한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 2, 221-235, June 2007

개방형 문제를 어떻게 만들 것인가?: 두 개의 개방형 문제 제작 사례를 중심으로

도종훈[1)]

개방형 문제는 문제의 출발 상황이나 목표 상황, 해결 방법 등이 열려 있어 학생들에게 각자의 수준에서 다양하고 새로운 산출물을 생산하는 경험을 제공할 수 있다. 교사는 여러 가지 유형의 개방형 문제를 답을 구하거나 증명하는 문제의 형태로 제작하여 활용할 필요가 있다. 개방형 문제 제작과 활용을 위해 먼저 고려해야 할 점은 어떤 소재를 가지고 어떤 절차와 방법으로 개방형 문제를 만들 것인가 하는 점이다. 학생들에게 지나치게 생소하거나 과도한 배경지식을 필요로 하는 내용보다는 학생들에게 친숙하여 접근이 용이한 내용이나 소재 및 대다수의 교사들이 쉽게 활용할 수 있는 제작 방법과 절차에 대한 논의가 구체적인 예와 함께 이루어질 필요가 있다. 이에 본 논문에서는 교과서 등에 제시되어 있어 이미 알려진 문제를 재구성하여 개방형 문제를 제작하는 방법과 절차를 예시·설명하고, 예시 개방형 문제에 대한 학생들의 반응을 분석하며, 이를 토대로 개방형 문제가 지니는 수학교육적 의의에 대하여 논의한다.

주요용어 : 개방형 문제, 폐쇄형 문제, 만약 ~(이 아니)라면, 수학적 창의성, 수학영재

Ⅰ. 서론

학교수학에서 다루는 문제는 대부분 “무엇 무엇을 구하여라” 또는 “무엇 무엇을 증명하여라”와 같은 형태의 폐쇄형 문제이다. 이러한 문제에서는 구해야할 답의 존재성이나 명제의 진위 여부가 이미 결정되어 있고, 문제 해결에 필요한 자료나 조건 역시 군더더기 없는 형태로 구조화되어 있으며, 학생들에게는 오로지 답을 구하거나 증명하는 과정만을 요구하기 때문에 이러한 문제를 통해 학생들이 창의적인 사고를 발휘할 여지는 매우 적다고 할 수 있다(Pehkonen, 1997).

폐쇄형 문제와는 달리 개방형 문제는 학생들에게 각자의 수준에서 다양하고 새로운 산출물을 생산하는 보다 풍부한 경험을 제공할 수 있다(Artzt, 1996; Cai, Lane & Jakabcsin, 1996; Furinghetti, 2001; Pehkonen, 1991; Silver, 1994). 즉, 개방형 문제는 문제의 출발 상황이나 목표 상황, 해결 방법 등이 열려 있기 때문에 개방형 문제의 풀이는 곧 추측의 생산을 의미하고 학생들이 생산한 추측은 그 상태로서는 불확실하므로 이러한 불확실성은 학생들에게 정당화의 필요성을 유발하여 자연스럽게 자신만의 다양하고 새로운 추측을 생산한

1) 한국교육과정평가원 (jhoondo@kice.re.kr)

후 자신의 추측을 정당화하는 수학적 탐구 과정을 경험하도록 유도할 수 있다. 그러므로 개방형 문제는 학생들의 다양하고 새로운 추측 생성 및 정당화 능력을 평가하거나 신장시키기 위한 탐구 문제로서 활용가치가 높다고 하겠다.

실제로 일본에서는 일찍이 개방형 교수법이라고 하는 개방형 문제를 이용한 교수법이 제안되었고(Becker & Shimada, 2000), 그 밖에 영국을 포함한 세계 여러 나라에서 개방형 문제를 교실 수업에 활용하려는 다양한 시도와 연구들이 있어 왔다(Pehkonen, 1997). 국내에서도 권오남, 조영미, 박정숙, 박지현, 김영실(2003)이 개방형 문제를 활용한 20주 분량의 수학적 창의성 신장 프로그램을 개발하여 학교 현장에 실험 적용한 바 있다. 또, 여러 학자들(권오남, 방승진, 송상헌, 1999; 김홍원, 김명숙, 송상헌, 1996; 김홍원, 김명숙, 방승진, 황동주, 1997 등)에 의해 수학적 창의성 평가의 한 방안으로 제안되고 있는 다답형 문항은 학생들에게 가능한 한 다양하고 새로운 답을 제시할 것을 요구하는 일종의 확산적 산출물 검사로서 보다 넓은 의미에서 개방형 문제의 한 유형이라고 할 수 있다.

교사는 여러 가지 유형의 개방형 문제를 답을 구하거나 증명하는 문제의 형태로 제작하여 활용할 필요가 있다. 개방형 문제의 제작과 활용을 위해 먼저 고려해야 할 점이면서 어려운 점은 어떤 소재를 가지고 어떤 절차와 방법으로 개방형 문제를 만들 것인가 하는 점이다. 학생들의 관심과 흥미를 유발하기 위해 새롭고 참신한 소재를 발굴하여 활용할 수도 있을 것이다. 그러나 지나치게 생소하거나 과도한 배경지식을 필요로 하는 내용이나 소재는 오히려 교사와 학생 모두에게 부담이 될 수 있다. 가능하다면 교사 자신이나 학생들에게 친숙하여 접근이 용이한 내용이나 소재 및 대다수의 교사들이 쉽게 활용할 수 있는 제작 방법과 절차에 대한 논의가 구체적인 예와 함께 이루어질 필요가 있을 것으로 보인다.

이러한 논의의 일환으로 본 논문에서는 교과서 등에 제시되어 있어 이미 알려진 문제를 소재로 활용하여 개방형 문제를 제작하는 방법과 절차를 예시·설명하고, 예시 개방형 문제에 대한 학생들의 반응 분석을 통해 개방형 문제가 지니는 수학교육적 의의에 대하여 논의하고자 한다. 구체적으로는 이미 존재하고 있는 폐쇄형 문제를 활용하여 두 가지 유형의 개방형 문제를 예시 제작하고, 제작된 개방형 문제 각각에 대한 6단계(초6)와 7단계(중1)의 종료 시점에 있는 학생들의 반응을 분석하며, 이를 토대로 개방형 문제가 지니는 의의를 수학적 창의성 평가 및 수학영재학생 선발 등과 관련하여 살펴보고자 한다.

II. 개방형 문제의 개념과 유형 및 제작 방법과 절차

문제에는 출발 상황(주어진 자료, 조건)과 목표 상황(구하고자 하는 것)이 존재한다. 출발 상황과 목표 상황이 모두 닫혀 있는 문제를 폐쇄형 문제라고 할 때, 개방형 문제는 이와 반대되는 개념으로 문제의 출발 상황이나 목표 상황 등이 열려 있는 문제라고 할 수 있다(Pehkonen, 1991, 1997). 불필요한 조건이나 자료가 전혀 없이 하나의 답이 반드시 존재하는 교과서에 제시된 전형적인 문제들이 폐쇄형 문제에 해당한다고 볼 수 있다. 개방형 문제는 간단하게는 구하고자 하는 답의 존재성이나 주어진 명제의 진위 여부를 스스로 추측할 수 있는 형태의 문제 즉, “무엇 무엇이 존재하는가” 혹은 “무엇 무엇이 참인지 거짓인지 판단하고 증명하여라”와 같은 문제로부터 자기 스스로의 힘으로 새로운 문제나 명제를 제기한 후 해결하는 형태의 문제까지를 포괄한다고 볼 수 있을 것이다.

Pehkonen(1997)은 세계 여러 나라에서 개발되고 논의되어 온 여러 가지 유형의 개방형

<표 1> 출발 상황과 목표 상황에 따른 개방형 문제의 분류 (Pehkonen, 1997)

목표상황 / 출발상황	닫혀 있음	열려 있음
닫혀 있음	폐쇄형 문제	목표 상황이 열린 문제, 실생활 상황, 탐구과제, 문제 장, 문제 변형
열려 있음	실생활 상황, 문제 변형	실생활 상황, 문제 변형, 프로젝트, 문제 제기

문제들을 수집하여 종합한 후, 출발 상황과 목표 상황의 닫힘이나 열림 여부에 따라 개방형 문제를 <표 1>과 같이 분류하여 제시하였다. 이에 따르면 출발 상황과 목표 상황이 모두 열린 문제의 유형으로 실생활 상황, 만약 ~ 전략을 이용한 문제의 변형이나 제기, 프로젝트 등을 들 수 있는데, 이들 각각은 출발 상황과 목표 상황 둘 중 하나만 열린 형태의 문제로도 분류된다.

수학에서 다루는 문제는 크게 수학 내적인 상황에서의 문제와 타학문(교과)이나 실생활 등 수학 외적인 상황에서의 문제로 구분될 수 있다. 그러므로 개방형 문제 역시 크게 이들 두 유형으로 구분될 수 있을 것이며, 이들 각각은 또 출발 상황이 열린 문제와 목표 상황이 열린 문제로 구분될 수 있을 것이다. 더불어 수학에서는 동일한 문제에 대한 보다 간단하고 우아한 해법의 탐구가 중요하다는 점에서 해결 방법과 과정이 열린 문제로도 구분될 수 있으리라 판단된다. 결국 개방형 문제는 [그림 1]과 같이 크게 수학 내적 상황과 수학 외적 상황에서의 개방형 문제로 분류될 수 있고, 이들 각각은 또 출발 상황, 목표 상황, 해결 방법과 과정이 열린 문제로 각각 분류될 수 있을 것이다.

<개방형 문제>

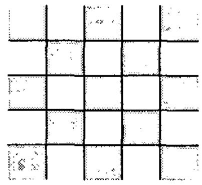
수학 내적 상황	$\xrightarrow{\text{응용(해석)}}$ / $\xleftarrow[\text{모델링}]{}$	수학 외적 상황
· 출발 상황이 열린 문제		· 출발 상황이 열린 문제
· 목표 상황이 열린 문제		· 목표 상황이 열린 문제
· 해결 방법과 과정이 열린 문제		· 해결 방법과 과정이 열린 문제

[그림 1] 개방형 문제의 유형

[그림 1]에서 출발 상황이 열린 문제는 구하고자 하는 것 즉, 목표 상황은 제시되어 있지만 자료(가정)와 이들 사이의 조건들이 부족하거나 불필요하게 많아서 경우에 따라 여러 가지의 답이 존재할 수 있는 문제를 의미한다. 목표 상황이 열린 문제는 구하고자 하는 것이 명료하지 않아서 구하고자 하는 것을 문제 풀이자가 스스로 추측한 후 그에 대한 답을 구해야 하는 문제를 의미한다. 해결 방법과 과정이 열린 문제는 목표 상황이 존재하지만 목표에 도달하기 위한 해법과 과정을 다양하게 요구하는 문제를 의미한다. 이러한 관점에서 보면 <표 1>에서 출발 상황과 목표 상황이 모두 열린 형태의 문제 유형으로 제시된 프로젝트는 수학 내적 상황에서의 프로젝트일 수도 있고 수학 외적 상황에서의 프로젝트일 수도 있으며, 또한 해결 방법과 과정이 열린 형태의 프로젝트일 수도 있다. 개방형 문제를 제작하고자 하는 교사는 연구자가 [그림 1]을 통해 제시한 개념 구분을 토대로 자신의 필요에 맞는 문제를 탐색하거나 제작할 수 있을 것이다.

그러나 세 유형의 개방형 문제를 개념적으로 명료하게 구분하기는 어려우며, 한 문항이

하진이네 반 교실 바닥에는 오른쪽 그림처럼 똑같은 크기와 모양의 정사각형들이 빈 틈 없이 그려져 있다. 이 그림은 지난해에 이 교실을 사용한 학생들이 그려놓은 것이다. 새 학기를 맞이하여 하진이네 반에서는 교실 바닥에 다른 모양의 정다각형들을 빈틈없이 그려보기로 하였다. 한 가지 종류의 정다각형들을 빈틈없이 그려도 되고, 두 가지 종류 이상의 정다각형들을 그려도 된다. 여러 가지 의견을 제출해 보자.



[그림 2] 개방형 문제의 예

두 가지 이상 유형의 개방형 문제 성격을 띠기도 한다. 예를 들어 [그림 2]에 예시된 문제는 실생활 상황을 소재로 하고 있고, 주어진 자료, 조건, 구하고자 하는 것이 하나의 답이 나오도록 구조화되어 있지 않고 자료와 조건을 어떻게 조직하고 사용하느냐에 따라 여러 가지의 답이 존재할 수 있다는 면에서 출발 상황, 목표 상황, 해결 방법과 과정이 모두 열린 개방형 문제로 볼 수 있다.[2)]

서론에서도 언급하였듯이 개방형 문제의 제작과 활용을 위해서는 먼저 어떤 소재와 방법을 사용하여 개방형 문제를 만들 것인가 하는 점을 고려해야 하고, 가급적이면 교사나 학생들에게 친숙한 내용이나 소재 및 대다수의 교사들이 실제로 활용할 수 있는 제작 방법과 절차가 구체적인 예와 함께 논의될 필요가 있다. 이러한 면에서 학생들이 가장 많이 접하는 교과서 내용이나 문제를 적극 활용할 필요가 있다고 판단된다. 교과서는 수학의 역사를 통해 누적된 수많은 업적들 중에서 해당 연령의 학생들에게 꼭 필요하다고 판단되는 내용들이 엄선되어 축약된 형태로 구성되어 있다. 그러므로 교사는 교과서 밖에서 소재를 구하기 이전에 먼저 교과서 등에 제시된 내용이나 문제들을 면밀히 재탐구하여 보다 다양하고 새로운 개방형 문제를 제작하고, 이를 학생들에게 제시할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있다.

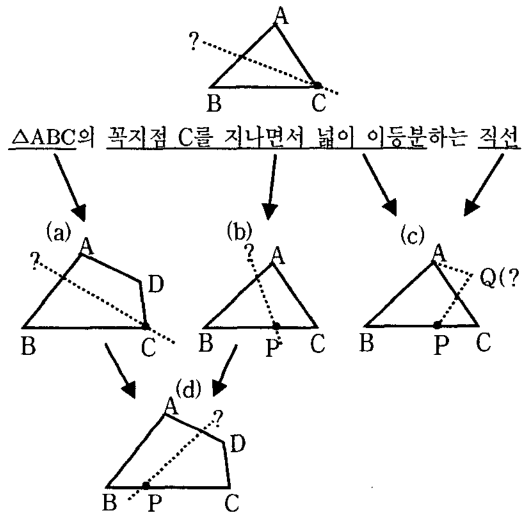
실제로 교과서에 제시되어 있거나 이미 알려져 있는 폐쇄형 문제들을 재구성하여 새로운 개방형 문제를 제작할 수 있다. 이를 위해서는 먼저 주어진 문제를 분석하여 그 속에 내재된 수학적 아이디어가 무엇인지 파악하고 문제를 보다 다양하고 새로운 관점에서 재해석할 수 있어야 한다. 문제에는 구하고자(증명하고자) 하는 것, 자료(가정), 이들 사이의 조건들이 제시되어 있다. 문제에 주어진 자료, 조건, 구하고자 하는 것 등을 분석한 후 이들 각각에 대하여 "만약 ~라면" 혹은 "만약 ~이 아니라면" 등의 질문을 통해 문제 상황을 새롭고 다양한 관점에서 바라보고 재해석함으로써, 주어진 문제를 다양한 형태의 개방형 문제로 변형하여 학생들에게 제시하거나 학생들로 하여금 직접 문제를 제기하고 해결하도록 할 수 있다 (Brown & Walter, 1993; Lavy & Bershadsky, 2003). Brown & Walter(1993)는 주어진 문제로부터 "만약 ~이 아니라면" 전략을 이용하여 새로운 문제를 제기하는 과정을 문제의 구성 요소 및 속성 분석하여 나열하기, "만약 ~이 아니라면"이라는 질문을 통해 나열된 구성 요소 및 속성 중 일부 변형하기, 변형된 구성 요소 및 속성에 관련된 문제 제기하기, 제기된 문제 분석하기의 4개 단계로 제시하였다.

주어진 문제가 답을 구하는 문제인 경우 "만약 ~ " 질문을 통해 구하고자 하는 것을 변형하여 여러 개의 답이 존재하거나 답이 존재하지 않는 문제로 변형할 수 있고, 주어진 자료를 변형하여 자료가 부족한 문제, 자료가 지나치게 많은 문제 등으로 변형할 수 있으며, 자료와 구하고자 하는 것 사이의 조건을 변형하여 새로운 개방형 문제를 만들 수 있다. 주어

2) 이 문제는 2004학년도 S대학교 과학영재교육원 수학분과 홈페이지 주간문제 게시판에 제시되었던 문제이다.

진 문제가 증명하는 문제인 경우 역시 가정이나 결론을 변형한 새로운 명제나 주어진 명제의 역, 이 명제에 대한 증명 혹은 반증 문제 등을 생각할 수 있다.

예를 들어, 이미 해결되어 답이 알려진 문제 "삼각형 ABC의 한 꼭지점 C를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 어떤 직선인가?"의 주어진 자료와 조건, 구하고자 하는 것을 변형하여 [그림 3]에 제시된 것처럼 다양하고 새로운 개방형 문제들을 제작할 수 있다(도종훈, 2007).[3] 이 문제들은 모두 구하고자 하는 직선이나 사각형의 존재 여부를 학생 스스로 판단해야 하고, 주어진 사각형의 종류나 점 P의 위치에 따라 여러 가지의 답이 존재할 수 있다는 면에서 시작 상황과 목표 상황이 열린 개방형 문제의 유형에 해당한다고 볼 수 있다.

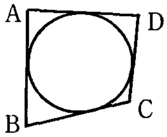


[그림 3] 개방형 문제 만들기의 예 (1)

다른 예로, 중학교 3학년 교과서에 통상 제시되는 명제 "사각형 ABCD의 내접원이 존재하면 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$이다."로부터 이 명제의 역에 대한 증명 혹은 반증 문제 즉, "$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$인 사각형 ABCD는 내접원을 갖는가? 갖는다면 증명하고, 갖지 않는다면 반례를 제시하여라."를 생각할 수 있다(그림 4). 어떤 명제를 증명하고 난 후 그 명제의 역의 진위 여부를 탐색하는 것은 수학에서는 매우 자연스러운 과정이며 가장 간단한

3) 주어진 자료에 대하여 "만약 삼각형 ABC가 아니고 사각형 ABCD라면"이라는 질문을 통해 "사각형 ABCD의 한 꼭지점 C를 지나면서 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 존재하는가? 존재한다면 어떤 직선인지 말하고, 존재하지 않는다면 이유를 설명하여라."를 제작할 수 있고(그림 3의 (a)), 주어진 조건에 대하여 "만약 삼각형 ABC의 한 꼭지점 C가 아니고 변 BC위의 임의의 점 P라면"이라는 질문을 통해 새로운 개방형 문제 "변 BC위의 임의의 점 P를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 존재하는가? 존재한다면 어떤 직선인지 말하고, 존재하지 않는다면 이유를 설명하여라."를 제작할 수 있다(그림 3의 (b)). 한편, 주어진 조건과 구하고자 하는 것을 변형하여 새로운 개방형 문제 "삼각형 ABC의 한 변 BC 위의 임의의 점 P를 지나면서 삼각형 ABC와 넓이가 같은 사각형 ABPQ가 존재하는가? 존재한다면 꼭지점 Q가 어떤 위치에 있어야 하는지 말하고, 존재하지 않는다면 이유를 설명하여라."를 제작할 수 있고(그림 3의 (c)), 주어진 자료와 조건을 변형하여 사각형 ABCD의 한 변 BC 위의 임의의 점 P를 지나면서 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선에 관한 문제를 제작할 수 있다(그림 3의 (d)).

형태의 문제제기라고 할 수 있다. 이 때 제기되는 문제(명제)는 그것의 진위가 아직 알려져 있지 않으므로 문제를 제기한 사람이 스스로 그 여부를 판단해야 하고 그 판단에 따라 증명하거나 반증하여야 한다는 면에서 목표 상황이 열린 문제에 해당한다고 볼 수 있다.[4)]



$$\overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$$

[그림 4] 개방형 문제 만들기의 예 (2)

이처럼 교과서에 제시되어 있거나 이미 알려져 있는 폐쇄형 문제나 정리들을 재구성하여 제작한 개방형 문제들은 교사 자신이나 학생들에게 친숙한 내용을 소재로 하고 있어서 제작이 비교적 용이하고, 문제의 이해를 위한 추가적인 배경지식을 필요로 하지 않다는 면에서 만들어진 문제에 대한 학생들의 접근 또한 용이하다는 장점을 지니고 있다. 그리고 답의 존재성이나 명제의 진위 여부 및 제기된 문제의 자료나 조건이 답을 구하는 데에 충분한지 여부 등을 문제를 제기한 사람이 스스로 판단해야 하므로 학생들에게 자신만의 다양하고 새로운 답을 추측하고 정당화하는 수학적 탐구 과정을 경험하도록 유도할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 예시 개방형 문제의 제작과 반응 분석

이 장에서는 교과서에 제시되어 있거나 이미 알려져 있는 내용이나 문제로부터의 개방형 문제 특히, 해결방법과 과정이 열린 문제와 목표 상황이 열린 문제 제작의 예를 제시하고, 각 예시 문제에 대한 학생들의 반응을 분석하여 살펴보고자 한다. 이들 두 문제는 기존의 통상적인 폐쇄형 문제에서처럼 출발 상황(주어진 자료와 조건)이 하나의 답을 내도록 명료화되어 있지 않다는 점에서 출발 상황이 열린 문제로 간주될 수도 있다. 그러나 두 문항의 초점이 각각 다양하고 독창적인 해결 방법과 다양하고 독창적인 문제(명제)의 제기에 있으므로, 이들 문항의 명칭을 각각 해결방법과 과정이 열린 문제와 목표 상황이 열린 문제로 하였다.

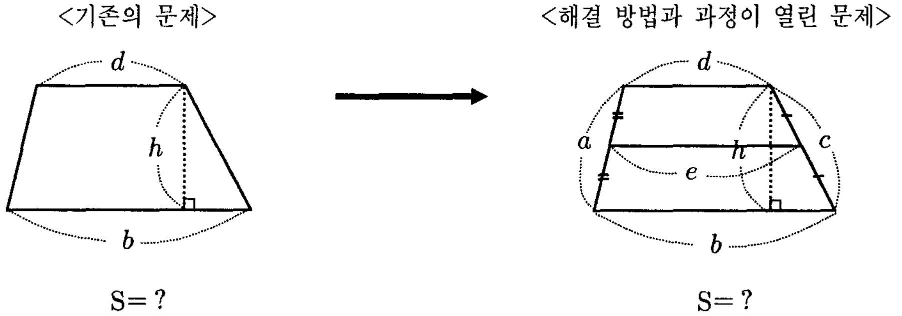
1. 해결 방법과 과정이 열린 문제

(1) 문제의 제작

[그림 5]에 예시된 해결 방법과 과정이 열린 문제는 밑변의 길이(b), 윗변의 길이(d), 높이(h)가 주어진 사다리꼴의 넓이를 구하는 통상적인 폐쇄형 문제에서 구하고자 하는 것을 그대로 둔 채 주어진 자료에 대하여 "만약 b, d, h 이외의 다른 자료들이 더 주어진다면"이라는 질문을 통해 자료 3가지(a,c,e)를 더 추가하여 제작한 문제이다. 이 문제는 6개의 선분의 길이(a, b, c, d, e, h)가 주어진 사다리꼴의 넓이(S)를 구하는 다양한 방법을 주어진 시간 내에 제시할 것을 요구하는 문항으로서 구하고자 하는 것이 주어진 사다리꼴의 넓이로서 명확하

4) [그림 3]과 [그림 4]에 예시된 문항들은 답을 구하거나 증명(반증)하는 방법이 다양할 수 있다는 면에서 해결 방법과 과정이 열린 문제의 유형에 해당한다고도 볼 수 있지만, 이에 대한 판단은 문제에서 "다양한 방법과 과정"을 명시적으로 요구하느냐의 여부에 달려 있다고 하겠다.

고, 자료는 원하는 답을 산출하는데 충분하다. 그러나 주어진 자료를 어떻게 이용하느냐에 따라 다양한 풀이 방법과 과정을 통해 여러 가지 답을 산출할 수 있고 이를 문제에서 명시적으로 요구하고 있으므로, 이 문제는 해결방법과 과정이 열린 문제의 유형에 해당한다고



[그림 5] 예시 개방형 문제 제작 : 해결 방법과 과정이 열린 문제

할 수 있다.

초등학교 수학에서 다각형의 넓이 측정은 직사각형에서부터 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 거쳐 사다리꼴의 넓이 공식으로 이어진다. 학생들은 5-나 단계에서 밑변의 길이(b), 윗변의 길이(d), 높이(h)가 주어진 사다리꼴의 넓이 측정 공식을 학습한다. 사다리꼴의 넓이 공식은 위에서 언급한 기본 다각형들의 넓이 공식 중 가장 복잡한 형태의 공식으로서, 그 속에는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식 등이 모두 포함되어 있다. 실제로 사다리꼴 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}(b+d)h$ 은 $d=0$ 일 경우 삼각형의 넓이 공식이 되고, $d=b$ 일 경우 평행사변형과 직사각형의 넓이 공식이 된다.

밑변, 윗변의 길이와 높이만 주어진 사다리꼴의 넓이를 구하는 통상적인 폐쇄형 문제는 공식의 기계적인 암기를 통해 해결이 가능하다. 이 경우 넓이 개념이나 사다리꼴 넓이 공식에 대한 학생들의 이해와 기계적인 암기 여부를 판단할 수 없으며, 자칫 잘못하면 기계적인 공식 암기를 조장할 우려가 있다. 반면 [그림 5]에 제작 예시된 문제에서는 문제해결에 필요한 자료들을 학생 스스로 선택하여 구성해야 하고 자료의 이용 방법에 따라 여러 가지 해법이 존재할 수 있다. 주어진 문제의 해결을 위해서는 학생의 다양한 사고가 요구되며, 따라서 사다리꼴의 넓이 개념을 명료하게 이해하지 않고 공식을 기계적으로 암기하거나 특정한 모양과 위치의 사다리꼴이나 삼각형, 높이 등에 사고가 고착된 학생의 응답은 극히 제한적이거나 틀릴 가능성이 있다. 주어진 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해서는 그간 학생이 배운 넓이에 대한 기본 개념과 아이디어들이 총동원되어야 한다.

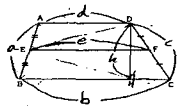
(2) 학생들의 반응 분석

2004학년도 서울 소재 S대학교 과학영재교육원 수학분과 2차 지필 시험에 응시한 서울 전 지역 소재 211개 초등학교 6학년 학생 426명의 응답 결과를 분석하였다.[5] 학생들이 제시

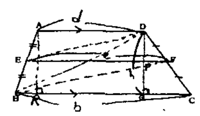
5) 각 학교 별로 2명 이하의 학생들과 2003년 서울 소재 각 교육청 및 대학 부설 과학영재교육원을 수료한 학생들 중 희망 학생들이 지필 시험에 응시하였다. 이 학생들은 각 소속 학교별 선발 시험 및 학교장, 학부모, 담당 교사 추천 등의 1차 전형을 거친 학생들로 각 학교에서 수학적 능력이 가장 우수하다고 판단된 학생들이다.

한 답안들은 문자를 이용한 대수적 표현으로 나타나고 동일한 대수적 표현이라 하더라고 기하학적 아이디어가 다양할 수 있으므로 연구자는 학생들의 반응 사례들을 대수적 표현과 기하학적 아이디어의 두 가지 관점에서 분석하였다.

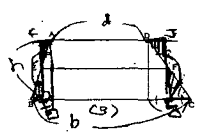
먼저 학생들의 응답은 대수적 표현에 사용된 자료(문자)의 종류와 개수에 따라 A_1, A_2, A_3, A_4의 4개 유형으로 분류되었다. A_1형은 b,d,h를 이용한 식$\left(\frac{(b+d)}{2}h\right)$, A_2형은 b,d,e,h를 이용한 식$\left(\frac{(b+d+2e)}{4}h\right)$, A_3형은 e,h를 이용한 식(eh), A_4형은 b,d,e,h와 a또는 c를 이용한 식을 의미한다. 한편, 학생들은 동일한 대수적 표현을 사용하였다고 하더라도 다양한 형태의 기하학적 아이디어들을 동원하여 답을 제시하였는데, 학생들의 응답은 주어진 도형에 대한 기하학적 분해-결합의 관점에서 G_1, G_2, G_3, G_4의 4개 유형으로 분류되었다. G_1형은 분해의 아이디어만 있는 경우, G_2형은 분해와 평행이동에 의한 결합의 아이디어가 있는 경우, G_3형은 분해와 회전이동에 의한 결합의 아이디어가 있는 경우, 그리고 G_4형은 주어진 그림을 포함하는 보조도형을 이용한 경우이다(부록 참고). 예를 들어 [그림 6]은 b,d,h를 이용한 식을 사용한 응답들(A_1) 중에서 (a)분해의 아이디어만 있는 응답, (b)분해와 평행이동에 의한 결합의 아이디어를 사용한 응답, (c)분해와 회전이동에 의한 결합의 아이디어를 사용한 응답, 그리고 (d)보조도형을 이용한 응답 사례를 각각 예시한 것이다.



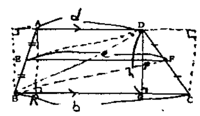
(a) 분해(G_1)



(b) 분해-평행이동(G_2)



(c) 분해-회전이동(G_3)



(d) 보조도형(G_4)

[그림 6] 대수적 표현 A_1에 대한 여러 가지 기하학적 아이디어에 의한 응답 사례

대수적 표현 및 기하학적 아이디어 유형 별로 학생들의 반응을 분석해 보면, 대수적 표현에서 약 10.4%인 44명, 기하학적 아이디어 면에서 약 18.3%인 78명의 학생들이 3개 이상의 유형별 답을 각각 제시하였고, 그 중 일부 학생들은 대수적 표현과 기하학적 아이디어 면에서 4개 유형의 답을 제시하기도 하였다(표 2). 대부분의 학생들은 대수적 표현에서나 기하학적 아이디어 면에서 틀에 박힌 통상적인 방법을 통해 문제를 해결하였지만, 이들 일부 학생들은 보다 다양하고 새로운 관점에서 문제 상황을 바라보고 그로부터 다양한 방법으로 문제를 해결하였음을 알 수 있다. 이러한 다양한 답이 나올 수 있었던 것은 문제에 제시된 자료들을 학생 스스로 상황에 맞게 적절히 선택하여 재조직해야 하고, 이 자료를 이용하여 다양

하고 새로운 해결 방법과 과정을 제시하도록 문제에서 명시적으로 요구하고 있기 때문이라고 할 수 있다.

<표 2> 해결 방법과 과정이 열린 문제에 대한 유형 별 반응 빈도

반응 수(개)	0	1	2	3	4
대수적 표현	29명	97명	256명	39명	5명
기하학적 아이디어	29명	145명	174명	72명	6명

앞서 언급한 바와 같이 사다리꼴의 넓이 공식은 기본 다각형들의 넓이 공식 중 가장 복잡한 형태의 난해한 공식으로 그 속에는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식 등이 모두 포함되어 있다. 그러므로 사다리꼴의 넓이 측정에 관한 본 연구에서의 예시 개방형 문제에 대한 반응 분석으로부터 다각형 넓이 개념에 대한 학생들의 이해 정도와 오류를 파악할 수 있다. 예를 들어 사다리꼴의 넓이 측정과 관련하여 $\frac{(c+a)\times e}{2}$ 와 같은 오답을 제시한 학생들이 있었는데, 이 학생들은 동시에 옳은 답 $S=\frac{1}{2}(b+d)h$ 도 함께 제시하였다. 또, 삼각형 DBC의 넓이 측정은 바르게 하였으나 삼각형 ABD의 넓이를 $\frac{1}{2}ad$ 라고 응답한 오류, 변 AB와 변 AD를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 ad 라고 응답한 오류 등이 나타났다. 이러한 오류 사례들은 밑변의 길이, 윗변의 길이, 높이 즉, b,h,h 의 값만 주어진 사다리꼴의 넓이를 구하는 통상적인 폐쇄형 문제를 통해서는 발견하기 어우며, 더구나 이러한 오류들은 해당 학교에서 수학적 능력이 가장 우수하다고 판단된 학생들에 의한 것으로 그들이 지닌 대표성을 감안할 때 교수-학습에 시사하는 바가 크다고 하겠다.[6]

2. 목표 상황이 열린 문제

(1) 문제의 제작

[그림 7]에 예시된 목표 상황이 열린 문제는 두 대각선에 의해 분할된 어떤 사각형의 삼각형 조각 4개의 넓이를 각각 a,b,c,d라고 할 때, 이와 관련된 세 개의 폐쇄형 문제(명제) 즉, 명제가 이미 주어져 있고 주어진 명제가 참이라는 것을 명시적으로 알려주고 있으며 학생들에게는 정당화의 과정(증명)만을 요구하는 문제들을 종합하여 주어진 사각형의 종류 및 a,b,c,d 와 관련한 다양한 명제를 추측하여 제시할 것을 요구하는 형태로 제작한 문제이다.[7]

이 문제를 해결하기 위해서는 여러 가지 사각형의 정의, 성질, 사각형들 사이의 관계 및 다각형 넓이에 대한 개념과 성질들이 다각적으로 이용되어야 하며, 논리 관계에 대한 직관 또한 필요하다. 이를 기반으로 학생 스스로 명제를 구성해야 하며 이 과정에서 명제의 진위 여부 역시 스스로 판단하여야 한다. [그림 7]에 제시된 기존의 폐쇄형 증명 문제에서는 이미 그 명제가 군더더기 없는 형태로 제시되고, "무엇 무엇을 증명하여라."와 같은 진술을 통해 명제의 진위 역시 이미 결정되어 있으며, 학생들에게는 오로지 정당화의 과정만을 요구한다. 그러나 [그림 7]에 제작 예시된 문제는 주어진 상황으로부터 학생 스스로 명제를 구성하고 진위를 추측하는 과정을 요구하며, 구하고자 하는 목표 상황이 구체적으로 주어져 있지 않

6) 오류 사례들에 대한 자세한 분석은 도종훈(2006) 참고.
7) 이들 3개의 폐쇄형 문제(명제)들은 Polya(1968)가 "소규모 이론 구축하기"의 예로 제시한 문항이다.

으므로 목표 상황이 열린 개방형 문제에 해당한다고 할 수 있다.

<기존의 문제>

주어진 사각형이

· 평행사변형일 필요충분조건은 $a=c$, $b=d$ 임을 증명하여라.

· 사다리꼴일 필요충분조건은 $a=c$ 또는 $b=d$ 임을 증명하여라.

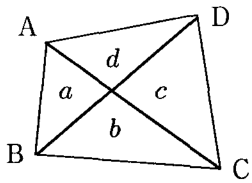
· 임의의 사각형에 대하여 $ac=bd$ 임을 증명하여라.

↓

<목표 상황이 열린 문제>

· (사각형의 종류)이면, (a,b,c,d 사이의 관계식)이다.

· (a,b,c,d 사이의 관계식)이면, (사각형의 종류)이다.



[그림 7] 예시 개방형 문제 제작 : 목표 상황이 열린 문제

(2) 학생들의 반응 분석

2004학년도 서울 소재 S대학교 과학영재교육원 수학분과 2차 지필 시험에 응시한 서울 전 지역 소재 159개 중학교 1학년 학생 305명 중 1개 이상의 유효한 답을 제시한 학생 202명의 응답 결과를 분석하였다. 학생들의 응답은 크게 사각형의 종류에 따른 넓이 관계(A형)와 넓이 관계에 따른 사각형의 종류(B형)의 두 가지 유형의 조건명제 형태로 나타났는데, 이를 정리해 보면 <표 3>과 같다.

<표 3> 목표 상황이 열린 문제에 대한 반응 유형 별 사례

구분	A	B
1	임의의 사각형에 대하여 $ac=bd$이다.	
2	AD//BC인 사다리꼴이면 $a=c$이다.	$a=c\,(b=d)$이면 사다리꼴이다.
3	평행사변형(직사각형, 마름모, 정사각형)이면 $a=c$, $b=d$이다.	$a=c$, $b=d\,(a=b=c=d)$이면 평행사변형이다
4	Kite이면 $a=b$, $c=d$이다.	
5	BE=ED이면 $a=d\,(b=c)$이다.	$a=d\,(b=c)$이면 BE=ED이다.

대다수의 학생들이 A3형이나 A2형의 응답을 제시한 반면 일부 학생들은 오목사각형을 포함한 임의의 사각형을 고려한 답을 제시하기도 하고, 또 일부 학생들은 Kite[8] 등과 같이 사각형의 구성요소들 사이의 관계로부터 스스로 새로운 사각형을 정의하여 답을 제시하기도 하였다.[9] 즉, 대부분의 학생들이 교과서에서 주로 접하는 사각형인 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형, 사다리꼴 등에 국한된 답을 제시한 것에 비하여 이들 일부 학생들은 사각

8) 미국 등의 외국 교과서에는 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{BC}=\overline{CD}$ 인 사각형을 통상 Kite라는 용어로 표현한다. 학생들이 Kite라는 용어를 사용하지는 않았다.

9) 실제로 A, B 두 유형별 학생들의 반응 빈도를 살펴보면 아래의 <표 4>과 같다.

<표 4> 목표 상황이 열린 문제에 대한 유형 별 반응 빈도

구분	1	2	3	4	5
A	12명	66명	196명	3명	3명
B		15명	47명		2명

형 종류에 관한 통상적인 사고를 벗어나 보다 다양하고 새로운 관점에서 주어진 문제 상황을 바라보고 있음을 알 수 있다. 이는 문제의 목표 상황이 열려 있어 학생들의 다양하고 새로운 사고를 자극하고 유도하였기 때문인 것으로 보인다.

한편, A2형과 B2형, A3형과 B3형의 응답은 각각 서로 역관계에 있는 명제이지만 응답 빈도 면에서 큰 차이를 보였고, B형의 응답들 중 상당수가 두 명제 "p이면 q이다"와 "q이면 p이다"를 동치인 명제로 인식하는 논리적 오류를 범한 것으로 나타났다.[10] 이러한 오류 사례들은 "평행사변형일 필요충분조건은 $a=c$, $b=d$임을 증명하라", "사다리꼴일 필요충분조건은 $a=c$ 또는 $b=d$임을 증명하라"와 같은 기존의 폐쇄형 문제 해결 과정에서는 발견되기 어려우며, 학생들 스스로 명제를 구성하고 그 진위를 스스로의 힘으로 판단하는 과정에서 발생한 오류라고 할 수 있다.

Ⅳ. 결론

지금까지의 논의를 통해 교과서 등에 제시되어 있어 이미 알려진 문제들을 소재로 개방형 문제를 만드는 방법과 절차를 예시하고, 예시 개방형 문제에 대한 학생들의 반응을 살펴보았다. 본 연구의 결과 및 논의 사항을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 교과서에 제시된 내용이나 문제를 개방형 문제 제작을 위한 소재로 적극 활용할 필요가 있다. 본 논문에 제시된 개방형 문제의 제작 사례를 통해 알 수 있듯이 개방형 문제는 전혀 새로운 소재나 방법을 동원하지 않더라도 교과서에 제시되어 있는 내용이나 문제들을 재구성하거나, "만약 ~ " 전략을 통해 주어진 폐쇄형 문제를 변형하여 만들 수 있다. 이런 방법과 절차를 통해 제작된 개방형 문제들은 교사와 학생 모두에게 친숙한 내용을 소재로 하고 있어서 제작 면에서 용이할 뿐 아니라 만들어진 문제에 대한 학생들의 접근 또한 용이하다는 장점을 지니고 있다. 그러므로 교사는 교과서에 통상 제시되어 있는 문제들을 단지 답을 구하고 증명하는 형태 즉, "무엇 무엇을 구하여라(증명하여라)."의 형태에서 벗어나 답의 존재성이나 명제의 진위 여부에 대한 질문으로부터 시작하여 다양한 해법을 탐색하고 그로부터 새로운 문제까지도 제기할 수 있는 개방형 문제의 형태로 변형할 수 있어야 할 것이다. 본 논문에 제시된 개방형 문제 제작 사례들은 이에 대한 본보기가 될 수 있을 것이다.

둘째, 수학 문제 상황에서 수학적 창의성은 정확한 풀이 뿐 아니라 다양하고 독창적인 반응 속에서 나타난다는 점에서 볼 때 개방형 문제를 학생들의 수학적 창의성을 평가하고 신장시키기 위한 탐구 문제로 활용할 수 있을 것이다. 실제로 본 논문에 제시된 학생들의 반응 분석을 통해 확인할 수 있듯이 개방형 문제는 문제에 제시된 자료들을 학생 스스로 상황에 맞게 적절히 선택하여 재조직하거나 다양하고 새로운 해결 방법과 과정을 제시하도록 요구하기 때문에 학생들의 다양하고 새로운 사고 및 산출물 생산을 자극하고 유도할 수 있다.

10) 구체적으로 살펴보면, A3형 응답자가 196명인 것에 비하여 역명제인 B3형 응답자는 47명밖에 되지 않으며, 77명의 학생은 "$a=b=c=d$(또는 $a=c, b=d$)이면, 정사각형(또는 마름모, 직사각형)이다."와 같은 오답을 제시하였는데, 이 중 5명을 제외한 72명은 A3형의 옳은 답을 동시에 제시하였다. 한편, A2형 응답자가 66명인 것에 비하여 역명제인 B2형 응답자는 15명이며, A2형 응답자 66명 중에서 19명만이 AD//BC인 경우와 AB//DC인 경우를 모두 고려하여 옳은 답 "사다리꼴이면 a=c 또는 b=d이다(혹은 AD//BC인 사다리꼴이면 a=c이다)."를 제시하였고, 나머지 47명의 학생들은 "사다리꼴이면 a=c이다."와 같은 오답을 제시하였다. 그 밖에도 "(등변)사다리꼴이면, $a=c$, $b\neq d$이다.", "$a=c$이면, 등변사다리꼴이다."와 같은 오류들이 발견되었다.

개방형 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 스스로 새로운 문제나 명제를 추측하기도 해야 하고 자신의 추측에 대한 진위 역시 스스로 판단할 수 있어야 한다. 이러한 능력은 단순한 선행학습이나 틀에 박힌 문제의 반복적인 해결 훈련을 통해 신장되기 어려우며, 평소 내용에 대한 깊이 있는 사고와 이해를 기반으로 스스로 문제를 제기하고 해결해 나가는 수학적 탐구 과정을 체득하고 있어야 발휘될 수 있는 것이다.

셋째, 개방형 문제를 통해 관련 개념이나 내용에 대한 학생들의 이해 및 오류 정도를 파악할 수 있다. 학생들의 반응 분석 중 오류 사례에 대한 논의를 통해 알 수 있듯이 개방형 문제를 해결하기 위해 다양하고 새로운 답을 탐색하는 과정에서 혹은 구조화되어 있지 않은 문제를 스스로 구조화하는 과정에서 예상치 못했던 관련 개념이나 내용에 관한 다양한 오류가 나타날 수 있는데, 이러한 오류들 중에는 통상적인 폐쇄형 문제 해결 과정에서는 발견하기 어려운 것들이 있다. 이는 개방형 문제가 학생들에게 다양하고 새로운 풀이나 답을 요구하고, 문제 상황이 불필요한 조건 없이 하나의 답이 나오도록 구조화되어 있지 않기 때문이라 볼 수 있다.

넷째, 개방형 문제를 수학영재학생 선발을 위한 평가 문항으로 활용할 필요가 있다. 현재 우리나라에서는 각 교육청 및 대학 부설 영재교육원을 중심으로 수학영재교육이 본격적으로 시행되고 있다. 수학영재교육에서 중요한 연구 과제 중 하나는 수학영재학생을 어떤 기준으로 어떻게 선발할 것인가 하는 점이다. 전통적으로 - 점차 줄어들고 있는 추세이기는 하지만 - 수학영재학생 선발은 수학경시대회 등과 같은 고난도의 수학문제 해결능력 평가를 통해 이루어져 왔다. 고난도 수학문제의 해결은 학생들에게 고도의 수학적 사고 능력과 과제 집착력을 요구하며, 소수의 수학영재학생들을 선발하는 방법으로 적절성을 인정받아 왔다. 그러나 수학경시대회에서 제시되는 것과 같은 고난도 문제들은 문항의 난이도와 그에 따른 학생들의 제한된 접근성으로 특징지어지며 과거로부터 현재에 이르기까지 점점 더 많은 배경지식을 요구하고 있어 학생들의 과도한 선행학습을 조장한다는 비판을 받아 왔다. 이와 비교해 볼 때 개방형 문제는 채점 상의 어려움이 있음에도 불구하고, 제작에 있어서 이미 알려져 있는 문제나 내용을 활용하여 학생들의 다양한 반응을 요구하는 형태로 재구성할 수 있다는 측면에서 문항의 개발이 비교적 용이하고, 채점에 있어서 풀이의 정확성 뿐 아니라 다양하고 독특한 정도를 함께 요구하므로 학생들의 다양하고 독창적인 사고 능력을 평가할 수 있다는 점에서 고난도 문제가 지닌 한계점들을 보완해 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

권오남, 방승진, 송상헌 (1999). 중학교 수학영재아들의 다답형 문항 반응 특성에 관한 연구. 한국수학교육학회 시리즈 A 수학교육 38(1), 37-48.

권오남, 조영미, 박정숙, 박지현, 김영실 (2003). 수학적 창의성과 개방형 문제. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육논문집 16, 217-218.

김홍원, 김명숙, 송상헌 (1996). 수학영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ) - 기초연구편. 한국교육개발원 CR 96-26. 한국교육개발원.

김홍원, 김명숙, 방승진, 황동주 (1997). 수학영재 판별 도구 개발 연구(Ⅱ) - 검사제작편. 한국교육개발원 CR 97-50. 한국교육개발원.

도종훈 (2006). 학생이 지닌 기하적 심상과 문제해결과정에서의 오류. 한국학교수학회논문

집 9(2), 195-208.
(2007). 학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계하기. 한국수학교육학회 시리즈 A 수학교육 46(1), 69-79.
Artzt, A.F. (1996). Developing problem-solving behaviors by assessing communication in cooperative learning groups. In Elliott, P.C.(Ed.), Communication in mathematics, K-12 and beyond. National Council of Teachers of Mathematics.
Brown, S.I. & Walter, M.I. (1993). Problem posing in mathematics education. In Brown, S.I. & Walter, M.I.(Ed.), Problem posing: reflection and applications (pp.16-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Cai, J., Lane, S. & Jakabcsin, M.S. (1996). The role of open-ended tasks and holistic scoring rubrics : assessing student's mathematical reasoning and communication. In Elliott, P.C.(Ed.), Communication in mathematics, K-12 and beyond. National Council of Teachers of Mathematics.
Furinghetti, F., Olivero, F. & Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures : snapshots in a classroom. International journal of mathematical education in science and technology 32(3), 319-335.
Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "What if not?" strategy in solid geometry - a case study. Journal of mathematical behavior 22(4), 369-387.
Pehkonen, E. (1991). Problem solving in mathematics. ZDM 23(1), 1-4.
Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problems". In Pehkonen, E.(Ed.), Use of open-ended problems in mathematics classroom(pp.7-11). Helsinki University.
Polya, G. (1968). Patterns of plausible inference. 이만근, 전병기, 도종훈, 김지선 역 (2004). 수학과 개연 추론 II- 개연적 추론의 여러 가지 패턴. 교우사.
Becker, J. P. & Shimada, S. (2000). The open-ended approach : A new proposal for teaching mathematics. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the learning of mathematics 14(1), 19-28.

How to Pose an Open Problem? : Two Cases of Posing an Open-ended Problem by Reorganizing Given Closed Problems

Do, Jonghoon[11)]

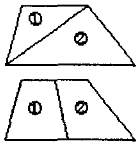
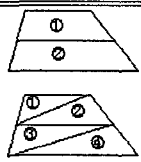
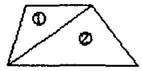
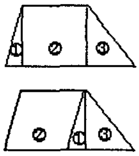
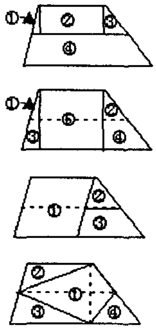
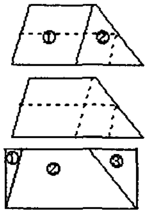
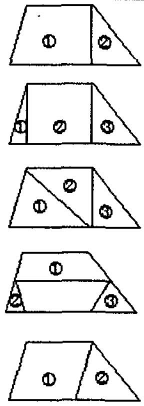
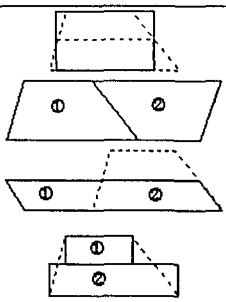
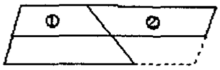
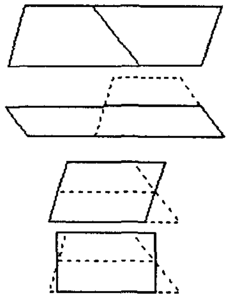
Abstract

Open problems can provide experiences for students to yield originative and various products in their level, because it is open with respect to its departure situation, goal situation, or solving method. Teachers need to pose and utilize open problems in forms of solution-finding or proving problems. For this we first have to specify which resource and method to use by concrete examples. In this article, we exemplify a method and procedure of posing an open problem by the two cases in which we pose open problems by reorganizing given closed problems. And we analyze students' responses for the two posed open problems. On the basis of these, we reflect implications for mathematical education of open problems.

Key Words : Open-ended problem, Closed problem, What if (not)?, Mathematical creativity, Mathematically gifted

11) Korea Institute of Curriculum and Evaluation (jhoondo@kice.re.kr)

부록. 해결 방법과 과정이 열린 문제에 대한 유형 별 반응 사례

구분	A_1	A_2	A_3	A_4
G_1				
G_2				
G_3				
G_4