)도 중등학교의 기하학습에서 공간 관계에 대한 시각화와 추론을 중요한 기본적인 내용으로 규정하면서, 학생들이 공간적으로 생각하고 추론할 기회를 가져야 함을 강조하였다. 결국, 중등학교 기하영역의 교수-학습에서 공간도형에 관련된 다양한 탐구활동과 상응하는 교수 방법의 계발은 중요한 교수학적 문제임을 알 수 있다.

Kolmogorov(1959, p.10)는 '기하학적 상상력은 수학의 모든 영역에서 중요한 역할을 한다는 것은 두말할 나위도 없을 것이다. 예를 들어, 어떤 학생이 눈을 감고 그림에 의지하지 않고, 정육면체의 중심을 지나며 한 대각선과 직교하는 평면이 정육면체와 교차하여 얻어지는 절단면을 상상한다면, 그 학생을 훌륭한 수학자(일반 학생들과 비교했을 때)라 할 수 있을 것'이라고 주장했다. 즉, Kolmogorov는 수학탐구에서 공간상상력이 중요하며, 공간상상력의 계발에서 다면체의 절단면 탐구가 의미로운 활동임을 지적하였다.

한편, Gangnus & Gurvits(1935, pp.70-71)는 '다면체의 절단면 작도는 학생들의 공간표상 능력의 계발을 위해 중요한 의미를 가진다. 다면체의 절단면 작도는 학생들이 공간적인 형상들을 보다 잘 느끼고 보도록 도와준다'고 주장하였다. 이로부터 다면체의 절단면 탐구는 공간도형 탐구 및 공간상상력 계발의 중요한 도구가 된다는 것을 알 수 있다.

공간상상력에 관련된 국내의 연구들을 분석해 보면, 첫째 공간상상력의 본질 규명에 관련된 연구로 권오남·박경미·임형·허라금(1996), 한기완(2001), 나귀수(1996) 등이 있으며, 둘째 공간상상력의 계발에 관련된 연구로 류성림(1999), 김창일·김신좌(2002), 남승인(2003), 이종희·홍경아(1995) 등이 있다. 이들 연구를 통해, 수학교육에서 공간상상력의 다양한 측면들이 규명되고, 공간상상력의 계발을 위한 몇 가지 방법들이 제안되었다는 것은 교육적으로 의미롭다고 할 수 있다. 그러나 공간상상력의 계발에서 중요한 역할을 하는 다면체의 절단면 작도에 관련된 연구는 아직 없었다.

본 연구는 공간도형의 탐구 및 공간상상력의 계발에서 중요한 역할을 하는 다면체의 절단면 작도, 상응하는 지도 방법 모색에 관련된 문헌연구이다. 이를 위해, 본 연구에서는 첫째, 정사면체와 정육면체의 다양한 절단면 작도의 도구가 되는 바탕문제들을 추출하며, 둘째 이들 절단면 작도 문제의 해결에 관련된 탐색 수행과정을 상세히 기술할 것이다. 이를 통해, 다양한 다면체들에 대한 절단면 작도문제의 해결 및 이에 관련된 교수-학습 방법의 계발에 체계적으로 접근할 수 있는 의미로운 연구 방향을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 절단면 작도를 위한 바탕문제

한 수학 문제는 다른 문제와 어떤 특징을 중심으로 관련을 맺게 된다. 문제들 사이의 관련성에 대해,

* 2007년 8월 투고, 2007년 8월 심사 완료
* ZDM분류 : D54
* MSC2000분류 : 97C50
* 주제어 : 정사면체, 정육면체, 바탕문제, 작도, 절단면.

Dorofiev(1999, p.209-210)는 '각각의 문제는 내용에 따라, 논증 방법에 따라, 사용된 개념들에 따라 일정한 영역을 가진다. 동시에, 각각의 문제는 자신의 특성들에 관련된 다른 문제들의 다양한 영역에 속하게 된다'고 하였다. 즉, 각각의 수학 문제는 내용, 해결방법, 관련된 개념을 중심으로 다른 문제들과 일정한 관련을 맺게 된다. 수학 문제의 해결과정에서 이러한 관련성은 탐색수행의 방향을 결정하는 중요한 요인이 되기도 한다. 예를 들어, Polya(1957)는 '전에 유사한 문제를 풀어본 적이 있는가' 라는 발견술적 질문을 문제해결의 계획수립 단계에서 권고하였다.

문제들 사이의 관련성을 좀더 구체화시킨 연구로, Sharygin(1994)은 다른 문제의 해결에 사용되는 수학적 사실이나 문제해결 방법을 포함하고 있는 문제를 바탕문제라 하였고, 이들 문제를 활용하여 해결하는 문제를 응용문제라고 규정하면서, 기하 문제들을 바탕문제-응용문제와 같은 형태로 체계화하고, 효율적인 문제해결 방법을 연구하였다.

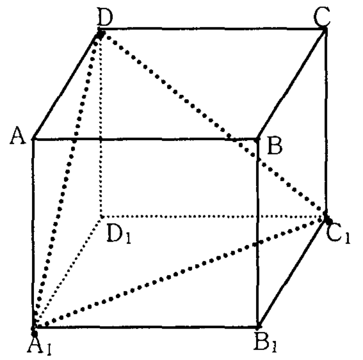
한편, Sharygin과 같은 맥락의 문제해결 방법을 한인기 · 꼴랴긴(2006)의 연구에서 볼 수 있는데, 여기서는 문제해결을 위한 탐색 수행의 방법으로 하위문제를 제시하였다. 예를 들어, '교차하는 두 직선으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으며, 주어진 점 O에서 d만큼 떨어진 점들을 구하여라'는 작도 문제를 두 개의 하위문제 '교차하는 두 직선에서 같은 거리만큼 떨어진 점들을 작도하여라', '주어진 점 O에서 d만큼 떨어진 점들을 작도하여라'로 나누어 문제해결의 탐색을 수행하였다.

한인기 · 꼴랴긴의 연구에 제시된 하위문제는 Sharygin의 바탕문제와 같은 맥락으로 이해될 수 있다. 본 연구에서는 정사면체와 정육면체의 다양한 절단면을 작도하는데 중요한 역할을 하는 기본적인 작도문제를 바탕문제로 규정할 것이다. 이때, 추출된 바탕문제들은 다양한 절단면의 작도에 있어 문제해결 탐색의 도구가 되어, 효율적인 문제해결의 기초가 될 것이다.

바탕문제들을 추출하기 전에, 몇몇 작도 문제들을 우선 살펴보자.

문제 1. 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 세 꼭지점 D, A_1, C_1을 지나는 평면에 의한 정육면체의 절단면을 작도하여라.

평면에 의한 다면체의 절단면을 작도하기 위해선, 다면체의 면과 절단하는 평면의 교선을 작도해야 한다. 문제 1에서는 평면 DA_1C_1과 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 면 AA_1D_1D의 교선에 속하는 두 점 A_1, D, 면 $A_1B_1C_1D_1$와의 교선에 속하는 두 점 A_1, C_1, DD_1C_1C와의 교선에 속하는 두 점 C_1, D가 주어졌다. 그러므로 점 D, A_1, C_1을 연결하는 자명한 작도를 통해, 절단면이 얻어진다(그림 1).



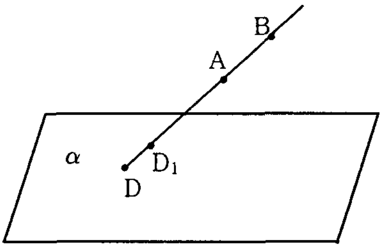
<그림 1>

문제 1의 작도에/서와 같이, 절단하는 평면과 다면체 면의 교선을 작도할 때에, 교선에 속하는 두 점이 주어진 경우의 교선 작도를 자명한 작도라 부르자. 문제 1은 세 번의 자명한 작도에 의해 절단면을 얻을 수 있으며, 문제해결을 위해 그밖의 어떤 바탕문제도 필요하지 않다.

이제, 자명하지 않은 경우에 대해 살펴보고, 이로부터 바탕문제들을 추출하자.

문제 2. 평면 α, α의 같은쪽에 α로부터 서로 다른 거리만큼 떨어진 두 점 A, B가 주어졌다. A, B를 지나는 직선과 평면 α의 교점을 작도하여라.

이 문제는 얼핏 쉬운 것으로 생각될 수 있다. 즉, 직선 AB를 긋고, 평면 α와의 교점을 대략적으로 잡아, 이것을 직선 AB와 평면 α의 교점이라 할 수도 있다. 그런데, <그림 2>에서는 직선 AB를 길게 혹은 짧게 작도함에 따라 D_1이 교점이 될 수도 있고, D가 교점이 될 수도 있다. 결국, 대략적인 교점찾기를 통해서는 주어진 문제의 정답을 구하지 못한다.



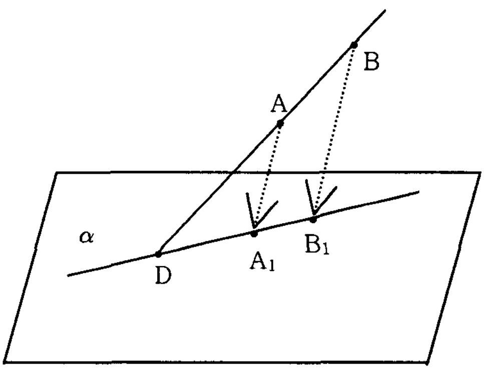
<그림 2>

그렇다면, 교점 D를 정확하게 결정하는 방법은 무엇인가? 점은 두 직선의 교차에 의해서 결정될 수 있다. 즉, 평면 α에 속하며 점 D를 지나는 직선 l을 그으면, l과 직선 AB의 교점을 얻게 되고, 이 점이 직선 AB와 평면 α의 정확한 교점이 된다.

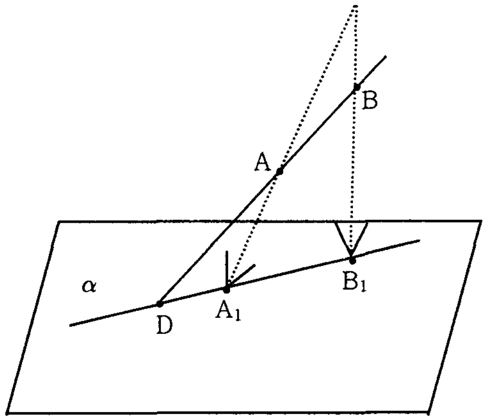
이제, 직선 l에 대해 생각해 보자. 직선은 두 점에 의해 결정되므로, 점 A, B를 평면 α에 사영시켜 얻어지는 점들 중에서 직선 l에 속하는 두 점 A_1, B_1을 안다면, 쉽게 직선 l을 작도할 수 있다. 그러면, 직선 AB와 평면 α의 교점을 얻을 수 있다.

점 A_1, B_1의 위치에 따라 <그림 3, 4, 5>와 같은 경우를 생각할 수 있다. <그림 3>은 A, B를 평면 α로 평행한 직선들에 의해 사영시켜 얻어진 점이 A_1, B_1인 경우이고, <그림 4, 5>는 교차하는 직선들을 따라 사영시켜 얻어진 점이 A_1, B_1인 경우이다.

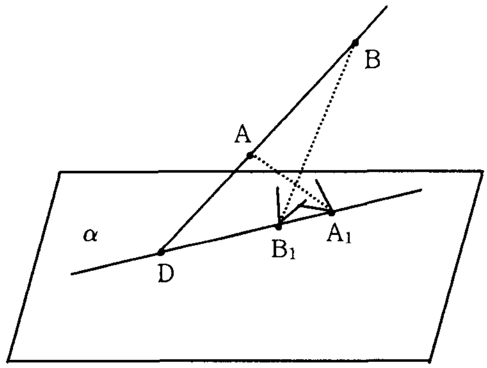
평면 α, α에 속하지 않는 점 M이 주어졌을 때, M의 α로의 사영 M_1을 작도하는 것은 쉽지 않을 수도 있다. 그러나 본 연구에서는 점 M을 α에 속하는 정사면체나 정육면체의 모서리로 사영하게 되므로, M_1을 쉽게 얻을 수 있다.



<그림 3>



<그림 4>



<그림 5>

<그림 3, 4, 5>로부터, 다음의 바탕문제 1, 바탕문제 2를 얻을 수 있다.

바탕문제 1. 평면 α, α의 같은쪽에 α로부터 서로 다른 거리만큼 떨어진 두 점 A, B가 있다. A, B를 평면 α로 평행한 직선들을 따라 사영시켜 얻어진 점 A_1, B_1이 주어졌다. 직선 AB와 평면 α의 교점을 작도하여라.

바탕문제 2. 평면 α, α의 같은쪽에 α로부터 서로 다른 거리만큼 떨어진 두 점 A, B가 있다. A, B를 평면 α로 교차하는 직선들을 따라 사영시켜 얻어진 점 A_1, B_1이 주어졌다. 직선 AB와 평면 α의 교점을 작도하여라.

바탕문제 1, 2에 대한 작도방법은 문제 2에 대한 논

의과정에서 충분히 언급되었으므로, 구체적인 기술은 생략한다. 이제, 바탕문제들을 이용하여, 주어진 평면과 한 직선에 속하지 않는 세 점을 지나는 평면의 교선을 작도할 수 있다.

바탕문제 3. 평면 α, α의 같은쪽에 α로부터 서로 다른 거리만큼 떨어져 있으며, 한 직선에 속하지 않는 세 점 A, B, C가 있다. A, B, C를 평면 α로 평행한 직선들을 따라 사영시켜 얻어진 점 A_1, B_1, C_1이 주어졌다. 평면 ABC와 평면 α의 교선을 작도하여라.

분석. 평면 ABC와 α의 교선 l이 작도되었다고 가정하자(<그림 6>). 교선 l을 작도하려면, l에 속하는 두 점을 알아야 한다. 그러한 두 점으로 직선 BA와 평면 α의 교점, 직선 BC와 평면 α의 교점을 생각하자. 그런데, 문제의 조건에서 A, B, C를 평면 α로 사영시킨 점 A_1, B_1, C_1이 주어졌으므로, 바탕문제 1에 의해 직선 BA와 평면 α의 교점 D, 직선 BC와 평면 α의 교점 E를 작도할 수 있다. 이제, 이들 교점을 연결하면, 구하는 교선을 얻을 수 있다(<그림 7>).

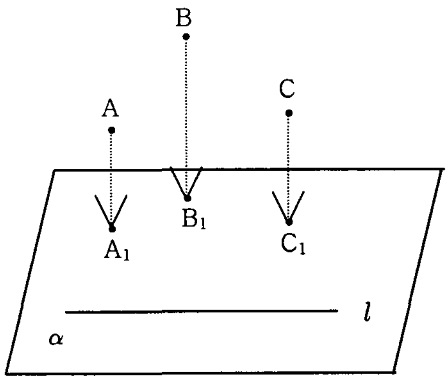
작도 방법.

(1) 직선 AB, BC를 작도한다.

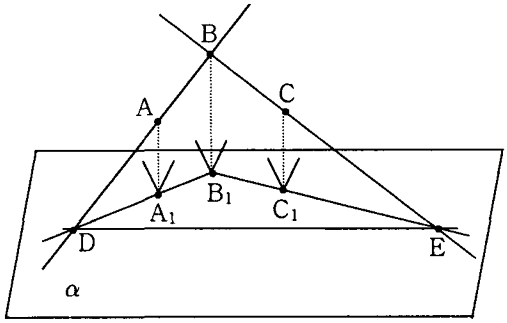
(2) 직선 A_1B_1을 작도하여, 직선 AB와의 교점을 D라 한다.

(3) 직선 B_1C_1을 작도하여, 직선 BC와의 교점을 E라 한다.

(4) 점 D, E를 지나는 직선 DE가 구하는 교선이다.



<그림 6>



<그림 7>

바탕문제 3에서는 세 점에 의해 주어진 평면과 평면 α의 교선을 작도하는 한 방법을 살펴보았다. 두 평면의 교선을 작도하는 다른 방법들도 존재하지만, 본 연구에서는 바탕문제 3의 방법을 중심으로 정사면체와 정육면체의 절단면 작도를 탐구할 것이다.

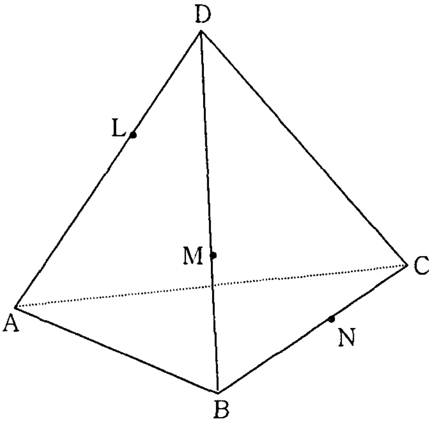
III. 정사면체와 정육면체의 절단면

평면은 여러 가지 방법으로 주어질 수 있다. 예를 들어, 한 직선에 속하지 않는 세 점으로, 주어진 직선을 지나며 다른 주어진 직선에 평행하다는 조건으로, 주어진 점을 지나며 다른 주어진 평면에 평행하다는 조건으로, 주어진 점을 지나며 꼬인 위치인 주어진 두 직선에 평행하다는 조건으로 한 평면이 결정될 수 있다. 본 연구에서는 정사면체와 정육면체를 절단하는 평면이 한 직선에 속하지 않는 세 점에 의해 주어지는 경우에 대해서만 고찰할 것이다.

1. 정사면체의 절단면

정사면체를 어떤 평면으로 절단하면, 절단면으로 삼각형, 사각형을 얻을 수 있다. 절단면이 삼각형인 경우는 문제 1에서와 같은 자명한 작도에 의해 얻어지므로, 생략하자. 이제, 절단면이 사각형이 되는 경우를 살펴보자.

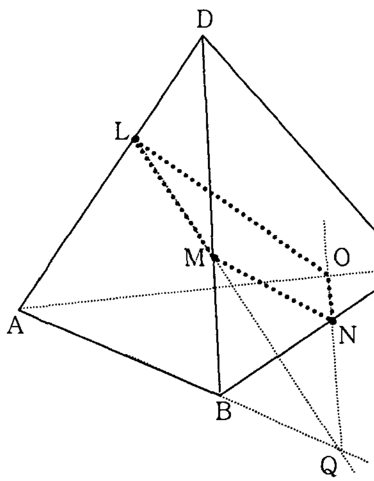
문제 3. 정사면체 DABC에서 모서리 DA, DB, BC에 점 L, M, N이 <그림 8>과 같이 주어졌다. 세 점 L, M, N을 지나는 평면에 의한 정사면체의 절단면을 작도하여라.



<그림 8>

분석. 절단면을 작도하기 위해, 절단면이 어떤 도형인가를 생각하자. 두 평면은 직선을 따라 교차하므로, 평면 LMN과 면 ABC는 N을 지나는 교선을 가진다. 그러므로 구하는 절단면은 사각형이 된다. 이제, 평면 LMN과 모서리 AC의 교점을 구하면, 절단면인 사각형을 얻을 수 있다.

평면 LMN과 모서리 AC의 교점을 구하자. 바탕문제 2를 이용하여 직선 LM과 면 ABC의 교점 Q를 구하고 나서 직선 QN을 작도하면, 모서리 AC와의 교점 O를 얻게 된다(<그림 9>).



<그림 9>

작도방법.

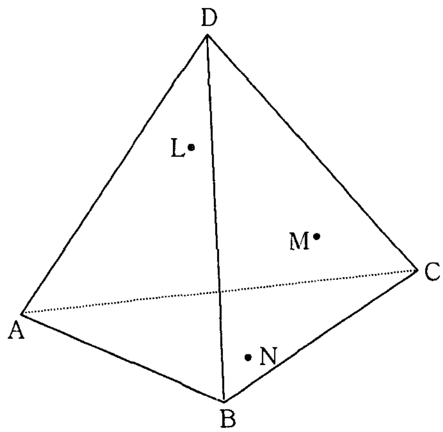
(1) 직선 LM과 AB를 작도하여, 그 교점을 Q라 하자.

(2) 직선 QN을 작도하여, 모서리 AC와의 교점을 O라 하자.

(3) 점 L, M, N, O를 연결하면, 절단면인 LMNO를 얻게 된다.

문제 3에서는 세 점 L, M, N이 모두 모서리에 속하는 경우의 절단면 작도를 살펴보았다. 이제, 세 점 L, M, N이 모두 면에 속하는 경우를 살펴보자.

문제 4. 정사면체 DABC에서 면 DAB, DBC, ABC에 점 L, M, N이 <그림 10>과 같이 주어졌다. 세 점 L, M, N을 지나는 평면에 의한 정사면체의 절단면을 작도하여라.

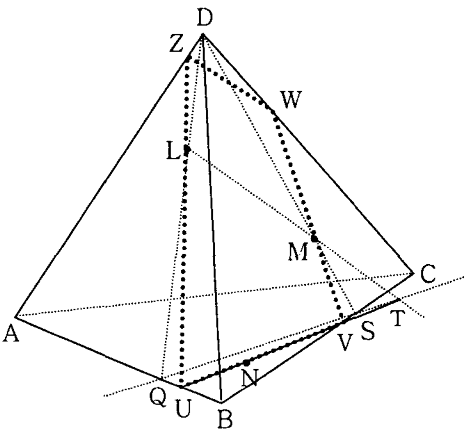


<그림 10>

분석. 평면 LMN과 정사면체의 절단면이 어떤 도형이 되는가를 생각하는 것이 쉽지 않다. 만약, 직선 LM과 면 ABC의 교점을 구하면, 평면 LMN과 면 ABC의 교선을 구할 수 있다. 바탕문제 2를 이용하자. 직선 DL과 모서리 AB의 교점을 Q, 직선 DM과 모서리 BC의 교점을 S라 하자. 이제, 직선 LM과 QS의 교점 T를 잡으면, 평면 LMN과 면 ABC의 교선 TN을 얻게 된다(<그림 11>).

이제, 교선 TN과 모서리 AB, BC의 교점을 각각 U, V라 하고, 직선 UL, VM과 모서리 DA, DC의 교점을 각각 Z, W라 하면, 절단면 ZUVW를 얻을 수 있다.

작도방법은 분석과정에서 상세히 설명하였으므로 생략한다. 문제 3, 4의 해결에서는 바탕문제 2를 사용하였다. 그 이유는 사면체의 세 모서리가 한 꼭지점에서 모이며, 평행한 모서리들이 없기 때문일 것이다. 그러나 평행한 모서리를 가지는 정육면체의 절단면 작도에서는 바탕문제 1, 3이 많이 사용된다.

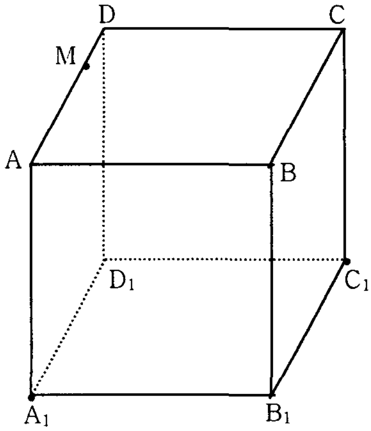


<그림 11>

2. 정육면체의 절단면

정육면체를 어떤 평면으로 절단하면, 절단면으로 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형을 얻을 수 있다. 이때, 정육면체는 면이 6개이므로, 칠각형은 절단면으로 얻어질 수 없다. 절단면이 삼각형인 경우는 이미 문제 1에서 작도하였으므로, 절단면이 사각형, 오각형, 육각형인 경우의 작도를 살펴보자.

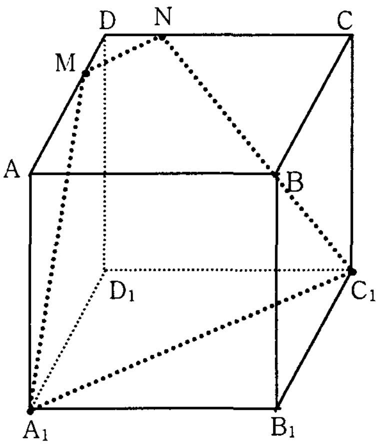
문제 5. 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 모서리 AD에 점 M이 <그림 12>와 같이 주어졌다. 세 점 M, A_1, C_1을 지나는 평면에 의한 정육면체의 절단면을 작도하여라.



<그림 12>

분석. 평면 MA_1C_1과 정육면체의 절단면을 생각하자. 이를 위해, 절단면이 M, A_1, C_1이외의 다른 점에서 정육면체와 교차하는가를 살펴보자. 여기서는 절단면이 모서리 CD의 점을 지나게 된다(이것은 문제 1의 절단면 작도와 관련하여 어렵지 않게 생각할 수 있다).

이제, 작도문제의 해결을 위해 다음과 같은 분석을 수행할 수 있다: M, A_1, C_1을 지나는 평면과 모서리 CD의 교점을 N으로 개략적으로 표시하자(<그림 13>). 그리고 나서 N의 정확한 작도를 위한 탐색을 수행하자.



<그림 13>

점 N은 평면 MA_1C_1과 면 DD_1C_1C의 교선에 속한 점이다. 평면과 평면의 교선을 작도하는 바탕문제 3을 이용하자. 점 A_1을 정육면체의 모서리를 따라 사영시키면 D_1을 얻고, M을 사영시키면 D를 얻고, C_1은 C_1자신이다. 이제, 직선 D_1D, A_1M을 작도하면 교점 Q를 얻을 수 있다. 그리고 나서 Q와 C_1을 잇는 직선을 작도하면, 점 N이 얻어진다.

작도방법.

(1) 직선 A_1M, D_1D를 작도하여, 그 교점을 Q라 하자.

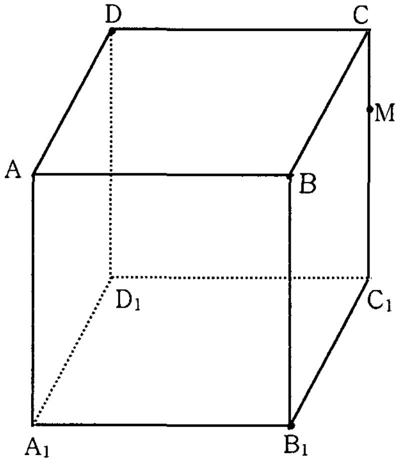
(2) 직선 QC_1을 작도하자.

(3) 직선 QC_1과 모서리 CD의 교점을 N이라 하자.

(4) 네 점 M, A_1, C_1, N을 연결하면, 절단면인 MA_1C_1N을 얻게 된다.

평면에서 '세 변이 주어졌을 때, 삼각형을 작도하여라'는 문제와 문제 5의 해결과정을 비교해 보자. 삼각형의 작도문제에서는 구하는 도형이 삼각형이라는 것이 주어졌지만, 문제 5에서는 절단면이 어떤 도형인지가 주어지지 않았다. 그러므로 문제 5의 해결에서는 작도문제 해결의 일반적인 접근 방법인 '문제가 해결되었다고 가정하고, 구하는 도형을 개략적으로 작도하자. 이제, 얻어진 작도로부터 문제해결을 위한 정보를 탐색하자'로부터 출발할 수가 없다. 문제 5의 해결에서는 절단면이 어떤 도형이 되는지를 우선 추측하고, 이에 상응하는 문제해결 탐색을 수행해야 한다.

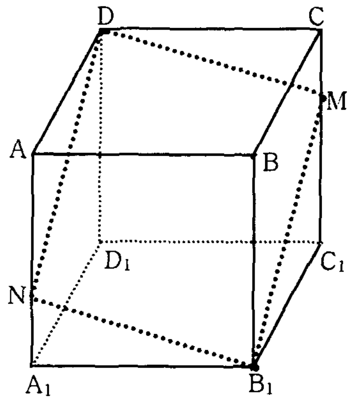
문제 6. 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 모서리 CC_1에 점 M이 <그림 14>와 같이 주어졌다. 세 점 M, D, B_1을 지나는 평면에 의한 정육면체의 절단면을 작도하여라.



<그림 14>

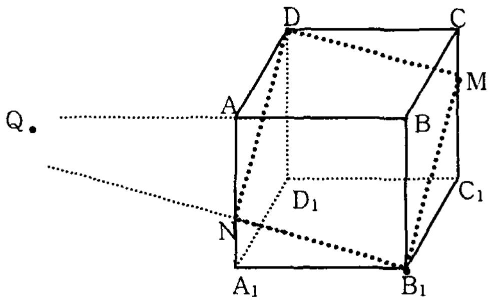
분석. 절단면의 모양부터 추측하자. 평면 MDB_1은 면 DD_1C_1C, BB_1C_1C와 교선을 가지므로, 면 DD_1C_1C, BB_1C_1C와 평행한 면인 AA_1B_1B, AA_1D_1D와도 교선을 가지게 된다. 결국, 절단면은 사각형이 됨을 알 수 있다.

이제, 문제가 해결되었다고 가정하고, 절단면인 사각형을 개략적으로 작도하자(<그림 15>). <그림 15>로부터, 문제해결을 위해선 점 N을 작도해야 함을 알 수 있다. 바탕문제 3을 활용할 수 있는지를 살펴보자. 점 M을 모서리 CD와 평행하게 평면 AA_1D_1D에 사영시켜 M_1이라 하고, 점 B_1을 사영시키면 A_1이 된다. 바탕문제 3을 활용하려면, 직선 D_1A_1과 MB_1의 교점을 구해야 한다. 그런데, 이들은 평행한 평면 AA_1D_1D, BB_1C_1C에 속하므로, 교점을 가지지 않는다. 결국, 바탕문제 3을 이용하여, 점 N을 구할 수 없다.



<그림 15>

이제, 다른 방향으로 탐색을 수행하자. 점 N은 직선 B_1N과 모서리 AA_1의 교점이다. 만약, 직선 B_1N에 속하는 점 Q를 작도할 수 있으면, 점 N을 작도할 수 있다. 바탕문제 1에 의해, 점 Q로 직선 B_1N과 AB의 교점, 즉 직선 B_1N과 평면 ABCD의 교점을 생각할 수 있다. 이때, 점 Q는 평면 ABCD에도 속하고, AA_1B_1B에도 속한다(<그림 16>).



<그림 16>

한편, 점 Q는 직선 B_1M과 평면 ABCD의 교점인 S에 대해, 직선 SD와 평면 AA_1B_1B의 교점이기도 하다. 물론, 직선 B_1M과 평면 ABCD의 교점 S는 바탕문제 1에 의해 작도가능하다. 이로부터, 다음과 같은 작도를 얻을 수 있다.

작도과정.

(1) 직선 B_1M과 BC의 교점 S를 작도한다.

(2) 직선 SD와 AB의 교점 Q를 작도한다.

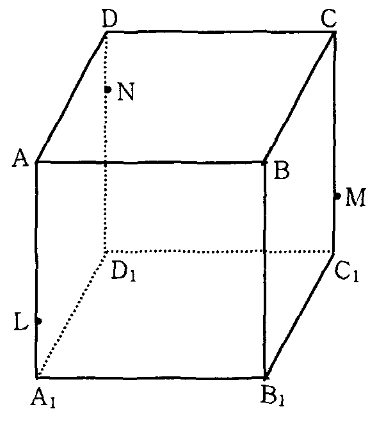
(3) 직선 QB_1을 작도하여, AA_1과의 교점을 N이라 한다.

(4) 네 점 D, M, B_1, N을 연결하면, 절단면 DMB_1N을 얻게 된다.

문제 6의 해결에서는 바탕문제 1을 두 번 사용하여, 직선 B_1M과 평면 ABCD의 교점 S, 직선 SD와 평면 AA_1B_1B의 교점 Q를 작도하였고, 이를 바탕으로 문제를 해결하였다. 한편, <그림 16>과 점 S의 작도 방법, 평면 AA_1D_1D와 BB_1C_1C가 평행이라는 사실로부터, 선분 ND와 B_1M이 평행함을 알 수 있다.

문제 7. 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 모서리 AA_1, CC_1, DD_1에 점 L, M, N이 <그림 17>과 같이 주어졌다. 세 점 L, M, N을 지나는 평면에 의한 정육면체의 절단면을 작도하여라.

분석. 평면 LMN에 의한 정육면체의 절단면을 작도하기 위해선, 평면 LMN과 평면 $A_1B_1C_1D_1$의 교선을 작도해야 한다. 이를 위해, 바탕문제 3을 사용하자. 우선, 직선 NL을 작도하고, N, L의 사영인 점 D_1, A_1을 연결하는 직선 D_1A_1을 작도하자. 그러면, 직선 NL과 D_1A_1의 교점 Q를 얻을 수 있다. 같은 방법으로, 직선 NM과 D_1C_1의 교점 S를 구하면, 교선 QS를 얻게 된다. 이제, 직선 QS와 모서리 A_1B_1, B_1C_1의 교점 O, P를 얻을 수 있다(<그림 18>). 이들 점을 연결하면, 절단면 LOPMN를 얻게 된다.



<그림 17>

작도방법.

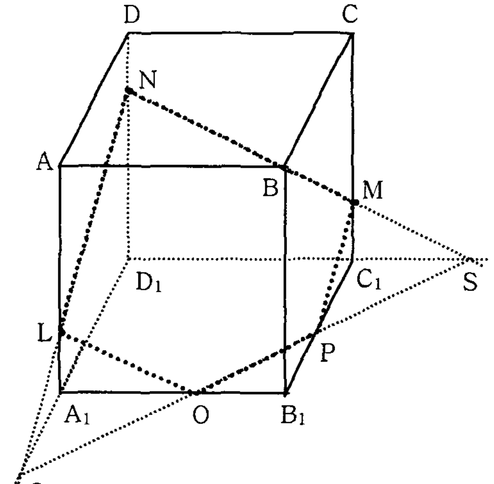
(1) 직선 NL과 D_1A_1을 작도하여, 그 교점 Q라 하자.

(2) 직선 NM과 D_1C_1을 작도하여, 그 교점 S라 하자.

(3) 직선 QS를 작도하여, 모서리 A_1B_1, B_1C_1과의 교점을 O, P라 하자.

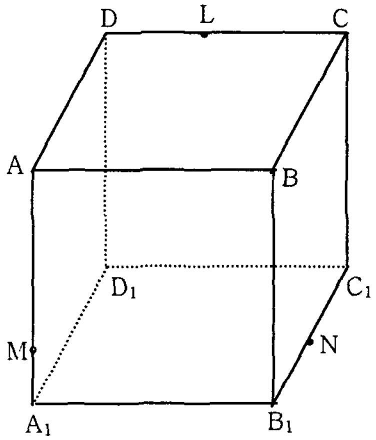
(4) 점 L, M, N, O, P를 연결하여, 절단면 LOPMN를 얻는다.

문제 7에서는 평면과 정육면체의 절단면이 오각형이 되는 경우를 살펴보았다. 문제 7의 <그림 17>에서 만약, 점 L, M, N이 평면 $A_1B_1C_1D_1$으로부터 같은 거리만큼 떨어져있다면, 절단면은 정사각형이 될 것이다. 한편, 문제 7과 관련하여, 한 가지 흥미로운 사실은 평면과 정육면체의 절단면이 정오각형은 될 수 없다는 것이다. <그림 18>에서와 같이, 오각형의 다섯 개의 변은 세 쌍의 평행인 면들에 각각 속하게 된다. 오각형의 변들 중에서 네 개는 평행인 두 쌍의 면에 속하게 되며, 결국 오각형은 평행한 변들의 쌍을 가지게 된다(<그림 18>에서 변 NL과 MP가 평행하다). 그런데, 정오각형은 평행한 변들이 존재하지 않으므로, 정육면체의 절단면으로 정오각형은 얻어질 수 없다.



<그림 18>

문제 8. 정육면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$의 모서리 CD, AA_1, B_1C_1에 점 L, M, N이 <그림 19>와 같이 주어졌다. 세 점 L, M, N을 지나는 평면에 의한 정육면체의 절단면을 작도하여라.

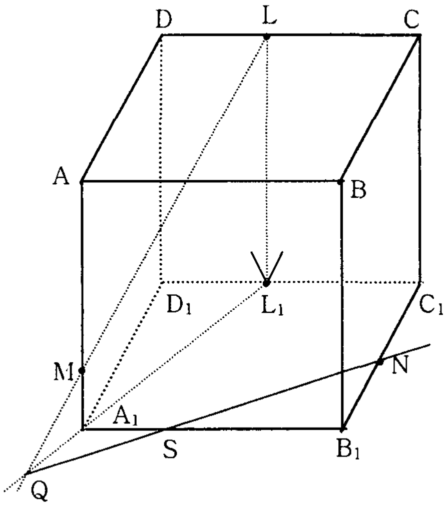


<그림 19>

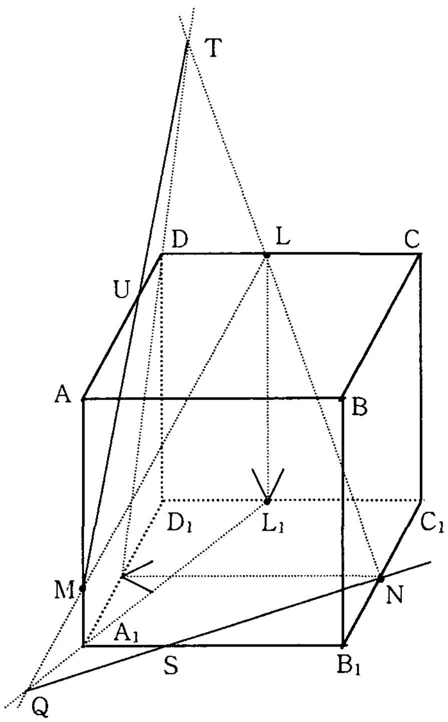
분석. 절단면을 작도하기 위해선, 평면 LMN과 정육면체 면들의 교선을 작도해야 한다. 세 점 L, M, N이 모서리 CD, AA_1, B_1C_1에 속하므로, 평면 LMN은 평면 ABCD, AA_1D_1D, AA_1B_1B, BB_1C_1C, $A_1B_1C_1D_1$과 교차함을 생각할 수 있다.

우선, 평면 LMN과 $A_1B_1C_1D_1$의 교선을 작도하자. 평면 LMN와 $A_1B_1C_1D_1$에 공통으로 속하는 점 N이 주어졌으므로, 다른 한 점만 더 구하면 된다. 이를 위해, 바탕문제 1을 이용하자. L을 정육면체의 모서리에 평행하게 $A_1B_1C_1D_1$에 사영시킨 점 L_1을 생각하자. 그러면, 직선 LM과 L_1A_1의 교점 Q가 직선 LM과 평면 $A_1B_1C_1D_1$의 교점이다. 이제, Q와 N을 연결하면, 두 평면의 교선을 얻을 수 있다(<그림 20>).

이제, 평면 LMN과 AA_1D_1D의 교선을 작도하자. 이를 위해, 평면 LMN과 AA_1D_1D에 공통으로 속하는 두 번째 점을 구하면 된다. 직선 NL과 평면 AA_1D_1D의 교점 T를 바탕문제 1을 이용하여 구할 수 있으며, 이로부터 교선 TM을 얻을 수 있다(<그림 21>).



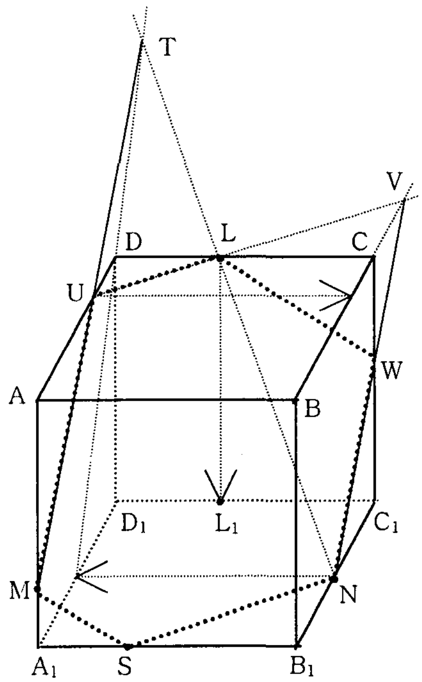
<그림 20>



<그림 21>

이제, 평면 LMN과 BB_1C_1C의 교선을 작도하자. 이를 위해, 바탕문제 1을 이용하여, 직선 UL과 평면 BB_1C_1C의 교점 V를 구한다. 이제, 선분 VN을 작도하면, 선분 CC_1과 평면 LMN의 교점 W를 구할 수 있다(<그림 22>). 이제, 점 L, U, M, S, N, W를 연결하면, 구하는 절단면이 얻어진다.

문제 8의 작도방법은 분석과정에서 충분히 설명하였으므로 생략하자. 문제 8의 해결에서는 바탕문제 1을 세 번 반복해서 사용했다. 문제 8에서 점 L, M, N을 각각 모서리 CD, AA_1, B_1C_1의 중점으로 잡으면, 절단면으로 정육각형이 얻어지게 된다.



<그림 22>

Ⅳ. 결 론

본 연구는 정사면체와 정육면체의 다양한 절단면 작도, 상응하는 교수-학습 방법의 모색을 위한 문헌연구로, 첫째 절단면 작도의 도구가 되는 바탕문제들을 추출하였으며, 둘째 절단면 작도의 탐색 수행과정을 상세히 기술하였다.

본 연구에서는 세 개의 바탕문제를 추출하였다. 첫 번째 바탕문제는 '평면 α, α의 같은쪽에 놓인 두 점, 이들을 평면 α로 평행하게 사영시킨 점들이 주어지면, 두 점을 지나는 직선과 α의 교점을 작도한다'는 것이고, 두 번째 바탕문제는 '평면 α, α의 같은쪽에 놓인 두 점, 이들을 평면 α로 교차하는 직선들을 따라 사영시킨 점들이 주어지면, 두 점을 지나는 직선과 α의 교점을 작도한다'는 것이고, 세 번째 바탕문제는 '평면 α, α의 같은쪽에 놓이며 한 직선에 속하지 않는 세 점, 이들을 평면 α로 평행하게 사영시킨 점들이 주어지면, 세 점을 지나는 평면과 α의 교선을 작도한다'는 것이다. 바탕문제 2는 정사면체의 절단면 작도에 주로 활용되며, 바탕문제 1, 3은 정육면체의 절단면 작도에 주로 사용된다.

정사면체는 면이 4개이므로, 평면에 의한 절단면은 삼각형, 사각형이 가능하며, 정육면체는 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형이 절단면으로 얻어질 수 있다. 본 연구에서는 이러한 절단면들을 작도하는 다양한 문제들을 다루었으며, 특히 절단면 작도문제의 해결을 위한 탐색 수행 과정을 상세히 기술하였다. 대부분의 문헌들에서는 절단면만 제시되어 있을뿐, 절단면을 유클리드적 도구를 이용하여 어떻게 작도하는지는 거의 기술되어 있지 않다. 특히, 절단면 작도문제의 해결을 위한 탐색수행이 상세히 기술된 연구는 없었다. 이러한 측면에서 본다면, 본 연구에 제시된 절단면 작도를 위한 분석적 탐색수행과 이를 바탕으로 하는 작도 방법의 체계적인 기술은 교육적으로 큰 의미를 가진다고 할 수 있다.

본 연구의 결과는 다양한 다면체들에 대한 절단면 작도문제의 해결 및 상응하는 교수-학습 방법의 계발에 체계적으로 접근할 수 있는 의미로운 연구 방향을 제시할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강시중 (1991). 수학교육론, 서울: 교육출판사.

권오남 · 박경미 · 임형 · 허라금 (1996). 공간능력에서의 성별차이에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 35(2), pp.125-141.

김창일 · 김신좌 (2002). 공간감각 형성을 위한 조작활동의 지도 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 13, pp.183-192.

나귀수 (1996). 기하교육에서 공간적 사고의 중요성에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집 6(1), pp.189-202.

남승인 (2003). 수학 퍼즐을 이용한 영재학습 자료의 개발: 공간 감각을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 17, pp.97-114.

류성림 (1999). 아동의 공간 직관력 향상을 위한 지도 방법에 대한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.91-105.

이종희 · 홍경아 (1995). 공간 능력 신장을 위한 교과서 지도 방안과 그 효과에 대한 분석, 대한수학교육학회 논문집 5(1), pp.169-188.

한기완 (2001). 공간감각의 개념 분석 및 교수-학습 방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 5(1), pp.57-69.

한인기 · 꼴라긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.

Dorofiev G. V. (1999). *Matematika dlya kazdogo*, Moskva: Ayaks.

Gangnus R. V. & Gurvits Yu.O. (1935). *Geometriya*, Moskva: GUGI.

Kolmogorov A.N. (1959). *O professii matematika*, Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

NCTM(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, VA: NCTM.

Polya G. (1957). *How to solve it*, New Jersey: Princeton University Press.

Sharygin I.F.(1994). *Reshenie zadach*, Moskva: Prosveshenie.

A Study on Constructing Plane Section of Regular Tetrahedron and Regular Hexahedron Using Base Problems

Inki Han
Dept. of Math. Edu., Science-Gifted Edu. Center, Gyeongsang National University
E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

Moonsup Kim
Graduate School, Gyeongsang National University
E-mail : subi33@dreamwiz.com

In this paper we try to study a method of constructing plane sections of regular tetrahedron and regular hexahedron. In order to construct plane sections of regular tetrahedron and regular hexahedron first of all, we extract some base problems that are used for construction. And we describe construction process using base problems in detail.

* ZDM Classification : D54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50
* Key Words : construction, plane section, regular tetrahedron, regular hexahedron, problem solving