한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 2, 237-246, June 2007

무한소수에 대한 학생들의 이해

박달원[1)]

무한소수에 대한 학생들의 오개념은 무한소수의 표현방법과 표현된 무한소수의 해석에 원인이 있으며 유리수와 무리수에 대한 학생들의 자의적인 정의도 원인이 있는 것으로 나타났다. 무한소수에 대한 학생들의 이해의 유형은 순환유추형, 규칙유추형, 순환-비순환유추형, 비유추형으로 분류되었으며, 무리수와 유리수에 대한 자의적인 정의에 따라 무한무리유추형, 규칙유리-비규칙무리유추형으로 분류되었다.

주요용어 : 유리수, 무리수, 순환소수, 순환하지 않는 무한소수

Ⅰ. 서론

무한이 철학, 수학 과학에서는 중요한 개념이지만 경험과학에서는 무한이 큰 문제가 되지 않는다. 아리스토텔레스는 무한을 목적에 도달할 때까지 수학적 과정을 계속하는 가무한 또는 잠재적 무한(Potential Infinite)과 자연수 자체를 하나로 생각하는 것처럼 무한전체를 동시에 생각하는 실재적 무한 또는 실무한(Actual Infinite)으로 구분하였다(David Tall, 2003).

Cantor는 일차원의 연속체와 n차원 연속체사이에 일대일 대응사상이 존재함을 증명하고 나서 Dedekind에게 “내가 기대하지 않았던 이 결과는 너무나 새롭기 때문에 나의 발견이 정확하다는 당신의 견해를 듣기까지 나는 정신적인 평온을 찾을 수 없을 것입니다.”라고 고백하였다고 한다. Cantor는 자신이 제기한 집합의 대등성을 뒷받침하는 증명을 완성한 이후에도 그 정리의 타당성을 걱정할 정도로 직관적 개념이 깊게 뿌리를 내리고 있었다(우정호, 2004).

전혀 의심 없이 성립되는 성질이지만 대상이 바뀌면 성립되지 않는 성질이 많다. 예를 들면 교환법칙이나 결합법칙은 수의 계산에서 의심 없이 받아들이는 성질이지만 무한급수에서는 성립되지 않는 법칙이다. 진부분집합의 원소의 개수가 전체집합의 원소의 개수보다 작다는 것은 유한집합에서는 당연한 사실이지만 무한집합에서는 성립되지 않는 성질이다.

중학교 2학년에서 유리수를 소수로 고치면서 자연스럽게 무한소수에 접하게 된다. 많은 학생들은 0.999⋯=1임을 계산을 통하여 확인하면서도 직관적으로 이 사실을 받아들이는데 주저하게 된다. 이는 0.999⋯를 계속적으로 1을 향하여 움직이는 수로 이해하고 있기 때문이다(우정호, 2000). 학생들은 무한을 가무한으로 이해하고 있기 때문에 실무한을 받아들이는데 어려움을 갖게 된다.

---

1) 공주대학교 (dwpark@kongju.ac.kr)

수학자들은 직관적인 증거를 잠재적 오류로 간주하고 수학적인 확신을 논리적인 체계에서 찾고자 한다. 그러나 수학교육자들은 오류가능성이 있는 방법일지라도 효과적인 학습을 위해서는 직관적인 방법을 선택할 수밖에 없다. 무리수의 지도 문제도 위와 같은 문제점을 가지고 있기 때문에 많은 오개념이 발생되고 있다.

본 연구에서는 유한소수와 무한소수에 대한 정의를 살펴보고 순환하지 않는 무한소수를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 K대학교의 과학영재교육원 학생들과 대전광역시에 소재하고 있는 Y고등학교 학생을 대상으로 설문조사를 실시하여 그 결과를 분석하였다.

본 연구결과는 특정 학생들을 대상으로 조사한 것이기 때문에 연구결과를 일반화하는 것은 무리가 있지만 학생들의 무한소수에 대한 이해를 분류하고 이해의 오류를 교정하는 연구에 기여할 것으로 기대한다.

Ⅱ. 무한소수에 대한 이해의 분류

1. 유한소수와 무한소수의 정의

제 7차 교육과정의 각 교과서에서는 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 개인 소수를 유한소수라 하고 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한 개인 소수를 무한소수로 정의한다. 김홍기(2004)와 우정호(2000)는 기수법의 일관성을 유지하기 위하여 1.000…과 같이 소수점 아래의 0이 연속하여 나타나는 경우에, 이와 같은 수를 무한소수로 정의해야 한다고 말하고 있다. 또한 김홍기(2004)는 A F. Coxford 외(1987)의 교과서 HBJ ALGEBRA에서도 순환마디가 0인 소수를 무한소수로 정의하고 있음을 밝히고 있다.

유한소수와 무한소수에 대한 정의를 논하려면 먼저 소수(decimal)의 정의를 살펴보는 것이 중요하다. 중학교에서는 특별히 소수에 대한 엄밀한 정의를 하고 있지 않지만 조태근 외 4인(2003)은 정수 5는 5.0과 같으므로 유한소수로 볼 수 있다고 하여 정수가 유한소수가 됨을 말하고 있다. 이런 정의를 받아들인다면 1=0.999…이므로 1이 무한소수라는 주장을 받아들여야 한다. 황석근 외 1인(2003)은 0을 제외한 모든 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다고 하였는데 이는 0을 유한소수나 무한소수로 나타낼 수 없다라는 의미를 내포하고 있다고 할 수 있다.

소수는 수에 대한 표현방법이다. 즉, 5=5.0이지만 5.0은 5에 대한 다른 표현이다. 따라서 소수를 '소수점을 사용하여 나타낸 십진수'라는 의미로 받아들여야 한다. 즉, 4는 소수가 아니지만 4.0은 소수가 된다. 따라서 제7차 수학과 교육과정의 수학 8-가의 유리수와 소수단원에서 제시한 학습목표 '유리수를 소수로 나타낼 수 있다.'가 성립된다. 유한소수와 무한소수는 서로소인 집합이 아니며 소수에 대한 서로 다른 표현방법이다. 따라서 4.999…를 무한소수이라 하면 당연히 5.000…도 무한소수라고 정의하는 것이 바른 방법이다.

2. 무한소수의 표현에 대한 이해의 분류

Y고등학교 97명과 K대학교 과학영재교육원 수학반 심화과정 19명에 대하여 2007년 3월에 설문조사를 실시한 결과 무한소수를 유리수와 무리수로 판정할 때 발생되는 오개념의 원

인은 아래와 같이 두 가지로 분류되었다.

하나는 표현된 무한소수에 대한 해석이 학생들마다 다르게 나타나는 것이고 다른 하나는 유리수와 무리수의 자의적인 정의로 인한 오개념이 원인이 되고 있다. 무한소수에 대한 이해는 표현된 무한소수에 대한 해석에 따라 순환유추형, 규칙유추형, 순환-비순환유추형, 비유추형으로 분류되며 유리수와 무리수의 정의에 따라 무한무리유추형, 규칙유리-비규칙무리유추형으로 분류되었다.

(1) 순환유추형 : 무한소수의 줄임표 앞자리에서 반복마디가 있는 경우 이를 유추하여 주어진 수를 순환소수로 판정하지만 무한소수의 줄임표 앞자리에서 순환마디가 없는 경우에는 주어진 무한소수가 순환소수인지 순환하지 않는 무한소수인지를 판정할 수 없다고 하는 것이다. 예를 들면 2.343434…를 순환소수로 유추하지만 1.4532953…이 순환소수인지 무리수인지를 판정할 수 없다고 하는 것이다.

(2) 규칙유추형 : 무한소수의 줄임표 앞자리에서 규칙이 있는 경우 이를 유추하여 규칙이 계속된다고 유추하지만 무한소수의 줄임표 앞자리에서의 규칙성을 발견할 수 없는 경우 주어진 무한소수가 순환소수인지 순환하지 않는 무한소수인지를 판정할 수 없다는 것을 말한다. 예를 들면 0.1010010001…과 2.343434…는 규칙성으로부터 무리수, 유리수로 판정하지만 1.4532954…는 유리수 또는 무리수로 판정할 수 없다고 하는 것이다.

(3) 순환-비순환유추형 : 무한소수의 줄임표 앞자리에서 반복마디가 있는 경우 이를 유추하여 주어진 수를 순환소수로 판정하고 무한소수의 줄임표 앞자리에서 순환마디가 없는 경우에는 주어진 무한소수를 순환하지 않는 무한소수로 유추하는 것을 말한다. 즉, 줄임표 앞자리에서의 비순환성이 계속된다고 유추하는 것이다. 예를 들면 2.343434…를 순환소수로 유추하고 1.4532953…의 줄임표 앞자리에서 비순환성이 무한히 계속된다고 유추하는 것이다.

(4) 비유추형 : 줄임표를 이용하여 표현된 무한소수의 유한자리의 숫자만으로 주어진 무한소수가 유리수인지 무리수인지를 판정할 수 없다고 하는 것을 말한다. 예를 들면 0.1010010001…과 2.343434…는 유리수인지 무리수인지 판정할 수 없다는 것이다.

(5) 규칙유리-비규칙무리유추형 : 줄임표 앞자리에서 규칙이 있는 경우 주어진 소수를 유리수로 유리수로 판정하고 규칙이 없는 경우 주어진 무한소수를 무리수로 판정하는 것을 말한다. 즉, 0.1010010001…과 2.343434…에는 규칙이 있기 때문에 주어진 수를 유리수로 판정하고 1.4532954…에는 규칙이 없기 때문에 무리수로 판정하는 것을 말한다.

(6) 무한무리유추형 : 무한소수를 무리수로 판정하는 것을 말한다. 이 유형에 속하는 학생들은 유한소수를 유리수로, 무한소수를 무리수로 판정하게 된다.

위에서 제시한 이해의 분류 근거를 요약하면 아래의 [표Ⅱ-1]과 같다.

[표 Ⅱ-1] 무한소수에 대한 이해의 분류 기준

분류 \ 무한소수		0.1010010001⋯	3.141592⋯	1.4532954⋯	2.343434⋯
무한소수의 해석	순환유추형	판정불가	판정불가	판정불가	유리수
	규칙유추형	무리수	판정불가	판정불가	유리수
	순환-비순환유추형	무리수	무리수	무리수	유리수
	비유추형	판정불가	판정불가	판정불가	판정불가
유리수와 무리수의 자의적 정의	규칙유리 -비규칙무리유추형	유리수	무리수	무리수	유리수
	무한무리유추형	무리수	무리수	무리수	무리수

3. 무한소수에 대한 설문조사 결과

(1) 대전광역시에 소재하고 있는 Y고등학교 학생들에게 실시한 설문조사 결과를 [표Ⅱ-1]에서 제시한 기준에 의하여 학년별로 학생들을 분류하면 아래의 [표Ⅱ-2]와 같다.

[표 Ⅱ-2] 무한소수에 대한 고등학생들의 이해의 분류

대상 \ 분류	순환-비순환유추형	무한무리유추형	규칙유리 -비규칙무리 유추형	규칙유추형	기타
1학년 (N=36)	25명 (69.4%)	4명 (11.1%)	2명 (5.5%)	1명 (2.7%)	4명 (11.1%)
2학년 (N=33)	15명 (45.5%)	4명 (12.1%)	10명 (30.3%)	2명 (6.1%)	2명 (6.1%)
3학년 (N=28)	18명 (64.3%)	4명 (14.3%)	4명 (14.3%)	1명 (3.6%)	1명 (3.6%)
합계 (N=97)	58명 (59.8%)	12명 (12.4%)	16명 (16.5%)	4명 (4.1%)	7명 (7.2%)

전체 97명의 학생 중에서 무한소수의 표현에 따라 분류한 순환-비순환유추형, 규칙유추형이 각각 58명(59.8%), 4명(4.1%)으로 나타났으며 유리수와 무리수의 정의에 대한 오개념으로 분류된 무한무리유추형, 규칙유리-비규칙무리유추형이 각각 12명(12.4%), 16명(16.5%)으로 나타났다. 무한무리유추형의 경우 학년별로 동일하게 4명으로 나타났으며 2학년의 규칙유리-비규칙무리유추형이 10명(30.3%)로 다른 학년에 비해 높게 나타난 것이 특이한 사항이다.

(2) K대학교 과학영재교육원의 중등 수학반 심화과정에 재학 중인 19명의 학생들에게 실시한 설문조사 결과를 [표 Ⅱ-1]에서 제시한 기준에 의하여 분류한 결과는 아래의 [표Ⅱ-2]와 같다.

[표 Ⅱ-2] 무한소수에 대한 과학영재교육원 수학반 심화과정 학생들의 이해의 분류

분류 / 대상	순환-비순환유추형	순환유추	규칙유추	비유추형
심화과정 (N=19)	10명 (52.6%)	4명 (21.1%)	3명 (15.8%)	2명 (10.5%)

영재교육원 수학반 심화과정의 학생들 중에는 유리수와 무리수의 정의에 대한 오개념으로 분류된 무한무리유추형과 규칙유리-비규칙무리유추형에 속하는 학생들은 없는 것으로 나타났으며 학생들에 대한 추가적인 질문으로 과학영재교육원 학생들이 유리수와 무리수에 대한 정의를 '순환하지 않는 무한소수' 또는 '정수의 비로 나타낼 수 없는 수'로 이해하고 있는 것으로 확인되었다. 순환유추, 규칙유추, 비유추형에 속하는 학생들이 9명(47.4%)으로 나타나 무한소수의 표현에 대한 엄밀성에 대한 의구심을 가지고 있었으며 규칙유추형이 3명(15.8%)로 조사된 97명의 고등학생 중 4명(4.1%)에 비해 높은 비율로 나타났다.

고등학생 97명과 과학영재교육원 심화과정 19명에 대한 조사결과 순환-비순환유추형이 각각 58명(59.8%), 10명(52.6%)으로 나타났다. 표현된 무한소수의 줄임표 앞자리에서 반복마디가 있을 때, 이러한 마디가 계속하여 나타난다고 유추하는 것은 수학교육의 자연스러운 결과라 할 수 있지만 줄임표 앞자리에서 순환마디를 발견할 수 없다고 하여 주어진 무한소수를 순환하지 않는 무한소수로 판정하는 것은 과도한 유추에 해당되는 것이다. 유한 자리에서 규칙성이 없다고 하여 전체에 규칙성이 없다고 판정하는 것은 수학교육이 추구하는 규칙탐구와는 거리가 먼 결과라 할 수 있다.

순환유추 4명(21.1%)은 줄임표 앞자리에서 반복마디가 있으면 이를 순환소수로 유추하지만 반복마디가 없는 경우에는 유리수인지 무리수인지를 판정할 수 없다고 응답하였다. 이 유형에 속하는 학생들은 비순환성을 하나의 규칙으로 인식하지 않고 있기 때문에 순환-비순환유추형의 학생보다는 좀 더 연역적인 사고가 높은 단계에 있다고 할 수 있다.

규칙유추형 3명(15.8%)은 줄임표 앞자리에서의 규칙성이 있으면 이를 통하여 전체를 유추할 수 있지만 규칙성이 없으면 주어진 수가 유리수인지 무리수인지를 판정할 수 없다고 하였다. 이 유형에 속하는 학생들이 수학 교육에 목적에 가장 잘 부합된 학생들이라 볼 수 있다. 수학은 규칙과 패턴을 연구하는 학문이다. 유한에서의 규칙이나 패턴으로부터 전체를 유추하고 그리고 연역적으로 증명하는 절차가 수학교육에서는 중요한 단계이다.

비유추형 2명(10.5%)은 무한소수에 대하여 매우 엄밀하게 해석하는 학생들이다. 줄임표 앞자리에서 반복되는 마디가 있어도 이 마디가 계속된다는 보장이 없다고 주장하였다. 학생들의 면담조사결과 '1.1212…'만으로는 이 수가 순환소수인지 무한소수인지를 판정할 수 없지만 '순환소수 1.1212…'라고 설명해야 주어진 수를 순환소수로 판정할 수 있다고 응답하였다.

Ⅲ. 무한소수의 표현과 무리수의 도입

1. 무한소수에서의 줄임표(…) 사용

비순환유추형에 속하는 학생들은 3.141592…와 1.4532954…의 줄임표 앞자리에서 순환마디

를 찾을 수 없기 때문에 각각의 수를 순환하지 않는 무한소수라고 판정하고 있다. 이렇게 유한에서 비순환성을 유추하는 것은 줄임표의 사용에 대한 정확한 정의가 없기 때문이라 볼 수 있다. 따라서 무한소수에 대한 학생들의 오개념은 무한소수의 표기에서부터 출발한다고 할 수 있다.

고성은 외 5인(2003)은 주사위를 무한히 던져 만들어지는 소수 이를 테면 0.252435…는 순환소수가 아니므로 0.252435…는 유리수가 아님을 알 수 있다고 하고 이와 같이 유리수가 아닌 수를 무리수라고 정의하였다. 그러나 주사위를 무한히 던지는 활동은 불가능한 것이며 만약 주사위를 무한히 던지는 활동을 인정해도 확률적인 문제가 제기된다. 이는 학생들이 가지고 있는 확률개념으로는 이해할 수 없는 것이다.

충분하지 못한 정보에 의하여 0.252435…를 표기하고 이 수가 순환하지 않는 무한소수라고 하는 것은 1.414213…은 순환하지 않는 무한소수이기 때문에 무리수라고 판정하는 것과 비슷한 방법이다. 충분한 정보 없이 표현된 '1.414213…' 과 '$\sqrt{2}$를 소수로 나타내면 1.414213…'이라는 표현은 매우 다르다. $\sqrt{2}$로부터 1.414213…의 모든 자리에 대한 정보를 알 수 있지만 1.414213…의 내부의 정보로부터 이 수의 모든 자리에 대한 정보를 알 수 없다.

한글 맞춤법(1988)은 문장부호의 사용법에서 줄임표를 ……으로 표시하고 있으며, 할 말을 줄였을 때나 말이 없음을 나타낼 때 줄임표를 사용하도록 하고 있다. 한글 맞춤법에서 제시한 줄임표는 ……이지만 수학에서 사용하는 줄임표는 …으로 사용방법은 다르다. 수학 8-가에서 순환소수의 표현에서 줄임표(…)를 사용하여 0.242424…와 같이 나타내고 있다. 여기서 줄임표(…)의 의미는 24가 순환하는 마디이고 이것이 무한이 반복된다는 의미를 나타내고 있다. 그러나 1.4532954…와 같은 무한소수에서 줄임표(…)의 의미는 분명하지 않다. 많은 학생들이 1.4532954…와 같은 수를 무리수라고 응답하지만 이 수의 일의적 표현보다는 순환하지 않는 무한소수라는 것에 관심을 더 갖기 때문이다. 0.242424…에서는 소숫점 아래 모든 자리에 대한 정보가 주어진 규칙성에 내포된 반면에 1.4532954…에서는 이 수에 대한 충분한 정보를 발견할 수 없기 때문에 이 수의 유일성을 보장할 수 없다.

중학교 7-가 수학 교과서에서의 집합단원에서는 줄임표(…)에 대한 정의를 제시하고 있다. 예를 들면, '집합의 원소가 많을 경우, 이들 원소가 어떤 규칙에 따라 차례로 나열될 수 있으면 …을 사용하여 그 원소 중에서 일부를 생략하여 나타낼 수 있다.' 라고 하고 있다(박윤범 외 3인, 2001). 즉, $A=\{2,4,6,\cdots\}$이라 하면 집합 A는 짝수를 원소로 하는 집합이 되고 줄임표(…)는 2, 4, 6에서 나타나고 있는 규칙성이 계속하여 반복적으로 나타난다는 의미를 말하는 것이다. 따라서 집합의 원소나열법에서 줄임표(…)는 직관에 의하여 규칙성을 발견할 수 있고 그 규칙성으로 전체를 파악하는 의미로 사용하도록 정의하였기 때문에 순환소수의 표현에서 줄임표(…)에 대한 정의도 같은 의미로 받아들여 사용하는 것이 타당하다.

1.232323…인 경우는 줄임표 앞자리의 규칙성으로부터 주어진 무한소수의 유일성이 결정된다. 신항균(2004), 이영하 외 3인(2004), 황석근 외 1인(2004)이 도입하고 있는 0.1010010001…과 같은 무한소수는 순환마디는 발견할 수 없지만 주어진 규칙성으로부터 각 자리의 수에 대한 일의성이 결정된다. 규칙성은 발견할 수 없지만 $\sqrt{2}$, π와 같은 수를 소수로 나타내면 모든 자리의 수에 대한 정보를 $\sqrt{2}$, π로부터 알 수 있기 때문에 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$, $\pi=3.141592\cdots$라고 줄임표를 사용하여 무한소수를 나타내는 것도 문제가

없다.

집합은 원소나열법이나 조건제시법으로 나타내어진다. 규칙이 있거나 유한집합인 경우에는 집합을 원소나열법으로 표현할 수 있지만 규칙이 없는 무한집합을 원소나열법으로 표현할 수는 없다. 이와 같은 집합의 표현에 대한 방법을 자연스럽게 무한소수의 표현에 적용하는 것은 합리적일 것이다.

따라서 무한소수에서의 줄임표에 대한 정의를 『무한소수의 각 자리의 수를 규칙성이나 주어진 정보를 통하여 알 수 있는 경우에는 자리의 숫자 일부를 생략하여 …으로 나타낼 수 있다.』로 명확하게 할 필요가 있다.

2. 교과서에서 무리수의 도입

제 7차 수학과교육과정의 <7-가 단계>에서는 유리수를 '분자가 정수이고 분모가 0이 아닌 분수의 꼴로 나타낼 수 있는 수'로 정의하고 <8-가 단계>에서는 유리수가 유한소수 또는 순환소수로 나타내어지고, 유한소수 또는 순환소수가 유리수임을 귀납적 방법으로 설명한다. <9-가 단계>에서는 무리수를 '순환하지 않는 무한소수'로 도입하기 때문에 <8-가 단계>의 정리를 이용하여 무리수는 유리수가 아닌 수임을 설명한다.

강행고 외 9인(2005)은 '$\sqrt{2}$의 근사값을 보다 자세히 구하면 $\sqrt{2}$=1.41421356237309…로 순환하지 않는 무한소수가 된다.'로 순환하지 않는 무한소수의 존재성을 설명하고 있다. 이러한 설명은 $\sqrt{2}$는 계산을 통하여 유리수인지 무리수인지를 판정할 수 있다는 의미로 해석할 수 있고 유한자리에서의 비순환성으로 전체에 대한 비순환성을 유추할 수 있다는 의미로 받아들일 수 있다.

순환하지 않는 무한소수의 존재성을 설명하기 위하여 최용준(2005)은 '$\sqrt{2}$를 소수로 나타내면 $\sqrt{2}$=1.414213562373095…와 같은 무한소수로 나타내어지고 이 무한소수는 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다.'로 무리수를 도입하고 있으며 강옥기 외 2인(2001), 배종수 외 7인(2004), 양승갑 외 6인(2005), 전평국 외 4인(2004)도 비슷한 방법으로 무리수를 도입하고 있다.

0.1010010001…과 같은 무한소수는 규칙성으로부터 순환하지 않는 무한소수라는 것을 알 수 있지만 학교수학에서 주로 다루는 $\sqrt{2}$와 같은 제곱근은 계산된 무한소수의 규칙성을 관찰하여 주어진 수가 순환하지 않는 무한소수라고 판정할 수는 없다.

금종해 외 3인(2004)은 "이러한 방법으로 $\sqrt{2}$의 값을 구해나가면 $\sqrt{2}$=1.41421356237309 5…와 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다."라고 설명하고 이어서 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 보인다음 이와 같은 수를 무리수라고 정의하고 있다.

김홍기(2004)는 "$\sqrt{2}$=1.414213562373095…와 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다."를 언급한 후 바로 이와 같은 수를 무리수라고 정의하는 것이 교육과정에서 요구하는 무리수의 도입방법이라고 하였다. 그러나 '……와 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타내어진다.'라는 의미는 두 가지로 해석할 수 있다. 하나는 '$\sqrt{2}$를 소수로 나타내면 1.414213562373095…와 같고 이 수를 자세히 관찰해 보면 순환하지 않는 무한소수임을 알 수 있다.'로 해석할 수 있고 다른 하나는 '$\sqrt{2}$=1.414213562373095…와 같이 순환하지 않는

무한소수임이 알려져 있다.'로 해석할 수 있다. 첫 번째의 해석으로 순환하지 않는 무한소수를 가르치는 것은 비순환유추를 강요하게 되는 것이고 두 번째의 해석은 증명된 결과만을 전달하는 것이다. 주어진 수가 순환하지 않는 무한소수임을 좀 더 설명하려면 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하는 절차가 필요하게 된다. 따라서 순환하지 않는 무한소수를 소재로 무리수를 도입하는 것은 위와 같은 많은 문제점을 포함하고 있다.

설문조사 결과 $\sqrt{2}$가 무리수인지를 증명할 수 있는 고등학생들은 1학년은 37명 중 1명으로 2.7%, 2학년은 33명 중 4명으로 12.1%, 3학년은 28명 중 5명으로 17.6%로 학년이 올라갈수록 비율은 높아지고 있지만 대체적으로 매우 낮은 수준으로 나타났다. 그러나 무한소수에 대한 이해의 오류는 더욱 심각한 정도이라 할 수 있다. 따라서 무리수를 순환하지 않는 무한소수를 소재로 도입하는 것 보다는 유리수가 아닌 수로 정의하고 순환하지 않는 무한소수라는 개념은 무리수의 특성으로 이해하도록 해야 한다. 또한 중학교 1학년에서 유리수를 '분자가 정수이고 분모가 0이 아닌 분수의 꼴로 나타낼 수 있는 수'로 정의하였기 때문에 무리수는 유리수가 아닌 수가 존재함을 인식하는 것으로부터 무리수를 도입하는 것이 바람직하다.

Ⅳ. 결론 및 제언

소수는 초등학교 3학년에서 귀납적으로 도입되고 있지만 중학교에서는 소수에 대한 정확한 정의가 없기 때문에 교과서별로 소수에 대한 암묵적인 정의가 다르게 나타나고 있다. 따라서 '소수는 소수점을 사용하여 나타낸 십진법의 수'로 명확하게 할 필요성이 있으며, '소수점 아래 숫자가 무한히 나타나는 소수'로 무한소수를 정의하는 것이 기수법에 충실한 방법이다. 즉, 0.000…를 무한소수라 해야 한다.

무한소수에서 줄임표를 사용할 때 각 교과서에서는 줄임표의 의미를 명확하게 정의하고 학생들을 지도하는 교사도 줄임표의 정의를 강조해야한다. 기호에 대한 해석이 교과서와 교사에 따라 다르다면 수학 내용에 대한 의사소통이 어렵게 되고 왜곡될 수밖에 없다. 기호의 바른 사용과 개념에 대한 바른 정의는 수학의 생명력이다.

분수를 소수로 나타내는 계산과정은 실제적 무한이 아닌 잠재적 무한의 개념이라 볼 수 있지만 순환소수를 분수로 나타내는 것은 실제적 무한 개념을 다루는 것이기 때문에 중학교 학생들이 이해하는데 어려움이 있다. 중학교 3학년에서는 제곱근을 도입하고 이어서 무리수를 다루고 있다. 그러나 $\sqrt{2}$를 계산을 통하여 순환하지 않는 무한소수가 됨을 알 수 있다고 하는 것은 무리수에 대한 오개념인 순환-비순환유추형을 양산할 가능성이 많다. 따라서 제곱근 중 정수의 비로 나타내어지는 수와 그렇지 않은 수가 존재함을 설명하고 유한소수 및 순환소수와 유리수의 관계를 통하여 무리수를 소수로 나타내면 순환하지 않는 무한소수가 된다는 것을 이해하도록 하는 것이 바람직할 것이다.

0.101001…와 같이 규칙성이 있는 수는 규칙성을 통하여 이 수가 무리수가 됨을 알 수 있지만 $\sqrt{2}$는 귀류법을 이용하여 증명할 수 있다. 그러나 중학교 3학년 학생들은 논리적 사고능력이 부족하기 때문에 학생들이 이를 이해하는데 큰 어려움이 있을 수밖에 없다. 따라서 직관적으로 이해할 수 있는 효과적인 방안이 연구되어야 한다.

참고문헌

강옥기 외 2인 (2001). 중학교 수학 9-가, (주)두산.
강행고 외 9인 (2005). 중학교 수학 9-가, (주)중앙교육진흥연구소.
고성은 외 5인 (2005). 중학교 수학 9-가, (주)블랙박스.
금종해 외 3인 (2004). 중학교 수학 9-가, 고려출판.
김흥기 (2004). 중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 14(1), 1-17.
박규홍 외 7인 (2005). 중학교 수학 9-가, 두레교육(주).
박윤범 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가, 대한교과서(주).
배종수 외 7인 (2004). 중학교 수학 9-가, 한성교육연구소.
변희원, 박선용 (2002). 무리수의 개념적 측면을 강조한 교육방안, 대한수학교육학회지<학교수학> 4(4). 643-655.
신항균 (2004). 중학교 수학 9-가, 형설출판사.
양승갑 외 6인 (2005). 중학교 수학 9-가, (주)금성출판사.
우정호 (2000). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부.
우정호 (2004). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.
이영하 외 3인 (2004). 중학교 수학 9-가, (주)교문사.
전평국 외 4인 (2004). 중학교 수학 9-가, 교학연구사.
조태근 외 4인 (2003). 중학교 수학 8-가, (주)금성출판사.
조태근 외 4인 (2004). 중학교 수학 9-가, (주)금성출판사.
최용준 (2005). 중학교 수학 9-가, (주)천재교육.
한글 맞춤법 (1988). 문교부 고시 제 88-1호.
황석근 외 1인 (2003). 중학교 수학 8-가, 한서출판사.
황석근 외 1인 (2004). 중학교 수학 9-가, 한서출판사.
Coxford, A. F. et al. (1987), HBJ ALGEBRA I, Harcourt Brace Jovanovich. Publischers.
David Tall(2003). 고등수학적 사고(류희찬 외 2인 역), 경문사.

A Study on understanding of infinite decimal

Park, Dal-Won[2)]

Abstract

According to 7-th curriculum, irrational number should be introduced using non-repeating infinite decimals. A rational number is defined by a number determined by the ratio of some integer p to some non-zero integer q in 7-th grade.

In 8-th grade, A number is rational number if and only if it can be expressed as finite decimal or repeating decimal. A irrational number is defined by non-repeating infinite decimal in 9-th grade. There are misconceptions about a non-repeating infinite decimal. Although 1.4532954··· is neither a rational number nor a irrational number, many high school students determine 1.4532954···is a irrational number and 0.101001001··· is a rational number. The cause of misconceptions is the definition of a irrational number defined by non-repeating infinite decimals.

It is a cause of misconception about a irrational number that a irrational number is defined by a non-repeating infinite decimals and the method of using symbol dots in infinite decimal is not defined in text books.

Key Words : Rational number, Repeating decimal, Irrational number, Non-repeating infinite decimal.

2) Kongju National University (dwpark@kongju.ac.kr)