한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 2, 263-288, June 2007

엑셀을 활용한 일차함수의 과정 - 대상관점 형성에 대한 사례연구

이광상[1)]

본 연구는 수학 7-가, 수학 8-가 교과서의 함수단원 분석을 통해 지필환경의 제한점을 알아본 후 탐구용 소프트웨어인 엑셀이 학생들의 일차함수의 과정-대상관점 형성 과정에 어떠한 영향을 미치는지 알아보는 것이다. 엑셀을 활용한 교수 실험은 학습능력 수준이 다른 다섯 명의 학생을 선정하여 중학교에서 다루고 있는 함수관련 내용을 중심으로 실시하였다. 교수실험은 5차시로 이루어졌으며, 각 학생의 활동 과정을 녹화, 녹음한 내용과 학생과의 면담, 관찰, 활동지 등을 분석하였다. 교수실험 결과, 엑셀을 활용해 식과 표와 그래프를 다양하게 조작한 역동적 탐구활동은 일차함수의 과정관점과 대상관점을 형성하는 데 중요한 비계설정(scaffolding)[2)] 역할을 했다.

주요용어 : 과정-대상관점 형성, 역동적 탐구활동, 비계설정 역할

Ⅰ. 서론

Klein은 "함수개념은 단순히 하나의 수학적 방법이 아니라 수학적 사고의 심장이요 혼이다."라고 하면서 함수 개념이 학교수학의 중심 관념이 되어야 한다고 주장하였다. 이는 함수적 사고는 대수와 기하를 관련지어 주고 응용수학을 포함하여 수학적 사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적인 핵심적 관점이라는 판단에서 비롯된 것이다(우정호, 1998). 우리나라의 제7차 교육과정에서도 함수적 사고는 학생들이 미래 사회의 일원으로서 살아가는 데 그 소양으로 필요한 경우가 많으므로, 함수에 관한 학습은 큰 의의를 가질 뿐만 아니라, 수학의

---

1) 서산농공업고등학교 (damchan@hanmail.net)

2) 비계설정의 사전적 의미는 "건물을 건축하거나 수리할 때 인부들이 건축 재료를 운반하며 오르내릴 수 있도록 건물 주변에 세우는 장대와 두꺼운 판자로 된 발판을 세우는 것"이다. 비계설정은 비고츠키의 이론(근접발달대의 이론)을 적용하여 효과적인 개별화 교수의 주요 요소를 파악하려 했던 Wood 등(Wood & Middleton, 1975; Wood, Bruner, & Ross, 1976; Wood, 1989)에 의해 소개된 용어이다. 비고츠키가 개발한 근접발달대는 독립적인 문제해결에 의해 결정된 것으로서의 실제적 발달수준과 성인의 안내나 보다 유능한 또래와의 공동노력으로 문제해결을 통해 결정된 것으로서의 잠재적 발달 수준간의 간격(Vygotsky, 1978, p.86)을 말한다(한순미, 1999). 원래 비계설정의 개념은 성인과 아동의 교수 상호작용의 분석에서 도출되었지만, 본 논문에서는 학생의 독자적인 엑셀 탐구활동이 일차함수의 그래프에 대한 일반적인 성질을 도출(과정관점과 대상관점 형성)시키는 매개역할을 했다는 점에서 비계설정 용어를 도입하였다.

여러 가지 분야에서 중요한 역할을 하게 됨을 강조하고 있다. 우리나라는 제3차 교육과정부터 집합 사이의 일관성을 갖는 임의적인 대응관계라는 Dirichlet-Bourbaki식의 함수개념이 도입되어 제6차 교육과정까지 이어졌다. 하지만, 제7차 교육과정의 7-가 단계에서는 함수를 '변화하는 두 양 사이의 관계'로 정의하고 있다. 이에 따라서, 7-가 단계 교과서의 함수단원에서는 정비례와 반비례를 이용하여 변화하는 양을 나타내는 변수 x, y의 관계를 다룬 후에 함수를 정의하고 있다. 독립변수와 종속변수 사이의 역동적인 관계로 함수를 정의하고 있는 것이다.

Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi(1993)는 함수개념을 과정관점과 대상관점으로 분류했다. 과정관점에서, 함수는 x값과 y값을 연결하는 것으로 인식된다. 즉, 함수를 각각의 x값에 대응하는 y값을 갖는 것으로 이해하는 것을 말한다. 대상관점에서, 함수의 개념과 함수의 표상은 전체(entities)로 인식된다. Sfard(1992)는 대부분의 경우, 조작적 개념이 새로운 수학적 개념을 획득하는 첫 단계이고, '과정' 개념에서 '대상' 개념으로의 전이는 쉽게 이루어지지 않는다고 주장했다. 이에 Sfard는 과정-대상의 개념 발달은 내면화(interiorization), 간결화(condensation), 구상화(reification)의 3단계를 통해 이루어진다고 가정하였고, 학생들의 개념형성을 위해서는 다양한 표상을 관련시킬 필요가 있음을 강조하였다.

Kieran(1993)은 함수의 그래프에 대한 전통적인 학습은 과정적 접근을 강조했다는 것을 지적하면서, 과정관점과 대상관점을 표상과 연결할 수 있는 공학의 지원이 필요함을 주장하고 있다. 이러한 교육공학의 활용은 함수의 과정-대상관점과 함수의 표상을 효과적으로 연결시킴으로써 학생들에게 함수개념에 대한 올바른 이해를 증진시킬 수 있다. 그 중 스프레드시트의 한 종류인 엑셀은 다양한 정보를 표와 그래프로 조직하고 처리하는 데 매우 효율적이기 때문에 수학적인 개념과 패턴을 발견할 수 있으며, 수학과 다른 과목을 통합하는 모델링 활동에 널리 활용되고 있다(류희찬, 2004). 또한, 엑셀은 다른 프로그램 언어와는 달리 변수에 이름을 붙이거나 선언할 필요 없이 마우스를 움직이거나 화살표 키를 누름으로써 수학적 관계를 스프레드시트 언어로 나타낼 수 있다. 따라서 학생들은 자신이 생각한 수학적 관계를 기호 언어의 복잡성에 얽매이지 않고 엑셀 화면상에 자유롭게 표현하고 테스트할 수 있다. 이런 점에서 엑셀은 전통적인 지필 환경에서는 불가능했던, 산술로부터 일반화하고 학생들의 비형식적인 산술 전략을 확장하기 위한 맥락을 제공한다(Sutherland & Rojano, 1993, 재인용).

스프레드시트의 활용이 일차함수에 대한 학업성취도, 수학적 일반화(generalization)의 형성에 긍정적인 영향을 준다는 연구(Garay, 2001; Wilson et al., 2004), 수학적 모델링에 대한 연구(김지연, 2005; 손홍찬, 2006)들은 스프레드시트의 효과를 입증하고 있다. 하지만, 일차함수의 개념형성에 중요한 과정-대상 관점[3] 형성에 엑셀이 어떠한 영향을 주는 지에 대한 연구는 이루어지고 있지 않다.

이에 교수실험을 통하여 일차함수에 대한 학생들의 과정-대상관점 형성과정을 분석하고자 한다. 이를 위해 설정한 연구내용은 다음 두 가지이다. 첫째, 현재 중학교 1,2학년의 수학교과서에서 함수단원이 어떻게 다루어지고 있는지 과정-대상관점으로 분석한다. 둘째, 학생들에게 엑셀을 활용한 함수의 과정-대상관점을 강조하는 교수실험을 실시하여 함수의 과정-대상관점 형성과정을 분석한다.

---

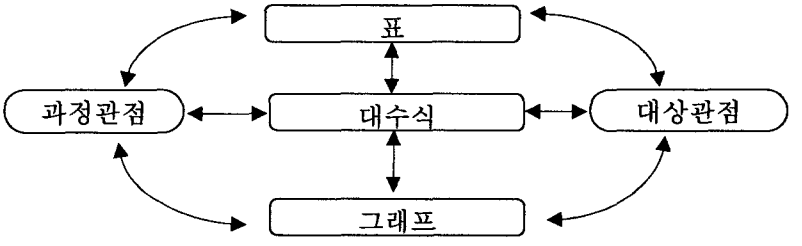
3) 과정-대상관점은 과정관점과 대상관점을 의미함

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수의 과정-대상관점과 표상의 연결

학생들이 함수 단원을 어려워하는 이유는 함수의 표상을 다양하게 탐구할 수 있는 학습기회의 부족으로 함수의 과정-대상관점 형성에 어려움을 겪기 때문이다. 예를 들어, 학생들은 일차함수 $y=ax+b$에서 매개변수 a와 b가 독립적이라는 것을 이해하지 못하고 어떤 특정한 상수로 생각할 수 있다(Moschkovich, 1989, 1990, 재인용). 학생들이 이러한 오류를 범하지 않도록 함수 학습에 도움을 주기 위해서는 함수의 과정-대상관점의 의미를 분석하여 교수-학습에 응용할 필요가 있다.

Moschkovich, et al.(1993)은 함수 개념의 과정-대상관점은 [그림 Ⅱ-1]같이 함수의 표상인 대수식, 표, 그래프와 연결되어 있다고 주장했다. 이 그림에 의하면, 함수의 문제유형 및 탐구상황에 따라 과정-대상관점과 대수식, 표, 그래프가 서로 연결되어 있고, 세 가지 함수의 표상의 조작 활동은 과정-대상관점 형성에 영향을 줄 수 있음을 보여준다.



[그림 Ⅱ-1] 함수의 과정-대상관점과 표상간의 연결

함수의 과정관점에서 주목해야 할 것은 함수의 두 변수 x값과 y값 사이의 관계를 파악하는 것이다. x값과 y값 사이의 관계는 대수식이나 그래프와 표에서 나타날 수 있다. 과정관점에서는 일차함수의 대수식에서 x, y의 값과 그들 사이의 관계 또는 그래프를 이루는 좌표평면의 점들에 초점을 둔다. 그러나 대상관점에서는 함수의 표상(대수식, 그래프, 표)을 부분이 아닌 전체(대상)로 인식하는 것에 초점을 둔다. 즉, 과정관점에서의 x값과 y값 사이의 관계를 파악한 후에 이를 수학적으로 일반화할 수 있으면 대상관점이 형성되었다고 할 수 있다. 문제를 예로 들면, "점 (1, 4)를 지나고 $y=2x-5$와 평행인 직선의 방정식을 구하라."는 문제는 과정관점과 대상관점을 연결하여 풀 수 있는 문제유형이다.

위의 문제 내용을 살펴보면, '직선 위의 점', '기울기와 y절편'의 정보를 활용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다. 우선, $y=ax+b$의 형식을 사용하면서 매개변수 a와 b의 값을 구해야 한다. 대상관점은 $y=2x-5$의 그래프와 평행한 기울기 a를 결정하는데 사용한다. 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=2x-5$의 그래프와 평행하므로 기울기가 같다. 따라서, 직선의 방정식은 $y=ax+b$에서 $a=2$이므로 $y=2x+b$가 된다. b의 값을 구할 때 관점

의 변화가 온다. 문제에서 두 번째 조건은 (1, 4)를 지난다는 것이다. 과정관점에서, (1, 4)는 방정식의 그래프 위에 있기 때문에 $y=2x+b$의 식에 대입할 수 있다. 결국, 과정관점과 대상관점의 연결을 통하여 $y=2x+2$의 방정식을 구한 것이다.

학생들이 두 관점을 자연스럽게 연결하기 위해서는 "기울기가 같으면 두 그래프는 평행하다."와 같은 그래프의 모양이 심상에 형성되어 있어야 한다. 학생들이 기울기와 평행의 관계를 심상에 형성하려면 일차함수 $y=ax+b$ 식에서 a와 b의 값의 변화에 따른 표와 식, 그래프를 다양하게 탐구할 수 있어야 한다. 이러한 과정관점에서의 탐구활동을 통해 "두 그래프가 평행하면 기울기가 같고 그 기울기는 a의 값과 같다."는 사실을 대상관점으로 이해할 수 있다.

2. Sfard의 과정-대상 모델

Sfard는 대부분의 경우 조작적 개념이 새로운 수학적 개념을 획득하는데 있어서 첫 단계라고 하면서, '과정'개념에서 '대상'개념으로의 전이(transition)는 쉽고 빠르게 이루어지지는 않는다고 주장했다. Sfard는 과정-대상의 연속적인 발달은 내면화(interiorization), 간결화(condensation), 구상화(reification)의 3단계를 거친다고 가정했다.

첫째, 내면화 단계는 이미 친숙한 수학적 대상(그래프, 대수식)에 실행되는 과정이다. 즉, 함수 개념에 대해서, 다양한 수들이 산술적 계산을 수행하는 함수 기계(function machine)의 입력(input)으로 이용되므로 변수와 공식에 대한 아이디어가 나타나기 시작한다.

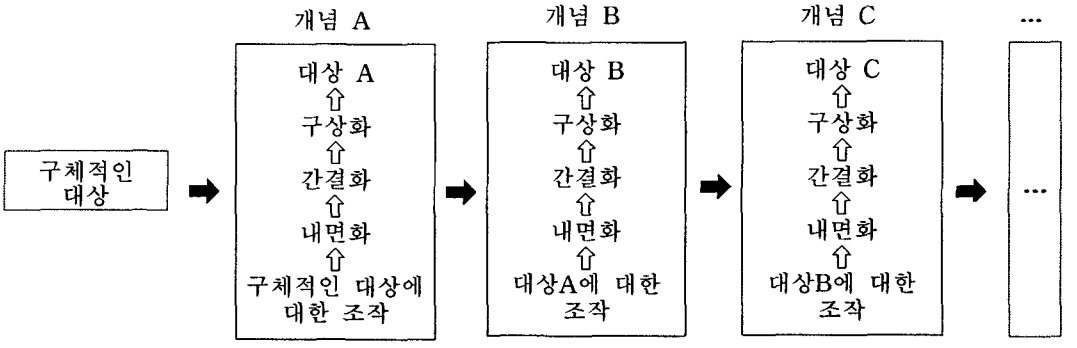
둘째, 간결화 단계는 조작(operation)이나 과정이 좀더 처리하기 쉬운 단위로 압축되는 단계이다. 예를 들면, 학습자는 어떤 조작을 지적하기보다는 입력-출력 관계로 과정을 언급할 수 있다. Sfard(1991)는 간결화 덕분에 한 과정을 다른 과정과 결합하고 비교하며 일반화하는 것이 훨씬 쉬워진다는 것을 지적하였다. 간결화 단계는 함수 개념을 과정에서 대상으로 이해하게 하는 교량 역할을 하기 때문에 교수 설계에서 상당히 중요하다고 볼 수 있다.

셋째, 구상화 단계에서는 친숙한 무엇인가를 새로운 시각에서 볼 수 있는 갑작스러운 능력을 포함한다. 내면화와 간결화 과정은 점차적인 장황한 과정이며, 질적인 변화라기보다는 양적인 변화인 반면에 구상화는 일종의 도약이라 할 수 있다. 즉, 절차적 과정이 하나의 대상이나 정적인 구조로 응고되는 단계이다.

이 세 가지 단계는 위계적인 성질을 가지고 있어서 어떤 단계는 그 이전의 단계들이 취해져야만 가능하다. 그리고 구상화된 새로운 개념이 새로운 조작 대상이 되면서 위의 세 가지 단계가 다시 반복되고 기존의 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달되어 간다. 이와 같은 수학적 개념의 발달과정을 Sfard는 [그림 Ⅱ-2]와 같은 도식을 통해 설명하고 있다(Sfard, 1991, p. 22). 그림에서 보는 바와 같이 수학적 개념의 발달은 일련의 조작과 구조의 교대과정을 통해 발달되는 것으로서 개념 형성은 조작적인 개념(과정관점)에서 구조적인 개념(대상관점)으로의 연쇄적인 전이로 이해될 수 있다.

$y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 사이의 관계를 예를 들어 설명해보자. 내면화 단계에서, 학생들은 $y=3x$의 그래프를 (-1, -3), (0, 0), (1, 3)등의 좌표를 구해 좌표평면에 점을 찍은 다음 연결해서 그릴 수 있다. 간결화 단계에서, 학생들은 $y=ax$의 그래프에서 a의 값 대신 다양한 수를 대입하면서 그래프를 그려보고 그래프의 변화를 살펴볼 수 있다. 구상화 단

계에서는 간결화 단계에서의 다양한 $y=ax$ 그래프를 그려보면서 $y=ax$ 그래프의 성질을 대상관점으로 이해하게 된다. 학생들이 $y=ax$ 그래프의 성질을 대상관점으로 이해한 것을 개념 A라고 하자.



[그림 Ⅱ-2] 수학적 개념 형성 과정의 일반적인 모델

이제는 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 사이의 관계를 이해해야 한다. 다시 내면화 단계에서, 학생들은 $y=3x$와 $y=3x+2$의 두 그래프를 좌표를 구해 좌표평면에 그린 다음 비교할 수 있다. 간결화 단계에서 학생들은 일차함수 $y=ax$와 $y=ax+b$에서 a, b의 값 대신 다양한 수를 대입하여 그래프를 그려보면서 두 그래프의 관계를 탐구한다. 이 단계에서 학생들은 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax$의 그래프를 y축 방향으로 b만큼 평행이동 한다는 것을 이해할 수 있다. 구상화 단계에서, 학생들은 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프의 관계를 이해하면서 $y=ax+b$의 그래프의 성질을 대상관점으로 인식하게 된다. 결국, 학생들은 개념 A에 대한 조작(과정관점에서의 탐구)을 통해서 개념 B를 대상으로 받아들였다고 할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 및 대상

본 연구에서는 첫 번째 연구내용을 해결하기 위해 중학교 7-가, 8-가 교과서 2종[4]을 선택해 분석하였다. 두 번째 연구내용의 해결을 위해 충남 서산시에 소재한 A학교 2학년 학생 5명을 연구대상으로 교수실험을 실시하였다. 교수실험은 사례연구 방법을 택하였다. 사례연구는 현실 상황과 연계하면서 한 현상에 대해서 풍부하고 전체적인 설명을 이끌어 낼 수 있고, 미래 연구의 구조화를 돕는 일시적 가설로써 구성할 수 있다(Sharan, 1998, 강윤수 외 8명 (역), 2005).

본 연구에 참여한 학생[5] 5명 모두 초등학교 때 엑셀의 기초적인 내용(합, 평균)을 배운

4) 본 논문에서 분석한 교과서 2종은 중학교 수학 7-가, 8-가 (조태근 외4인, (주)금성출판사, 2001)와 (금종해 외4인, 서울: 고려출판, 2004) 교과서를 말한다. 이후로는 (주)금성출판사 교과서를 A교과서, 서울: 고려출판 교과서를 B교과서로 칭한다.

적이 있지만, 함수와 관련하여 표를 만들고 그래프를 그린 경험은 없다. 학생들의 수학에 대한 학업성취도는 상 수준인 학생이 2명, 중 수준인 학생이 2명, 하 수준에 해당하는 학생이 1명이다. 사전면담과 매 차시의 진단평가를 통해 학생들의 일차함수에 대한 이해정도를 파악하였고, 이를 탐구학습 내용에 반영하였다. [표 Ⅲ-1]은 학생들의 함수에 대한 사전면담 질문 내용과 진단평가 결과를 정리한 것이다.

지혜를 제외한 나머지 학생들은 함수의 정의를 ' 한 값에 따라 다른 값이 달라지는 것' 또는 '방정식', 'x, y의 값을 구하는 것'으로 답변한 것으로 보아 정확하게 이해하지 못한다는 것을 알 수 있다. 또한, $y=ax+b$의 식에서 x와 y의 의미에 대해서도 대부분의 학생들이 '미지수'라고 생각하고 있어, 미지수와 변수에 대한 개념을 잘 구분하고 있지 못한다는 것을 알 수 있다. "연립방정식의 해를 일차함수의 그래프를 이용해 구할 수 있는가?"라는 질문에 석민과 지혜를제외한 세 학생은 일차함수의 그래프를 활용해서 연립방정식의 해를 구하는 방법을 이해하지 못했다. 이러한 분석결과를 토대로 학생들이 함수에 대한 이해와 일차함수의 그래프에 관련된 내용을 엑셀을 활용하여 탐구적, 역동적으로 이해할 수 있도록 구성하여 지도하였다.

[표 Ⅲ-1] 사전면담 질문 내용과 진단평가 결과

학생 / 질문내용	석민	지혜	영훈	선애	인경
함수의 정의	한 값에 따라 다른 값이 달라지는 것	x값에 따른 대응하는 y의 값을 구하는 것	$y=ax$공식을 통해 미지수를 찾는 것	방정식	x, y의 값을 구하는 것
변수의 의미	함수를 변화시킬 수 있는 것	(x, y) 조건에 따라 변하는 수	기울기, y절편	반응 없음	반응 없음
$y=ax+b$의 식에서 x와 y의 의미	미지수	변수	미지수	미지수?	반응 없음
연립방정식의 해와 그래프의 관계 이해	두 그래프의 교점의 좌표가 연립방정식의 해	두 그래프의 교점의 좌표가 연립방정식의 해	관계를 이해 못함	관계를 이해 못함	반응하지 못함
엑셀의 사용정도	간단한 계산	평균구하는 정도	사용한 적 없음	평균, 총점구하기	잘 기억이 나지 않음
학업성취도	상	상	중	중	하

2. 연구 절차

1) 교수 실험

본 연구의 목적을 위해, A중학교 5명의 학생이 5차시에 걸쳐 엑셀을 활용한 교수실험에

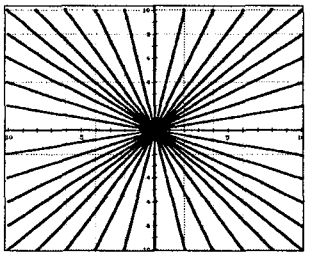
5) 교수실험에 참여한 학생의 이름은 모두 가명으로 했음.

참여하였다. 교수실험은 과학실에서 실시하였고, 지도교사는 현재 교육 경력이 13년인 남자 교사로서, 중학교에서 수학을 가르치고 있으며 엑셀을 활용해 함수단원을 지도한 경험은 없지만 기본적인 엑셀 조작은 가능하였다. 연구에 참여한 5명의 학생은 개인별로 탐구활동을 했으며, 지도교사는 학생들의 활동 과정에서 학습조력자로서 활동하였고, 연구자는 관찰자와 참여자로서 활동하였다. 지도교사는 매 차시마다 학습에 관련된 기본적인 엑셀 기능에 대해 설명하고 학생들의 수행정도를 점검한다. 학생들이 엑셀의 사용 또는 문제해결의 어려움에 부딪혔을 때, 지도교사 또는 연구자가 약간의 힌트를 제공함으로써 학생 스스로 해결할 수 있도록 유도하였다. 또한 연구자는 지도교사와 학생들의 행동을 관찰하면서 특징적인 장면을 필드노트에 기록하고, 학생들이 도움을 청할 때는 참여자로서 조언해 주었다. 엑셀 활동지는 각 주제별로 탐구와 추측, 문제해결 순으로 구성하였다. 활동 중에 학생들은 엑셀 활동지에 탐구내용을 기록하고, 활동이 끝나면 연구자는 엑셀 활동지와 활동 파일의 내용을 기초로 개별 면담을 실시하였다.

2) 교수-학습 내용

교수-학습 내용은 교과서 7-가, 8-가의 함수단원 내용을 엑셀의 탐구환경에 맞게 함수의 개념과 그래프의 개념형성에 도움이 될 수 있도록 [표 Ⅲ-2]와 같이 5차시로 재구성하였다.

[표 Ⅲ-2] 주제별 교수-학습 활동 내용

순서	주 제	교수-학습 활동 내용
1	[6]Starburst 활동	■탐구 내용 : 나누어 준 Starburst 활동지 내용대로 엑셀을 활용해 Starburst를 완성하면서 원점을 지나는 그래프의 특징을 알아보고, $y=ax(a\neq 0)$ 그래프의 성질도 추측해본다. 
2	$y=ax$의 그래프 탐구	■탐구 내용 : $y=ax(a\neq 0)$의 식, 표, 그래프를 엑셀을 통해 동시에 동적으로 구현하는 활동을 통해 $y=ax(a\neq 0)$그래프의 성질을 추론한다. - 엑셀을 활용한 $y=x, y=2x, y=-x, y=-2x$ 그래프 탐구 - $y=ax(a\neq 0)$의 그래프에서 a의 값의 변화에 따른 그래프 관찰 - $y=ax(a\neq 0)$의 그래프의 일반적인 특징 발견
3	$y=ax+b$ 그래프 탐구	■탐구 내용 : $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프를 그리고, 동적도구인 스핀버튼을 활용해 a, b의 값을 조작하고 그래프의 변화를 탐구하면서, $y=ax(a\neq 0)$와 $y=ax+b(a\neq 0)$그래프 사이에 어떤 관계가 있는지 탐구한다.

		-엑셀을 활용한 $y=2x$, $y=2x+3$, $y=-2x$, $y=-2x+3$ 그래프 탐구 - $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서 a의 값의 변화에 따른 그래프 관찰 - $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서 b의 값의 변화에 따른 그래프 관찰 - $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프의 일반적인 특징 발견
4	그래프와 연립방정식의 해의 관계 탐구	■탐구내용 : 두 일차함수의 그래프를 통하여 연립방정식의 해를 구하는 방법을 엑셀 활동을 통해 탐구하고, 실제로 해를 구해본다. - 연립방정식 $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-2x-2 \end{cases}$의 그래프를 엑셀을 활용해 그리고 교점의 좌표를 구하기 - 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태가 어떠한 관계가 있는지 추측하기
5	일차함수의 활용	■탐구내용 : 제논의 역설의 오류와 기타 활용문제를 엑셀의 탐구 활동을 통해 해결한다. -거북이와 아킬레스의 속력, 거북이가 몇 m앞에서 출발했는지 추측해 표와 그래프로 나타내기

3. 분석방법과 기준

첫 번째 연구내용을 해결하기 위해 현재 중학교에서 다루고 있는 수학 7-가, 수학 8-가 내용 중 함수관련 내용을 과정-대상관점으로 분석하였다. 그리고 두 번째 연구내용을 해결하기 위해 엑셀을 활용한 교수실험에서 학생들이 함수의 과정-대상관점을 어떻게 형성해 나가는지 학생들 각자의 활동내용과 면담을 통한 전사자료를 통해 분석하였다. 그리고 Moschkovich, et al.(1993)이 함수의 과정-대상관점에 대해 정의한 내용과 Sfard의 과정-대상의 연속적인 발달단계(내면화-간결화-구상화)를 참고로 하여 [표 Ⅲ-3]과 같은 분석틀을 사용하였다.

[표 Ⅲ-3] 교과서와 교수실험 분석틀

분석내용	범주	분석관점
교과서	용어의 정의	변수, 정비례, 기울기의 정의의 전후 과정이 어떻게 이루어졌는가?
	일차함수의 그래프	교과서의 일차함수 그래프의 전개과정은 어떻게 이루어졌는가?
교수실험	함수의 과정관점 형성	학생들은 함수의 과정관점을 어떻게 형성해 나가는가?
	함수의 대상관점 형성	학생들은 함수의 대상관점을 어떻게 형성해 나가는가?

6) Starburst는 Moschkovich et al.(1993, p.89)이 제시한 것으로 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 유형을 탐구하는 과제이다. 본 연구에서의 Starburst 만들기는 학생들이 원점을 지나는 18개의 그래프를 엑셀을 활용해 만드는 것을 말한다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 교과서 분석 및 논의

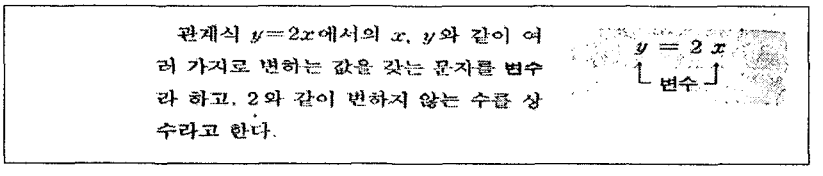
Moschkovich, et al.(1993)은 함수 학습에 있어, 함수를 과정으로 보는 관점에서 대상으로 보는 관점으로 진행하는 것은 자연스러운 것이며, 함수를 대상으로 생각할 수 있기 전에 먼저 함수를 과정으로 보는 수준에서 학습해야 한다고 강조하고 있다. 이러한 주장은 학생들이 함수의 개념을 과정-대상관점으로 올바르게 이해하기 위해서는 그래프, 표, 식의 표상을 과정적 관점에서 다양하게 조작할 수 있는 학습기회가 제공되어야 할 필요성을 제시한다.

본 절에서는 현행 교과서가 그러한 역할을 제대로 하고 있는지 수학 7-가, 8-가 교과서의 함수단원 내용 중 용어의 정의와 일차함수의 그래프 내용의 분석을 통해 알아보았다.

1) 용어의 정의

용어의 정의에서는 변수와 일차함수의 기울기 정의를 중심으로 분석하였다. 김남희(1997)는 교과서나 교사의 부적절한 지도 방식, 제한된 학습 경험의 제공 때문에 학생들이 독립변수나 종속변수 개념에 대해 불완전한 이해를 갖고 있다는 것을 지적하였다. 학생이 변수의 개념을 분명히 이해하지 못하는 것은 교사의 교수전략이 원인이 될 수도 있지만, 교과서에서 변수의 개념을 이해할 수 있는 충분한 학습기회를 제공하지 못한 원인도 있다.

다음은 A교과서에서 제시하는 변수의 정의이다.


관계식 $y=2x$에서의 x, y와 같이 여러 가지로 변하는 값을 갖는 문자를 변수라 하고, 2와 같이 변하지 않는 수를 상수라고 한다.

$y = 2x$
변수

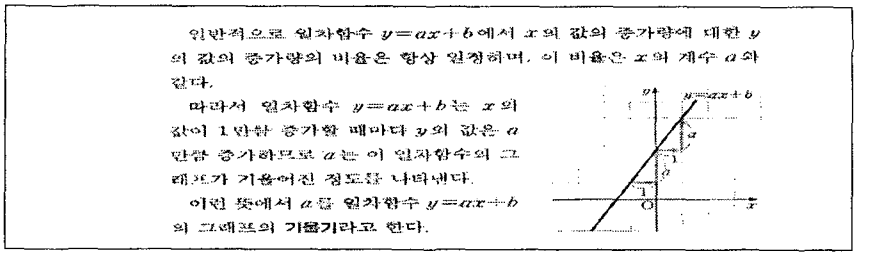
[그림 Ⅳ-1] A교과서의 변수 정의

[그림 Ⅳ-1]과 같이 A교과서에서는 $y=2x$[7], B교과서에서는 $y=4x$의 예를 들어 변수를 정의하고 있다. B교과서에서는 한 변의 길이가 $x$cm인 정사각형의 둘레의 길이 $y$cm를 이용하여 x와 y의 관계식을 유도하면서 관계식 $y=4x$에서 x, y사이의 변화관계를 표로 제시하고 있다. 그리고 이러한 상황을 도입해 '변하는 양을 나타내는 문자 x, y'를 변수로 정의하고 있다. 하지만, x의 값 1, 2, 3, 4, 5에 따른 y의 값 4, 8, 12, 16, 20만으로는 변수의 동적인 상황을 경험하게 한다는 것은 쉽지 않다. 오히려, x, y를 여러 가지 값을 대입할 수 있는 자리지기로 생각하기 쉽다. 따라서, 학생들에게 변수의 의미를 동적인 의미로 이해시키기 위해서는 변수의 정의 전후에 x, y값의 변화를 과정적 관점 측면에서 다양하고 역동적으로 탐구할 수 있는 학습 환경을 보완할 필요가 있다.

일차함수의 기울기는 그래프의 기울어진 정도를 수로 나타낸 것이다. 따라서, 기울기의 개

7) A교과서에서는 x의 값이 1, 2, 3, …으로 변함에 따라 y의 값도 2, 4, 6, …으로 변한다는 것을 예로 들어 변수의 의미를 설명하고 있다.

넘은 그래프의 동적인 변화와 밀접한 관계가 있다. 하지만, A교과서[8]에서는 [그림 Ⅳ-2]와 같이, $y=2x+3$의 정적인 예를 통해 일차함수 $y=ax+b$ 식에서 x의 계수 a가 기울기가 된다는 것을 설명하고 있다. 학생들이 일차함수 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프와 매개변수 a와의 관계를 이해하기 위해서는 a값뿐만 아니라, b의 값에 따른 기울기의 변화를 살펴볼 필요가 있다. 이러한 활동을 통해서 학생들은 기울기=(y값의 증가량)/(x값의 증가량)= a이고, b의 값은 기울기의 변화와 관계가 없다는 사실을 발견하면서, 기울기와 a의 관계를 대상관점으로 자연스럽게 연결시킬 수 있다.


일반적으로 일차함수 $y=ax+b$에서 x의 값의 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율은 항상 일정하며, 이 비율은 x의 계수 a와 같다.

따라서 일차함수 $y=ax+b$는 x의 값이 1만큼 증가할 때마다 y의 값은 a만큼 증가하므로 a는 이 일차함수의 그래프가 기울어진 정도를 나타낸다.

이런 뜻에서 a를 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의 기울기라고 한다.

[그림 Ⅳ-2] A교과서의 일차함수의 기울기 정의

지금까지 변수와 기울기의 정의 내용을 살펴본 결과, 용어의 정의 전후 과정을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 나타낼 수 있다. 교과서에서는 단편적인 예를 활용하여 용어를 정의한 다음에 바로 실제 문제에 적용하는 순서로 되어 있다. 이러한 과정에서는 학생들이 용어의 정의를 대상으로 이해할 수 있는 탐구과정이 생략되어 있다는 것을 알 수 있다.

단편적인 예 ⇨ 용어의 정의 ⇨ 문제 적용

[그림 Ⅳ-3] 용어의 정의 전후 과정

대상으로 이해할 수 있는 탐구과정은 Sfard의 과정-대상의 연속적인 발달단계 중 간결화 condensation)단계라 할 수 있다. 간결화 단계는 Sfard에 의하면 함수의 개념을 대상으로 이해할 수 있는 촉매제 역할을 한다. 이러한 점에서, 함수에 관련된 용어의 정의를 효과적으로 지도하기 위해서는 학생들에게 과정관점에서 탐구할 수 있는 학습 환경을 제공할 필요가 있다.

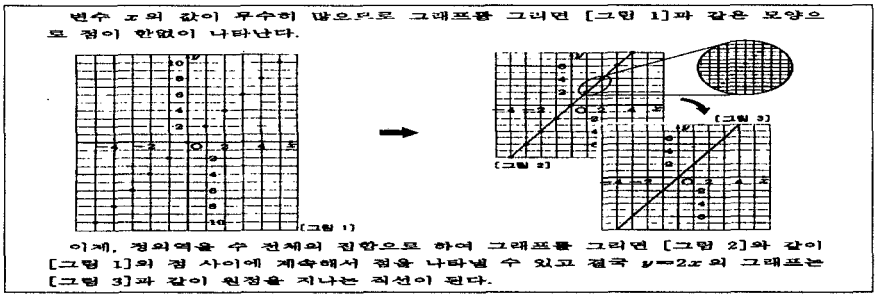
2) 일차함수 그래프

일차함수의 그래프에서는 수학 7-가의 $y=ax(a\neq0)$ 그래프와 수학 8-가의 $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프를 중심으로 분석하였다.

학생들이 $y=ax(a\neq0)$ 그래프의 성질을 대상관점으로 이해하기 위해서는 매개변수 a의

8) A교과서에서는 일차함수 $y=2x+3$을 예로 들어 x의 값이 1만큼 증가할 때 y의 값은 2만큼 증가하고, x의 값이 3만큼 증가할 때 y의 값은 6만큼 증가한다는 것을 보이면서 (y의 값의 증가량)/(x의 값의 증가량)이 x의 계수 2와 같다는 것을 설명하고 있다. B교과서에서도 $y=2x+3$의 예를 들어, A교과서와 유사한 방법으로 일차함수의 기울기를 설명하고 있다.

값 대신 다양한 수를 대입하면서 표와 그래프의 변화를 탐구할 수 있어야 한다. 하지만, 교과서에서는 a의 값 대신 다양한 수를 대입하여 표와 그래프의 동적인 변화상태를 탐구하는 데 제한점이 있기 때문에 $y=ax(a\neq0)$ 그래프의 성질을 전체로 인식하는 데 어려움을 줄 수 있다.



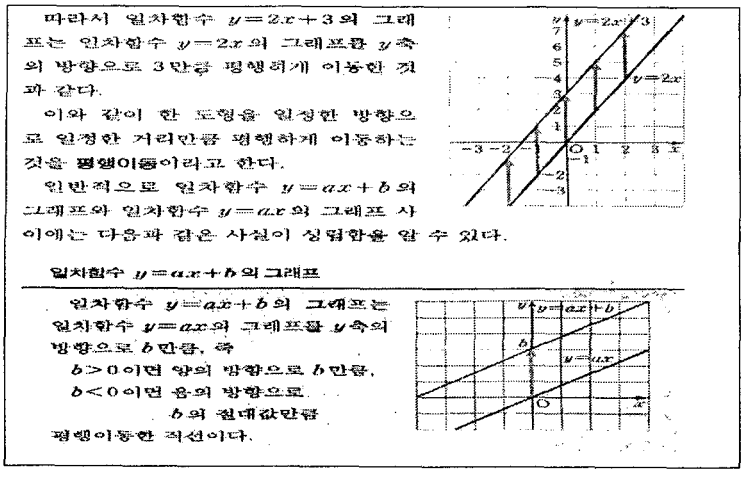
[그림 Ⅳ-4] B교과서의 $y=2x$ 그래프 제시 내용

B 교과서는 [그림 Ⅳ-4]와 같이 점과 점 사이에 무수히 많은 점이 있다고 설명하면서 일차함수 $y=2x$ 그래프는 원점을 지나는 직선이라는 것을 제시하고 있다[9]. 그런 다음 정비례 관계를 나타내는 $y=ax(a\neq0)$ 그래프의 성질을 일반화시키고 있다. 학생들이 과정관점에서 a의 값을 다양하게 조작하면서 그래프의 변화를 탐구할 수 있는 학습기회가 제한된다면, $y=ax(a\neq0)$ 그래프의 성질을 단순히 '원점을 지나는 직선'이라는 것을 기계적으로 암기하기 쉽다.

다음은 A교과서에서 제시하고 있는 $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프 내용을 살펴보자. A교과서에서는 [그림 Ⅳ-5]와 같이 $y=2x$와 $y=2x+3$ 그래프 관계의 내용을 제시한 다음, 일차함수 $y=ax(a\neq0)$와 $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프 사이의 일반적인 관계를 설명하고 있다. 그런데, 두 그래프의 일반적인 관계를 설명하는 과정에서 매개변수 a, b의 변화에 따른 일차함수 그래프의 변화를 탐구하는 과정이 생략되어 있다. 따라서, 학생들은 a의 값이 같으면 두 그래프는 평행하고, b의 값은 평행이동에 관계한다는 것을 이해하기 어려울 수 있다. $y=ax(a\neq0)$와 $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프의 내용을 분석한 내용을 Sfard(1991)의 과정-대상 개념형성 발달단계로 나타내면 [그림 Ⅳ-6]과 같다.

[그림 Ⅳ-6]은, 두 그래프의 전개과정에서 내면화 단계를 통해 바로 과정을 대상으로 인식하는 구상화 단계로 전개하고 있으며, 간결화 단계는 생략되어 있다는 것을 나타낸다. 하지만, 변수 a, b의 값을 다양하게 조작하면서 표와 그래프를 관찰할 수 있는 간결화 단계의 생략은 학생들이 두 그래프의 성질을 대상관점으로 이해하는 데 어려움을 줄 수밖에 없다. 이러한 지필환경의 제한점을 보완하기 위해서는 간결화 단계의 활동을 역동적으로 구현할 수 있는 새로운 교육매체를 활용할 필요가 있다.

9) A교과서도 $y=2x$그래프의 예를 들어 $y=ax(a\neq0)$그래프의 성질을 설명하고 있다.


따라서 일차함수 $y=2x+3$의 그래프는 일차함수 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행하게 이동한 것과 같다.

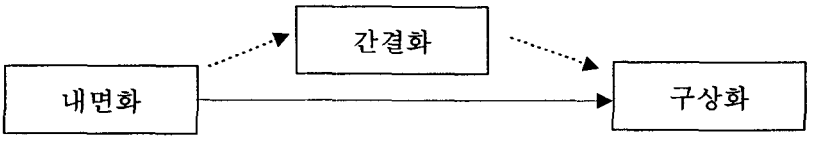
이와 같이 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 평행하게 이동하는 것을 평행이동이라고 한다.

일반적으로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프와 일차함수 $y=ax$의 그래프 사이에는 다음과 같은 사실이 성립함을 알 수 있다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼, 즉 $b>0$이면 양의 방향으로 b만큼, $b<0$이면 음의 방향으로 b의 절대값만큼 평행이동한 직선이다.

[그림 Ⅳ-5] A교과서의 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프



[그림 Ⅳ-6] 교과서의 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프 전개과정

2. 교수실험 분석 및 논의

본 절에서는 실제로 엑셀을 활용한 교수실험에서 학생들의 함수의 과정-대상관점이 어떻게 형성되는지 알아보기 위해 활동지, 엑셀 파일, 면담을 중심으로 분석하였다.

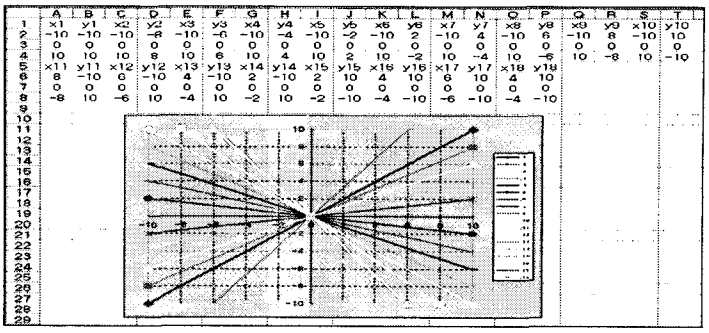
1) Starburst 활동

[표 Ⅳ-1] Starburst 활동 분석 관점

과정관점 형성	대상관점 형성
• 좌표평면 위의 좌표(x, y)를 이용하여 그래프를 그림 • Starburst 좌표의 일정한 패턴을 찾아 그래프를 그림	• 원점을 지나는 그래프의 일반적인 특징 발견

(1) 과정관점 형성

다음의 면담내용은 학생들이 Starburst 활동을 하면서 그래프와 표의 패턴을 발견한다는 점을 보여준다.



[그림 Ⅳ-7] 선애가 만든 Starburst

발췌문 1 : Starburst 활동 중 패턴 발견

연구자 : 어떤 방법으로 Starburst를 만들었지?

선 애 : 음, 여기 앞에 있는 그래프처럼, x는 -10 하고 10의 두 자리 숫자를 사용했잖아요. 그리고 y는 여기 그래프 좌표를 다 읽어가면서 -10에서 10까지 사용해서 그렸어요

연구자 : 좌표의 위치가 2씩 증가와 감소를 반복했다는 것은 무슨 의미지?

선 애 : 그러니까 좌표가요. 음, 처음에는 -10, -10이었다가 다음에는 -8, 그런 식으로 계속 나가잖아요. 그런 얘기에요.

학생들은 Starburst 활동과제에서 제시하고 있는 그림을 보고 일정한 패턴을 찾아 그래프를 그렸다. 처음에는 표를 완성하고 그래프 그리는 것을 다소 어려워했지만, 몇 개의 그래프를 그리자마자 학생들은 Starburst 좌표의 일정한 패턴을 찾아 그래프를 쉽게 완성하였다. 선애 같은 경우도 그래프 좌표의 위치가 2씩 증가와 감소를 반복한다는 것을 활용하여 Starburst 그래프를 완성했다.

(2) 대상관점 형성

Starburst 활동을 통해 $y=ax(a\neq0)$그래프의 성질까지 이끌어낼 수 있다는 사실은 다음 면담에서 발견할 수 있다.

발췌문 2 : $y=ax(a\neq0)$그래프의 성질 발견

연구자 : $y=ax(a\neq0)$의 식에서 a값은 그래프에 어떠한 영향을 주지?

석 민 : a가 바뀌면 이 기울기가 달라져요.

연구자 : 어떻게 달라지는데?

석 민 : a가 양수면 a가 커질수록 기울기가 위로 올라가고 높아지고, 음수면 아래쪽으로.

지 혜 : a는 기울기 값이니까, 그 기울기는 그래프에서 기울기가 x축에 대해서 크기와 방향에 영향을 주는 것 같아요.

석민과 지혜는 Starburst의 활동을 통하여 $y=ax$ 그래프의 성질인 a값의 부호와 그래

프의 방향, a의 절대값의 크기와 기울기의 관계를 직관적으로 이해했다. 원점을 지나는 일반적인 그래프의 성질을 이해했다는 것을 알 수 있다.

2) $y=ax(a\neq0)$의 그래프 탐구

[표 Ⅳ-2] $y=ax(a\neq0)$의 그래프 탐구 활동 분석 관점

과정관점 형성	대상관점 형성
• $y=x, y=2x, y=-x, y=-2x$의 표에서 x, y 사이의 관계 파악 • $y=ax(a\neq0)$의 식에서 a의 값의 변화에 따른 그래프의 특징 발견	• $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 일반적인 특징 발견

(1) 과정관점 형성

다음은 $y=ax(a\neq0)$의 그래프를 스핀버튼을 활용하여 a값을 다양하게 변화시키는 활동에 대한 면담 내용이다.

발췌문 3 : $y=ax(a\neq0)$그래프에서 a의 역할 탐구

연구자 : 스핀 버튼을 활용해 a의 값을 어떻게 조작했지?

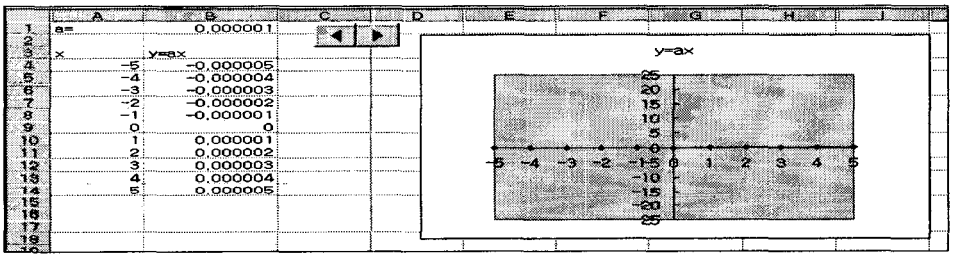
지 혜 : 수의 범위를 마이너스 같은 경우 제가 원하는 대로 입력했는데요. -100000, $+100000$도 해보고 소수도 해보았어요.

연구자 : (학생이 직접 탐구한 엑셀 화면을 보면서) a값을 0.00000001로 한 이유는 무엇이지?

지 혜 : 0에 가까워지면서 기울기가 x축에 얼마나 가까워졌는지를 보려고요.

연구자 : 그렇게 하니까, 그래프가 어떻게 되었지?

지 혜 : 거의 일치하는 것 같아요. 0의 경우랑 거의 비슷해졌어요.



[그림 Ⅳ-8] 지혜의 $y=ax(a\neq0)$그래프 탐구

발췌문을 살펴보면 지혜는 a값을 다양하게 조작하면서 표와 그래프의 변화를 관찰하고 있음을 알 수 있다. 그리고 지혜는 a값을 상당히 작게 하면서 '그래프의 모양이 어떻게 될까?'라는 'what if'전략을 사용했다는 것을 알 수 있다. 결국, 지혜는 교과서에서 경험해 보지 못한 아주 작은 수를 통해 a값이 0에 가까워지면 그래프는 x축에 가까워진다는 사실을 직관적으로 확인할 수 있었다.

(2) 대상관점 형성

발췌문 4: 학생들의 $y=ax(a\neq0)$ 그래프 성질 발견

연구자 : 엑셀 활동을 통해 발견한 $y=ax$ 그래프의 특징은?

영 훈 : 그러니까, a값에 따라 y값이 변한다고 하면, x의 값은 변하지 않고 고정되어 있을 때 a값이 변하고 그 때 y값도 변해요. 예를 들면 $y=3x$에서 x가 4일 때 y는 12가 되고, $y=2x$에서 x가 4일 때 y는 8이 돼요.

연구자 : 그래. 또 다른 특징은?

영 훈 : 부호에 따라 음수는 2사분면, 4사분면을 지나고 양수는 1사분면, 3사분면을 지나요. 그리고 a값이 양수일 때 높아질수록 y축에 가까워지고 음수는 값이 낮아질 때 y축에 가까워져요.

영훈은 $y=2x$와 $y=3x$의 예를 들어 a값에 따른 y값의 변화상황을 이용하여 a값이 커질 때 y축에 가까워진다는 사실을 발견했다. 또한 $y=ax(a\neq0)$ 그래프에서 a값의 부호에 따른 그래프의 방향, a의 절대값이 클수록 그래프가 y축에 가까워진다는 사실을 발견했다. 위의 면담에서 살펴보았듯이 엑셀 탐구활동은 학생들이 $y=ax(a\neq0)$의 그래프의 성질에서 매개변수 a의 역할과 의미를 파악하는 데 도움을 줄 수 있다는 것을 알 수 있다.

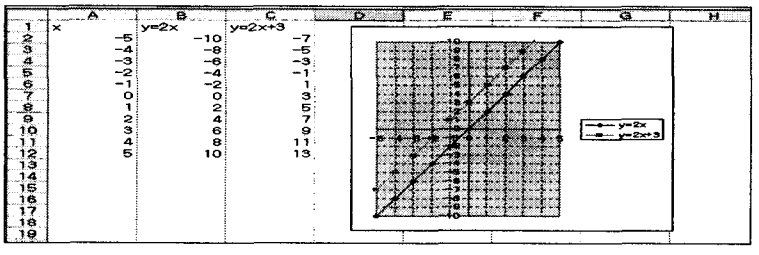
3) $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프 탐구

[표 Ⅳ-3] $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프 탐구 활동 분석 관점

과정관점 형성	대상관점 형성
• 두 일차함수 $y=2x, y=2x+3$의 표와 그래프 관계 파악 • 두 일차함수 $y=-2x, y=-2x+3$의 표와 그래프 관계 파악 • $y=ax+b(a\neq0)$의 식에서 a, b의 값의 변화에 따른 표와 그래프의 특징 발견	• $y=ax$와 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프의 일반적인 관계 발견

(1) 과정관점 형성

엑셀을 활용하여 "$y=2x$와 $y=2x+3$의 표와 그래프를 비교하면서 발견한 사실은 무엇인가?"라는 질문에 학생들은 두 식의 표와 그래프를 엑셀로 표현하면서 다양하게 비교했다. 학생들은 엑셀 화면에 있는 표와 그래프를 비교하면서 두 그래프 사이의 관계를 파악했다. 다음은 학생들이 $y=2x$와 $y=2x+3$ 두 그래프를 비교 설명하는 내용이다.



[그림 Ⅳ-9] 영훈의 $y=2x$와 $y=2x+3$ 그래프 탐구

발췌문 5 : $y=2x$와 $y=2x+3$ 표와 그래프 비교

연구자 : $y=2x$와 $y=2x+3$의 표와 그래프를 비교하면서 발견한 사실이 무엇인지 엑셀 화면을 보면서 설명해볼까?

석 민 : $y=2x+3$이 $y=2x$의 그래프보다 y축 방향으로 +3만큼 평행이동한 것을 볼 수 있었어요.

연구자 : +3만큼? 그것을 어떻게 알 수 있었지?

석 민 : 어, 이 그래프에서 여기를 보면(엑셀 화면을 보면서 설명함.), 이 두 개의 그래프는 기울기가 같으므로 평행한데요. 여기 +3, 이쪽 y절편 이쪽으로 +3이 되어 있으니까, 모두 +3씩 위로 평행이동 했다는 것을 알 수 있었어요.

인 경 : 두 개의 선이 평행하다는 것을 발견했어요.

선 애 : 일단, 두 그래프는 평행하고 기울기가 같아요. 그리고 $y=2x+3$의 그래프는 $y=2x$의 그래프에서 3만큼 이동했고요. 그리고 두 그래프는 1, 3사분면에 있고요. $y=2x$의 그래프일 때 $y=2x+3$의 그래프는 왼쪽에 있어요.

지 혜 : $y=2x$의 그래프는 1사분면과 3사분면을 지나는데, $y=2x+3$의 그래프는 1사분면, 2사분면, 3사분면을 지나는 것을 알 수 있었어요.

영 훈 : 먼저, $y=2x$의 그래프가 $y=2x+3$의 그래프보다 평행으로 세 칸 아래 있다고 생각했어요.

석민, 선애, 지혜, 영훈은 엑셀 활동을 통해 $y=2x+3$의 그래프가 $y=2x$의 그래프보다 +3만큼 평행이동한 것을 직관적으로 이해했다. 발췌문을 보면, 인경이도 완전하지는 않지만, 평행하다는 것을 이해한 것으로 보인다. 선애와 지혜는 $y=2x$의 그래프는 1사분면과 3사분면을 지나고 $y=2x+3$의 그래프는 1사분면, 2사분면, 3사분면을 지난다는 것을 설명하고 있다. 이러한 학생들의 재발견 경험은 학생들이 $y=ax$와 $y=ax+b$ 사이의 그래프의 관계에서 평행이동의 의미를 이해하는 데 징검다리 역할을 할 수 있다. 즉, 이러한 과정 관점에서의 충분한 탐구를 통한 재발견 활동은 학생들이 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프를 대상관점으로 인식하는 데 도움을 줄 수 있다.

(2) 대상관점 형성

다음으로 $y=ax$와 $y=ax+b$ 그래프 사이의 관계에서 발견한 사실들에 대한 면담내용을 제시하고자 한다. 학생들이 $y=ax+b$에서 a, b의 값을 다양하게 조작하고 탐구하면서 발견한 사실들을 발췌한 내용이다.

발췌문 6 : $y=ax$와 $y=ax+b$ 사이의 관계 발견

연구자 : 오늘은 $y=ax$와 $y=ax+b$ 그래프 사이에 어떠한 관계가 있는지 엑셀을 통해 탐구해보았는데, 발견한 사실을 말해볼까?

석 민 : 음, a값이 변함에 따라 a의 값은 기울기의 변화에 관계하고, b의 값은 평행이동에 관계해요. $a>0$이고 $b>0$일 때 그래프는 제 1사분면, 제 2사분면, 제 3사분면을 지나고, $a>0$이고 $b<0$일 때는 제 1, 3, 4사분면을 지나요, 그리고 $a<0$이고 $b>0$일 때는 제 1, 2, 4사분면을 지나고, $a<0$이고 $b<0$일 때

는 제 2, 3, 4사분면을 지나요. 그리고 또 b가 0이면 그래프는 원점을 지나고 a의 값이 0이면 x축에 평행해요. 그리고 둘 다 0이면 x축이 돼요.

인 경 : 아까 했던 것인데요. b를 0으로 하고 a를 올렸을 때 a가 클수록 y쪽으로 향하게 변하고, 어, a를 0으로 하고 b를 올렸을 때는 바로 위로 올라간다. 그것이 b의 값이 y의 값에 영향을 미치는 것 같다고 생각했는데, 영향을 미친다로 바꿀래요.

선 애 : 두 그래프는 평행하는 기울기가 같고, a의 값에 따라 1, 3사분면과 2, 4사분면에 있어요. 그리고 a의 값이 마이너스인 경우에는 $y=-2x$일 때 $y=-2x+3$은 $y=-2x$의 그래프보다 위에 있고요. a의 값이 플러스일 경우에는 $y=2x$와 $y=2x+3$은 $y=2x$ 그래프보다 아래쪽에 있어요. 그리고 a 값이 0이면 x축에 평행하다는 것도 발견했어요.

인경은 활동 전 진단평가에서 $y=ax$와 $y=ax+b$ 그래프 사이의 관계에 대한 질문에 'b를 +한 것'이라 썼지만, 그 의미는 이해하지 못했다. 하지만 엑셀을 활용하여 a, b의 값을 다양하게 조작하면서 a의 값이 클수록 y축에 가까워지고, b의 값은 평행이동과 관계된다는 사실을 이해했음을 알 수 있다. 석민은 a, b의 부호와 값에 따라 그래프의 방향과 지나는 사분면을 분석적으로 제시하면서, 추가로 a의 값이 0일 때는 x축과 평행하고 a, b의 값이 0이면 x축이 된다는 사실도 발견했다. 선애도 a, b의 값을 다양하게 조작해 보고 그에 따른 표와 그래프의 역동적인 상황을 관찰해봄으로써 $y=ax$와 $y=ax+b$ 사이의 관계를 전체적으로 이해하고 있음을 알 수 있다.

위의 발췌문에서 살펴보았듯이, 엑셀을 활용한 탐구활동이 $y=ax$와 $y=ax+b$의 그래프의 관계를 대상관점으로 이해하는 데 도움이 되었음을 알 수 있다.

4) 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 관계 탐구

[표 Ⅳ-4] 일차함수 그래프와 연립방정식의 해의 탐구 활동 분석 관점

과정관점 형성	대상관점 형성
• 연립방정식 $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-2x-2 \end{cases}$의 그래프를 그리고 교점의 좌표 구하기 • 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태와의 관계 발견하기	• 연립방정식의 해와 두 방정식의 형태와의 일반적인 관계 발견하기

(1) 과정관점 형성

다음은 학생들이 연립방정식을 두 개의 일차함수식으로 변환하여 엑셀을 활용해 표와 그래프를 그린 다음 교점의 좌표를 찾는 과정을 보여주는 면담내용이다.

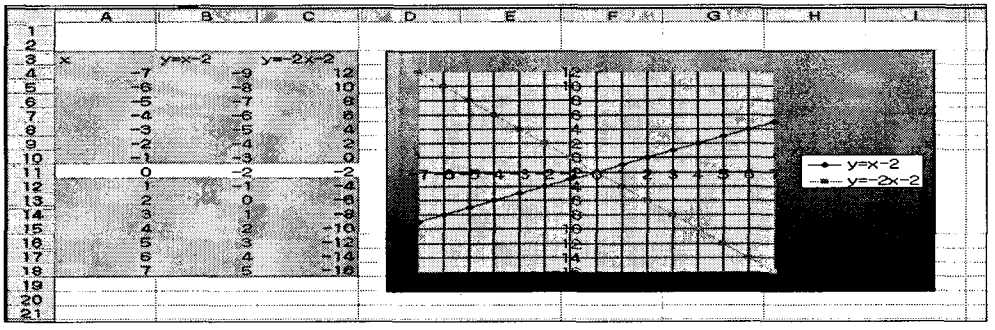
발췌문 7 : 두 그래프의 교점 발견과정

연구자 : 2번의 문제해결에서 교점의 좌표는 어떻게 나왔지?

인 경 : (0, −2).

연구자 : (0, −2)? 어디가?

인 경 : 여기요.(그래프의 좌표를 가리키며)
연구자 : 교점의 좌표를 표에서도 찾을 수 있니?
인 경 : 표에서도 두 개가 같은 것을 찾으면 돼요.
연구자 : 어디 있지?
인 경 : x가 0이고 여기요(엑셀표에서 (0, 2)를 가리킴).
연구자 : 문제2)에서 구한 교점의 좌표와 연립방정식의 해는 어떠한 관계가 있지?
인 경 : 이쪽에 y랑 이쪽에 y가 같아져요. 갑자기 교점에서 같아져요.



[그림 Ⅳ-10] 인경의 연립방정식 해 탐구

인경은 엑셀을 통해 직접 두 일차함수의 그래프를 그려보고 만나는 교점을 실제로 찾아보고, 또한 표를 통해서도 교점의 좌표를 실제로 확인하는 것을 볼 수 있다. 이러한 탐구과정은 연립방정식의 해, 즉 두 일차방정식을 공통으로 만족시키는 (x, y)값을 표를 통해서 확인할 수 있고, 엑셀로 구현한 그래프에서도 교점의 좌표를 발견하게 할 수 있다. 학생들은 일차함수의 두 그래프의 교점과 연립방정식의 해가 같음을 직관적으로 이해할 수 있다.

(2) 대상관점 형성

다음의 면담 내용은 학생들이 탐구와 추측 문제를 통하여 발견한 사실들에 대한 것이다.

발췌문 8 : 연립방정식의 유형과 해의 개수의 관계 이해

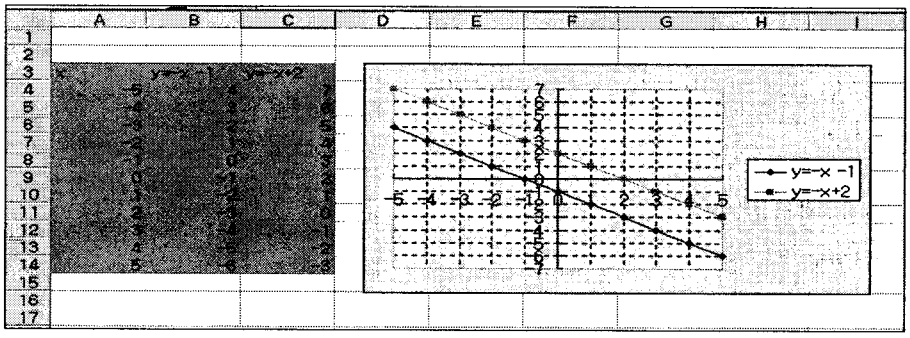
연구자 : 연립방정식의 해의 개수와 두 방정식의 형태는 어떠한 관계가 있는지 추측한 것을 설명해보자.

지 혜 : 먼저 첫 번째에서 보면요. $y=ax+b$, $y=cx+d$와 같이 기울기와 상수가 모두 다른 경우에는 평행하지도 않고, y절편이 같지도 않으니까요. 어느 한 점에서 만날 수 있기 때문에요. 해의 개수가 한 개라고 생각했고요. 또, $y=ax+b$, $y=ax+d$에서는 기울기는 같고 y절편이 다르기 때문에 평행한 그래프가 나오고, y절편이 다르기 때문에 어느 한 점에서 만나지 않기 때문에 해는 없다고 생각했어요. 또 여기는 $y=ax+b$, $y=ax+b$에서 기울기와 y절편 모두 같기 때문에, 해의 개수는 일치하므로 해는 무수히 많다고 생각했어요.

영 훈 : 기울기가 다른 경우의 연립방정식은 해가 하나였고요. 그래프에서 교점이 한

개 있었다는 것을 알 수 있었고요. 기울기가 같고 y절편이 같을 경우 해의 개수는 많았고요. 두 그래프는 일치했고요. 기울기가 같고 y절편이 다른 경우 해가 없었어요. 그래프에서는 두 그래프가 평행했고요.

위의 발췌문에서, 두 학생 모두 연립방정식의 해의 개수와 일차함수의 식의 관계를 분석적으로 제시하고 있다. 발췌문에서 영훈은 연립방정식의 해와 식의 관계에서, 기울기가 다르면 연립방정식의 해는 1개, 기울기가 같고 y절편이 같으면 해의 개수는 많고, 기울기가 같고 y절편은 다른 경우 그래프가 평행하기 때문에 해가 없다는 설명을 하고 있다. 그리고 지혜는 두 일차함수의 식을 비교하는데 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 식을 이용하면서 연립방정식의 해와 그래프의 관계를 분석적으로 설명하고 있다.



[그림 Ⅳ-11] 지혜의 연립방정식의 해 탐구

위 학생들은 연립방정식의 해의 개수를 일차함수 $y=ax+b$의 기울기 a와 y절편 b와 연결하면서 설명하고 있다. 학생들은 엑셀의 탐구과정을 통해 연립방정식과 그래프의 관계를 전체(대상)로 파악하고 있다는 것을 알 수 있다.

5) 제논의 역설 오류 밝히기

[표 Ⅳ-5] 제논의 역설 탐구 활동 분석 관점

과정관점 형성	대상관점 형성
• 거북이와 아킬레스의 속력, 거북이가 몇 m 앞에서 출발했는지 추측해 표와 그래프로 나타내기	• 제논의 역설이 오류가 있음을 일반화 하기

(1) 과정관점 형성

지도교사와 수업 전 협의회에서, 일차함수의 활용부분은 학생들이 흥미를 가질만한 문제를 제시하는 것이 중요하므로, 제논의 역설의 오류를 밝히는 문제는 학생들에게 상당한 흥미를 줄 것이라는 데 의견이 일치했다. 지도교사는 학생들에게 탐구의 재미와 활동에 활력을 주기 위해서, 지도교사가 방법은 제시하되 문제 상황의 설정과 분석은 학생 스스로 하게 하였다. 따라서, 학생들이 거북이와 아킬레스의 속력과 거북이가 몇 m 앞에서 출발했는지 자유롭게 스스로 정해서 문제를 해결할 수 있도록 유도해주기로 했다.

다음은 학생들이 엑셀을 통해 탐구한 제논의 역설이 오류가 있음을 실제 탐구활동을 통해

발견하는 면담내용이다.

발췌문 9 : 제논의 역설 탐구 1

연구자 : 제논의 역설 탐구 활동을 하면서 속력과 거리를 어떻게 정하여 식을 구했는지 설명해볼까?

영 훈 : 아킬레스는 $y=450x$, 거북이는 $y=400x+200$으로 해가지고요. 분당 아킬레스가 450m, 거북이가 분당 400m 해가지고(좀 빠르긴 한데) 그래프를 만들었어요.

연구자 : 몇 m 앞서게 한 거야?

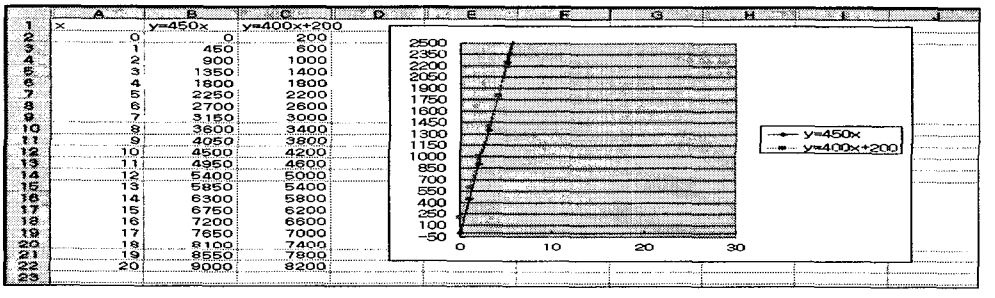
영 훈 : 200m요.

연구자 : 이 그래프와 표에서 어떤 사실을 발견했어?

영 훈 : 200m 먼저 출발하더라도 아킬레스가 분당 속력이 더 빠르니까 아킬레스가 나중에 거북이를 앞지르게 된다는 것을 발견했어요.

연구자 : 그 지점은 어디를 말하지?

영 훈 : x가 4분이 될 때 아킬레스는 1800m, 거북이는 1600m 인데 200m 앞서 가니까 1800m, 4분이 지나서는 아킬레스가 거북이를 앞서게 됐어요.



x	y=450x	y=400x+200
0	0	200
1	450	600
2	900	1000
3	1350	1400
4	1800	1800
5	2250	2200
6	2700	2600
7	3150	3000
8	3600	3400
9	4050	3800
10	4500	4200
11	4950	4600
12	5400	5000
13	5850	5400
14	6300	5800
15	6750	6200
16	7200	6600
17	7650	7000
18	8100	7400
19	8550	7800
20	9000	8200

[그림 Ⅳ-12] 영훈의 제논의 역설 탐구

위의 면담내용을 살펴보면, 영훈은 아킬레스의 속력을 450m, 거북이의 속력을 400m라 하고 거북이가 200m 앞서게 하는 상황을 만들었다. x는 시간, y는 거리, 그리고 속력을 활용하여 아킬레스가 간 거리는 $y=450x$, 거북이가 간 거리는 $y=400x+200$으로 식을 세운 다음 표와 그래프로 나타내었다. 이러한 문제 상황의 탐구를 통해 4분이 되었을 때 거북이와 아킬레스는 만나게 되고, 4분이 지난 후에는 아킬레스가 앞선다는 것을 알게 되어, 제논의 역설이 오류가 있음을 밝혀내었다. 즉, 영훈은 제논의 역설의 오류를 밝히는 과정에서 속력과 시간 거리의 관계를 식으로 나타내고, 그 식을 바탕으로 표와 그래프로 나타내봄으로써 함수의 세 가지 표상을 활용하여 문제를 해결했다는 것을 알 수 있다.

(2) 대상관점 형성

엑셀 조작에 가장 능숙한 학생이 석민이다. 석민은 상수 그래프의 탐구활동에도 스핀버튼을 활용했는데, 활용문제에도 스핀버튼을 활용해 다른 학생들보다 다양하게 제논의 역설을 탐구하고 있었다. 다음은 석민과의 면담내용이다.

발췌문 10 : 제논의 역설 탐구 2

연구자 : 그러면 석민이가 속력도 정하고 거북이가 앞서 출발한 거리도 정하고, 그래서 그래프를 그리고 표도 만들어봤는데, 거기서 발견한 사실이 뭔지 설명해볼까?

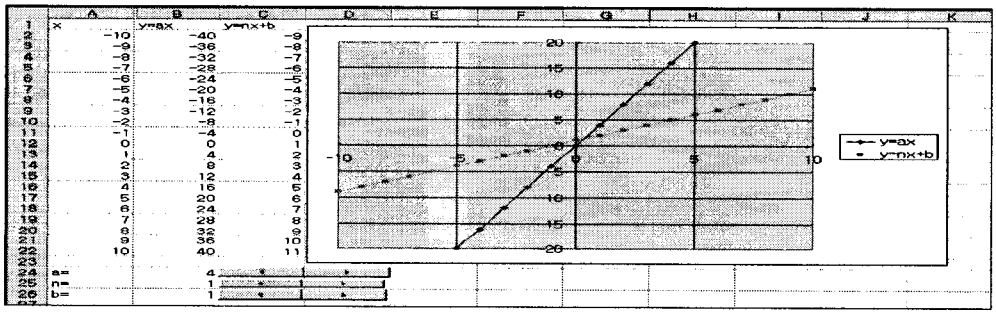
석 민 : 어, 거북이가 아무리 앞서 갔더라도, 이 기울기가 다르면 언젠가는 만날 거란 사실을 알게 됐어요. 그 이후로는 쭉 아킬레스가 앞서가게 돼요.

연구자 : 제논의 역설을 스핀 버튼을 이용해서 탐구했는데, 어떤 결과가 나왔지?

석 민 : 네. 이걸 시간이라 하고요. 이건 아킬레스의 속도, 이건 거북이의 속도고요(엑셀 화면을 보면서 설명).

연구자 : $y=ax$가 아킬레스 거리이고, $y=nx+b$가 거북이 거리라고 했는데?

석 민 : 여기서 아킬레스의 속력 a를 조정하면, 아킬레스의 속력을 조절할 수 있고요. 이 파란색($y=ax$의 그래프). 그리고 거북이의 속력도 n스핀 버튼을 이용해서 조절할 수 있어요. 또 거북이가 얼마나 앞서갔는지 세 번째 스핀버튼을 이용해가지고 이것도 조절해서요. 그 만나는 부분을 알아낼 수 있어요.



[그림 Ⅳ-13] 석민의 제논의 역설 탐구

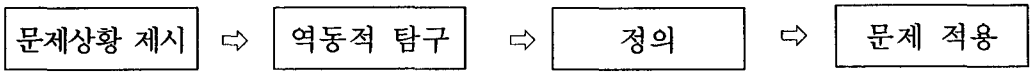
석민은 엑셀의 탐구활동을 통해 연립방정식의 해와 그래프의 관계, "기울기가 다르면 두 그래프는 한 점에서 만난다."는 것을 대상관점으로 사고하고 있다는 것을 알 수 있다. 또한, 석민은 엑셀의 동적도구인 스핀버튼을 활용해 제논의 역설문제를 다양하게 조작하면서 관찰한 것을 알 수 있다. 아킬레스와 거북이의 관계식을 $y=ax$, $y=nx+b$, a는 아킬레스의 속력, n은 거북이의 속력, b는 거북이가 앞선 거리로 놓고, a, n, b를 역동적으로 조작하면서 두 관계식의 표와 그래프를 관찰했다. 석민의 이러한 활동은 일차함수의 관계식 $y=ax+b$에서 매개변수 a와 b의 역할을 대상화했다는 것을 보여준다.

Ⅴ. 함수의 교수-학습 개선을 위한 방안

1. 함수관련 정의의 교수-학습

함수관련 정의 지도시 교과서에 제시한 것처럼 단편적인 예를 통해 용어를 정의하고 바로 문제에 적용하는 단계는 함수의 개념을 대상으로 이해하는 데 어려움을 줄 수 있다. 따라서 지필환경의 제한점이기도 한 Sfard의 과정-대상의 연속적인 발달단계 중 간결화(condensation)단계를 강화시킬 필요가 있다. 간결화 단계는 교과서에서 제시한 단편적인 예를 학생 스스로 확장해 역동적으로 탐구할 수 있는 환경을 말한다. Wilson et al.,(2004)은

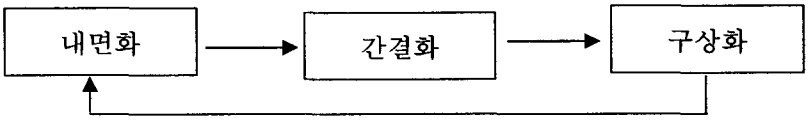
스프레드시트가 학생들이 변수의 이해를 개발하는 데 도움을 준다고 제안했다. 교수실험 분석과정에서도 학생들은 엑셀을 활용한 역동적인 탐구환경에서 변수의 의미, 기울기의 의미를 대상관점으로 이해한다는 것을 보여주었다. 함수관련 정의를 지도할 때 [그림 V-1]과 같이 단편적인 예와 동적 탐구활동이 끝난 후 용어에 대한 정의를 하고, 이어서 정의관련 내용을 문제에 적용할 수 있는 기회를 제공하는 것이 바람직하다.



[그림 V-1] 용어의 교수-학습 과정

2. 일차함수의 그래프 교수-학습

일차함수 그래프의 전개과정에서 중요한 것은 그래프의 성질을 일반화할 수 있도록 충분한 탐구를 할 수 있는 기회를 제공하는 데 있다. 교과서에서 제시하는 활동구조에 변수의 값을 다양하게 조작하면서 표와 그래프를 관찰할 수 있는 탐구활동을 제공한다면 학생들은 그래프의 성질을 대상관점으로 쉽게 이해할 수 있다. 아래의 [그림 V-2]는 Sfard가 주장한 3단계 내용을 토대로 일차함수를 올바르게 지도하는 교수-학습과정을 도식화한 것이다. Sutherland & Rojano(1993)도 스프레드시트가 구체적인 사고를 일반화할 수 있도록 비형식적인 아이디어를 표현하고 탐구하는 데 도움을 준다고 주장하였다. 엑셀을 활용한 교수실험에서도 학생들은 동적인 탐구환경을 통해 다양한 그래프를 관찰하면서 일차함수 그래프의 성질을 분석적으로 이해하고 그래프의 성질을 일반화 또는 대상화하고 있음을 보여주었다. 이러한 교수실험 결과는 일차함수 그래프의 성질을 대상화하기 위해서 역동적인 탐구과정인 간결화 과정이 강조되어야 함을 입증한 것이다.



[그림 V-2] 일차함수 그래프의 교수-학습 과정

아래의 내용은 엑셀을 활용한 일차함수 $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프 탐구에 대한 교수-학습 내용이다.

▣ $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프 탐구

► 내면화 단계

- $y=2x$와 $y=2x+3$의 표와 그래프를 엑셀을 활용하여 나타내고, 두 일차함수식의 표와 그래프를 비교하면서 특징을 발견할 수 있도록 한다.
- $y=-2x$와 $y=-2x+3$의 표와 그래프를 엑셀을 활용하여 나타내고 두 식의 표와 그래프 사이의 특징이 무엇인지 비교하면서 발견하게 한다.

► 간결화 단계

- $y=ax+b(a\neq0)$ 그래프를 동적으로 구현할 수 있는 스핀버튼 환경을 만들게 한다. 지도교사는 스핀버튼 만드는 방법을 충분히 숙지하여 스핀버튼을 만드는 과정에서 발생할 수 있는 오류를 사전에 방지할 수 있도록 한다.
- $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서 b의 값은 같게 하고 a의 값을 다양하게 변화시킬 수 있도록 하고, 변화시켰을 때 발견한 사실을 기록할 수 있게 한다. 학생들은 a의 값 대신 보통 자연수 범위에서 입력할 수 있으므로 소수, 분수 등의 다양한 수들을 입력하여 표와 그래프의 변화를 탐구할 수 있게 한다.
- $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서 a의 값은 고정시키고 b의 값을 변화시켰을 때 발견한 사실을 기록하게 한다. b의 값도 마찬가지로 다양한 수를 대입하여 표와 그래프의 변화를 탐구할 수 있게 한다.
- $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에서 매개변수 a, b의 값을 다양하게 변화시켰을 때 두 그래프의 평행이동을 발견할 수 있도록 유도한다. 또한 평행이동의 의미를 알았으면, 예를 들어 설명할 수 있게 한다.

► 구상화 단계

- $y=ax(a\neq0)$의 그래프와 $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프 사이에 어떤 관계가 있는지 발견한 사실을 설명하게 한다.

Ⅵ. 결론

본 연구의 목적은 학생들이 엑셀을 활용하여 일차함수 단원을 학습할 때 함수의 과정-대상관점을 어떻게 형성해나가는지 분석함으로써 함수의 효과적인 교수-학습방안을 모색하는데 있다.

현재 다루고 있는 교과서 수학 7-가, 수학 8-가 2종을 선택해 용어의 정의, 일차함수의 그래프 내용을 과정-대상관점으로 분석한 내용에 대한 결론은 다음과 같다.

첫째, 교과서의 변수와 정비례, 기울기의 정의 과정을 살펴보면, 과정관점에서의 탐구과정이 생략되거나 약화되어 있다는 것을 알 수 있다. 학생들이 정의의 의미를 바르게 이해할 수 있도록 하는 탐구과정을 제공할 필요가 있다.

둘째, 일차함수 $y=ax(a\neq0)$, $y=ax+b(a\neq0)$의 그래프에 대한 내용을 다룰 때, 두 그래프의 성질을 대상관점에서 이해할 수 있도록 a, b의 값을 다양하게 탐구할 수 있는 역동적인 환경을 제공할 필요가 있다.

다음은 엑셀을 활용하여 함수의 과정-대상관점을 형성시키는 교수실험의 분석결과를 토대로 내린 결론이다.

첫째, 학생들은 $y=ax$나 $y=ax+b$ 식에서 매개변수 a, b의 값을 과정적 측면의 다양한 조작을 통해 변화시켰으며, 이를 통하여 변수의 개념을 대상관점에서 이해하였다. 학생들은 교수실험 전의 면담에서 변수의 의미를 제대로 이해하지 못하고 미지수나, 자리지기 정도로 이해하였다. 하지만, 엑셀 활동 후 변수의 의미를 분명히 이해한다는 것을 면담을 통해 확인할 수 있었다. 따라서 변수를 역동적으로 경험할 수 있는 충분한 학습기회가 제공되면

대상관점에서도 이해할 수 있음을 알 수 있다.

둘째, 엑셀 환경에서 함수 관련 내용을 탐구할 때, 식과 표와 그래프를 다양하게 조작한 경험은 일차함수의 그래프에 대한 과정관점과 대상관점 형성을 촉진시켰다. 즉, 엑셀 환경의 추측과 피드백의 반복적인 과정이 과정-대상관점 형성에 영향을 끼친다고 할 수 있다. 지필 환경에서는 함수의 세 가지 표상인 대수식, 표, 그래프를 정적인 하나의 예로 제시하면서 일반화시키고 있다. 이러한 지필환경을 보완하기 위해서는 함수의 세 가지 표상을 역동적으로 탐구할 수 있는 엑셀과 같은 탐구용 소프트웨어를 활용하는 것이 필요함을 알 수 있다.

셋째, 엑셀 환경은 학생들의 일차함수에 대한 탐구능력과 문제해결력에 긍정적인 영향을 미쳤다. 학생들은 교수실험 전에는 일차함수에 대한 단편적인 지식을 가지고 있었지만, 엑셀 탐구활동을 통해서 일차함수에 대한 지식이 풍부해졌고, 이러한 지식이 탐구문제를 해결하는 데 효과적으로 작용하였다.

넷째, 학생들은 스스로 규칙을 정해 식을 만들고 표와 그래프를 나타내면서 그 변화를 상당히 흥미롭고 재미있게 탐구하였다. 처음에 학생들은 함수하면 어렵고 따분한 내용이라고 생각했지만, 교수실험이 진행될수록 학생들은 식과 표와 그래프를 동시에 관찰하는 것에 익숙해졌고, 귀납적인 관찰을 통해 일반적인 규칙을 발견하려는 성향을 보이면서 함수 학습에 대한 흥미와 관심이 높아짐을 발견할 수 있었다.

정리하면 엑셀은 학생들에게 지필환경의 약점을 보완할 수 있는 다양한 탐구학습의 기회를 제공해 줌으로써 함수의 개념이나 그래프의 성질을 대상화하는데 긍정적인 영향을 준다는 것을 입증해주었다. 엑셀의 탐구환경은 학생들에게 함수의 개념을 대상화할 수 있는 피드백을 제공함으로써 함수와 관련된 내용을 올바르게 이해할 수 있는 비계설정(scaffolding) 역할을 했다는 것을 알 수 있다. 이러한 엑셀의 역동적인 탐구활동은 딘즈(Dienes)가 주장한 '수학적 다양성의 원리'와도 부합된다.

하지만 엑셀의 역동적, 탐구적, 시각적인 장점을 효과적으로 활용하기 위해서는 교사의 역할이 무엇보다 중요하다. 교사는 엑셀을 활용하여 지도할 수 있는 전문성이 있어야 하며, 메타-인지 이동[10]이 일어나지 않도록 학습내용 선택이나 과제의 계열 구성부터 학생 활동과정, 교사의 적절한 피드백에 이르기까지 세심한 활동계획을 구성해야 할 것이다.

앞으로 학교현장의 교사들이 일차함수 단원을 효과적으로 지도할 수 있는 방안으로 엑셀과 같은 탐구용 소프트웨어를 활용하기를 기대하면서 지필환경과 공학환경을 통합할 수 있는 새로운 교육과정 운영에 대한 지속적인 연구가 이루어지길 제안한다.

참고문헌

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2004). 수학 7-가, 수학 8-가. 서울: 고려출판.

김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

10) 메타-인지 이동은 수학적 지식의 배경화/개인화에 주목한 나머지 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 자체보다는 이를 용이하게 하기 위해 도입된 교수학적 보조수단으로 옮겨가는 것을 말한다(황혜정 등, 2002). 엑셀을 활용한 교수학적 상황에서 학생들이 주어진 과제를 해결하거나 수학적 지식을 학습하는 데 집중하기보다는 엑셀의 기능적인 측면을 이용하여 문제를 쉽게 해결하는 것에 집중하는 메타인지 이동이 일어날 수 있음에 주의해야 한다.

김지연 (2005). 엑셀을 활용한 소그룹 모델링에서의 상호작용. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

류희찬 (2004). 수학교육에서 탐구형 소프트웨어의 활용방안. 청람수학교육 제 14집, pp. 1-15. 한국교원대학교 수학교육연구소.

손홍찬 (2006). 스프레드시트를 활용한 수학적 모델링 활동에서의 수학적 발견과 정당화. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

신동선·류희찬(1998). 수학교육과 컴퓨터, 경문사.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

조태근·임성모·정상권·이재학·이성재 (2000). 수학 7-가, 수학 8-가. (주)금성출판사.

한순미(1999). 비고츠키와 교육, 교육과학사.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2002). 수학교육학신론, 문음사 도서출판.

Garay, A. (2001). Using multiple coordinated representations in a technology-intensive setting to teach linear functions at the college level. University Of Illnois At Urbana-Champaign(0090). Ed.D.

Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology: Integrating research on learning and instruction. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), Integrating research on the graphical representation of functions(pp. 189-238). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Acavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), Integrating research on the graphical representation of functions(pp. 69-100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associations, Publishers.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran(Eds.), Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education(Vol.Ⅲ, pp. 162-169). Montreal, Quebec: Universite de Montreal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

Sharan, M. (1998). Qualitative Research and case study application in education. 강윤수 외 7인 (역) (2005). 정성연구방법론과 사례연구. 교우사.

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. Journal of Mathematical Behavior, 12, pp353-383.

Sutherland, R., Healy, L., & Pozzi, S. (2001). Reflections on the role of the computer in the development of algebraic thinking. Perspectives on school algebra (pp.231-247). Kluwer academic Publishers.

Wilson, K., Ainley, J. & BILLS, I. (2004). Spreadsheet generalising and paper and pencil generalising. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME, 4, pp. 441-448.

A Case Study on Formation of the Process - Object Perspective of Linear Function using Excel

Lee, Kwang Sang[11)]

Abstract

The purpose of this study is to search the effective teaching-learning program by considering how affect on formation of the process-object perspective of linear function using Excel. In this study we analyzed function units in textbook and examined how Excel affect on the formation of the process-object perspective of linear function. Teaching experiment was based on qualitative case study and performed for five classes with five 8th graders. Data were gathered through observations, audio-taped interviews, video recording of the students' work, students' worksheets, and detailed field notes. Findings indicate that exploration learning environment using Excel could supplement paper-and-pencil environment. We found that intuitive, dynamic, explorative, feedback skills via Excel can play the role of scaffolding supporting formation of process perspective object perspective of linear function.

Key Words : Formation of process-object perspective, Excel environment, Intuitive; Dynamic, Exploration, Feedback skills, Role of scaffolding

11) Seosan Agricultural Technical High School (damchan@hanmail.net)