한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 2, 207-219, June 2007

테크놀로지 활용수업에서 경험적 인식과 수학적 사고에 관한 연구 - 중학교 3학년 기하 단원을 중심으로

정인철[1] · 김택수[2] · 황운구[3]

수학에서 중요한 부분인 증명을 학생들은 어려워한다. 증명을 테크놀로지를 이용하여 대수적 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료를 만들어 지도하였다. 그러나 테크놀로지를 활용한 대수적 시각화 자료의 표현상 오류에 의하여, 학생들이 경험적 인식을 가지지 못하여 경험적 정당화를 하는데 어려움이 있었다. 테크놀로지를 활용한 특수화된 시각화 자료는 고정된 경우에만 성립하기 때문에 수학적 사고의 확장을 제한하였다. 이를 해결하기 위해서 테크놀로지를 활용하여 자체 제작한 중학교 3학년 기하 단원의 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료를 통해 학생들에게 경험적 인식을 심어주어 경험적 정당화를 시켰으며, 수학적 사고의 향상을 관찰할 수 있었다.

주요용어 : 시각화, 경험적 인식, 수학적 사고, 경험적 정당화

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

증명은 수학에서 매우 중요한 것이고, 따라서 그 도입은 신중하게 이루어져야 하며, 가능하다면 체계적으로 논리적 비약이 없이 전개되는 것이 바람직하다(김홍기, 2004). 우리나라의 중학생들의 증명 능력은 대략 10~30% 정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있다(우정호, 1994). 증명 지도 방법을 개선하기 위해서 학생들이 증명 과정에서 자주 범하는 오류의 유형을 확인하고 증명의 구성 요소를 탐구하는 연구, 증명지도에서 직관적인 방법 또는 대안적인 방법을 이용하자는 연구, van Hiele이 제시한 기하 학습 수준 이론을 확인하고 증명 학습에 적용하는 연구, 증명의 역할에 대한 연구, 증명의 본질과 형식에 관한 연구 등으로 많은 연구가 있었다(서동엽, 1999).

중학교 논증 기하에서 다루는 기하의 경우 경험적인 성격이 더욱 강하다(조완영, 2001, 재인용). 학생들은 연역적으로 증명하여 정당화하는 것보다 경험적으로 증명을 하여 정당화하

1) 전남대학교 (ijung@jnu.ac.kr)
2) 대전외국어고등학교 (wpkts@hanmail.net)
3) 대전유성고등학교 (michol92@edurang.net)

는 것을 더 선호한다(류희찬·조완영, 1999). 학생들은 어떤 사실이 왜 증명되어야 하는지를 이해하지 못한다. 왜냐하면, 그들의 관점에서 보면 실제 측정만으로도 그 사실을 분명하고 충분히 정당화된 것이기 때문이다(조완영, 2001). 이렇듯 경험적으로 정당화 시키기 위해서 직관을 이용한 시각적인 그림을 많이 사용하였지만 그림은 동적이지 못하고 하나의 그림이 일반적이라고 가정을 해야 하는 어려움이 있으나 시각화는 추상적인 수학적 지식, 개념, 원리, 법칙을 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다(이대현, 2001).

컴퓨터의 발달과 함께 컴퓨터를 이용하여 시각적으로 증명하는 연구가 이루어져 왔고, GSP, Cabri II, Cinderella 등의 탐구형 기하 소프트웨어가 발달하여 학교 수업에 많이 수업에서 활용되어 왔고 현재도 많은 부분을 수업에 활용하고 있다. 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명 활동은 문제 상황이 제시되면 학생들은 소프트웨어를 이용하여 문제에 적절한 작도를 하고 측정기능, 끌기 기능 등을 이용하여 다양한 예를 조사 탐구를 하고 여러 가지 상황에 맞게 변인들을 변형하여 주어진 명제가 맞는지를 추측하고 또한 왜 참인지를 정당화한다(류희찬·조완영, 1999). 이러한 탐구형 기하 소프트웨어는 증명 수업이 증명의 구성 요소의 이해에 있어서 여러 가지 요소에 긍정적임을 확인할 수 있었고, 태도와 동기부여, 자신감에 모두 긍정적인 변화가 있었다(윤태숙, 2002).

탐구형 기하 소프트웨어는 여러 가지 기능들을 가지고 시각적인 증명을 하는데 많은 연구된 자료들을 보면 측정 기능을 가지고 경험적 정당화를 시도하고 있다. 이러한 경험적인 정당화에 학생들이 의문점을 가지고 있는 면이 있었다. GSP와 같은 기하 탐구학습 소프트웨어에서와 같은 실험에서 사용된 측정 기구의 최대 오차가 0.01°라면 삼각형 내각의 합이 179.99°와 180.01°사이에 있다면 것만을 결정할 수 있을 뿐 삼각형 내각의 합을 정확히 알 수 없고, '각의 측정'과 '선분의 길이 측정'을 이용한 명제의 증명은 수학의 본질을 훼손할 가능성이 크다(우정호, 2002).

도형의 가변적인 요소가 수정되었을 때, 의도하는 특성을 보존하면서 여러 가지 그림들을 만들어 낼 수 있다(우정호, 2002). 그러나 수학의 다양성 원리에서 보면 수학적 명제의 특성은 변하지 않고 명제와는 상관이 없는 변수들을 변화시켜야 되는데 이러한 변수들을 고정시킨 특수화된 시각화 자료는 일반화된 시각화 자료에 비해 학생들의 수학적 사고의 확장을 하는데 제한을 한다. 이 논문에서는 이러한 기하적 시각화 자료가 대수적 시각화 자료 보다 경험적 인식을 가지고 경험적 정당화를 더 이룰 것인가와 일반화된 시각화 자료가 특수화된 시각화 자료 보다 수학적 사고를 향상 시키는가를 연구하고자 한다.

2. 연구문제

탐구형 소프트웨어의 대수적 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료를 분석하고 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료를 제작하여 학생들의 경험적 정당화를 가져오는 경험적 인식과 수학적 사고의 향상에 대한 차이를 알아보고, 시각화 자료의 흥미와 태도에 대한 변화를 알아보고자 대전 K중학교 3학년 6명을 대상으로 사례연구를 하여 다음 같은 연구를 하고자 한다.

첫째, 기존에 개발된 시각화 자료들을 분석한다.
둘째, 대수적 시각화가 기하적 시각화 자료에 대한 학생들의 반응에 따른 경험적 인식의 차이는 있는가?

셋째, 일반화된 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료에 대한 학생들이 받아들이는 수학적 사고에 대한 차이는 있는가?
넷째, 기하적 시각화와 일반화된 시각화 자료에 대한 학생들의 흥미와 태도는 어떠한가?

3. 용어의 정의

1) '대수적 시각화 자료'란 컴퓨터를 이용하여 길이나 넓이 단위의 측정을 통해 수학적 명제나 정리를 직관적으로 알아보는 시각화 자료이다.
2) '기하적 시각화 자료'란 컴퓨터를 이용하여 이동이나 끌기, 크기의 변화 등의 변환을 통해서 수학적 명제나 정리를 직관적으로 알아보는 시각화 자료이다.
3) '특수화된 시각화 자료'란 수학적 명제나 정리에 대하여 고정된 상황에서 대수적 시각화나 기하적 시각화 자료로 수학적 다양성 측면에서 수학적 개념과 관련 있는 변수는 유지한 채 관련이 없는 변인도 특정한 경우에 실험을 할 수 있는 시각화 자료이다.
4) '일반화된 시각화 자료'란 수학적 명제나 정리에 대하여 임의의 상황에서 대수적 시각화나 기하적 시각화 자료로 수학적 다양성 측면에서 수학적 개념과 관련 있는 변수는 유지한 채 관련이 없는 변인을 체계적으로 변화시킬 수 있는 실험을 할 수 있는 시각화 자료이다.
5) '경험적 인식'이란 수학적 명제나 정리에 대하여 연역적 증명을 하기 전에 시각화 자료를 통해서 경험적으로 정당화 할 수 있는 믿음을 말한다.
6) '수학적 사고'란 특수한 상황만을 생각하는 것이 아니라 일반화된 상황을 생각할 수 있는 수학적 힘을 말한다.

4. 연구의 제한점

본 연구는 중학교 3학년 기하 단원의 '원의 성질' 단원과 '피타고라스 정리' 단원에 한정하여 연구를 하였다. 탐구형 소프트웨어에서는 대수적 표현으로 설명하고 있는 부분에 대해 기하적 표현으로 설명할 수 있는 프로그램으로 자료를 제작하였다. 제작된 시각적 자료를 모두 실험에 투입하지 못하고 단원에 맞는 특정 자료를 선택하여 실험하였다. 기하단원의 자료이기에 다른 단원으로의 확장은 어렵다. 또한 실험 참여에 희망한 6명의 학생들로 사례연구를 하였기에 일반화에는 한계가 있다.

Ⅱ. 이론적 배경 및 중학교 3학년 기하 단원의 시각적 자료 분석

1. 시각화

시각화는 학생들의 직관에 와 닿을 수 있는 시각적인 자료를 탐구하게 함으로써 이해를 좀 더 쉽게 하고 재미있고 의미 있는 교육환경을 제공하는 것을 뜻한다. 또한, 기호로 된 수학적 지식을 형식 논리적으로 지도하는 방법과는 달리 시각적 자료를 통한 학습은 학생들로 하여금 그 지식을 직접 눈으로 확인할 수 있게 함으로써 훨씬 의미 있는 학습을 가능하게 한다. 귀납적이고 실험실적인 탐구환경은 수 백 년 또는 수 천 년 전에 만들어진 지식의 결

과만을 소개하는 방법과는 달리 지식의 생성 과정을 이해시킬 수 있다(이지요, 1993).

수학적 시각화는 마음속으로, 연필과 종이로, 또는 기술공학을 이용하여 이미지를 형성하는 과정이며, 수학적 발견과 이해를 위해 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다(Zimmermann & Cunningham, 1991).

시각정보(Visual Information)는 언어적 정보에 비해 시각적으로 제시된 정보는 주어진 공간 안에 언어적 정보보다 많은 정보를 제시할 수 있고, 언어적으로 설명할 때에는 복잡해지는 내용을 시각적 제시를 통해 단순화시킬 수 있으며 언어나 어휘가 가지는 추상성을 명료하게 해준다. 또한, 앞으로 제시될 정보에 대한 선행조직자의 역할을 하고, 시각적으로 인지된 정보의 파지 시간이 언어적으로 제시된 것보다 길다(박치환, 2000).

김내희(2005)에 의하면 시각화 유형으로는 도형적 표현, 다이어그램, 그래프, 컴퓨터를 이용한 동적 이미지를 제시하였는데, 컴퓨터를 이용한 동적 이미지는 그래프 또한 움직임을 통해서 수학에 대한 성질을 더욱 더 이해하기가 쉽게 표현된 것이다. 수학교육의 교수학습 과정에서의 시각화 역할을 세 가지 측면 즉, 수학에 대한 인식을 바꾸고 수학학습에 대한 동기를 부여하는 측면, 수학적 사실의 인식, 이해 및 기억의 측면, 증명이나 문제해결의 측면에 대해 살펴보았다(김세진, 2002). 수학에서 시각화를 통한 교수-학습은 수학적 지식의 이해, 적용, 문제해결, 심미적, 정의적인 측면 등에서 결정적인 영향을 미칠 수 있다(신동선·류희찬, 1998).

2. 개연 추론

추론에는 보다 합리적인 추측인 논증적 추론과 덜 합리적인 추측인 개연적 추론으로 구분하고 개연적 추론에서 귀납 추론의 방법을 사용한다(Polya, 이만근 역, 2003b). 귀납 추론은 일반화, 특수화, 유추(유비추리)로 구분할 수 있고, 일반화란 어떤 주어진 대상들의 집합에 대한 연구로부터, 그를 포함한 더 큰 대상들의 집합에 대한 연구로 나아가는 것이고, 특수화란 주어진 대상들의 집합 전체에 대한 연구로부터 그 집합 안에 포함된 더 작은 집합에 대한 연구로 나아가는 것이며, 유추는 일종의 닮음(유사함)이다. 즉, 비슷한 대상들은 관점을 달리하면 동일한 것으로 보이는 것을 말한다(Polya, 이만근 역, 2003a). 추론은 직관을 동반하기도 하는데, 경험은 직관의 형성에서 근본적인 요인이 되고, 어떤 정황에서 안정적 기대를 형성하기 때문에 직관의 형성에 근본적 역할을 한다(Fischbein, 우정호외 7인 역, 2006).

3. Dienes의 수학적 다양성 원리

Dienes의 수학학습의 원리는 역동성의 원리, 지각적 다양성의 원리, 수학적 다양성의 원리, 구성의 원리로 4가지로 구분하였다. 수학적 다양성의 원리는 수학적 개념과 관련 있는 변수는 유지한 채 관련이 없는 변인을 체계적으로 변화시키는 것이 수학적 개념의 일반화를 돕는다는 것이다. Dienes는 수학적 다양성의 원리와 지각적 다양성의 원리를 잘 조화시켜 개념 발달의 핵심적인 측면인 추상화와 일반화를 촉진해야 한다고 보았다. 컴퓨터를 활용한 공학환경은 다양한 학습경험을 제공해 줌으로써 지필 환경을 효과적으로 보안할 수 있다. 또한, 이런 측면에서 보면 탐구형 소프트웨어는 Dienes의 수학적 다양성의 원리에 적합한 학습 환경을 제공하여 준다고 볼 수 있다(권성룡외 4인, 2006).

4. 중학교 3학년 기하단원의 시각화 자료의 분석 및 자료 제작

수학사랑(주)에서 제공하고 있는 GSP자료실이나 자바로 학습 자료를 만들었던 일본 홈페이지인 IES 홈페이지(현재 Cabri자료로 제작 중)의 자료들을 분석 해보면 원의 성질에 대한 자료가 상대적으로 부족함을 알 수 있다. 또한 자바로 제작한 경우 화면 확대가 어려워 수업에 실질적으로 사용하기가 어렵다는 단점이 있다. 다수 국내·외 홈페이지들을 분석해 보면 원의 성질과 피타고라스 정리에 대한 기하적 시각화와 일반화된 시각화 자료가 부족함을 알 수 있다. 그 이유는 학생들에게 활용할 수 있는 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료의 제작이 어렵기 때문이다. 인터넷에서 활용 시 탐구형 소프트웨어는 자바로 컴파일해서 올리도록 되어 있어 자바 애플릿의 크기 조정이 어려워 수업 시 활용도가 적다. 이에 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료들은 탐구형 소프트웨어에서 제작이 어려워 플래시 8의 액션스크립트 언어를 이용하여 제작하였다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

중학교 3학년 기하 단원인 '원의 성질'과 '피타고라스 정리'에 대한 탐구형 소프트웨어를 활용한 시각화 자료를 분석한 결과 많은 대수적 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료가 있었다. 이러한 대수적 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료의 경우 경험적 인식의 확립과 수학적 사고의 향상에 대한 문제점을 가지고 있어서 본 연구는 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료인 '원의 성질'의 자료를 23개, '피타고라스 정리'의 자료를 17개 개발하였다. 이 중에서 실험에 투입한 자료는 '원주각과 중심각의 성질'과 '피타고라스 정리의 페리칼 증명' 자료를 투입하여 실험 연구를 하였다.

실험 연구 전에 사전 설문지 조사와 진단평가를 통해 학생들의 사전 지식을 평가하였다. 수업은 원의 성질과 피타고라스 정리 각 1차시를 수업한 후 형성평가와 사후 설문지를 조사하였고, 심도 있는 인터뷰를 실시하였다. 1차시 수업에서는 원주각과 중심각의 내용으로 처음에는 각도기를 이용한 실험과 GSP를 이용한 대수적 시각화 자료로 실험 그리고 자체 제작한 기하적 시각화 자료로 실험하였다. 그리고 논리적으로 접근하여 증명하는 수업을 하였다.

2차시에서는 피타고라스 정리의 페리칼 증명으로 종이와 가위로 오려서 그 성질을 실험하였고, GSP에서 특수화된 시각화 자료로 측정을 통해 정리가 성립함을 보았으며, 자체 제작한 일반화된 시각화 자료를 이용해서 수업을 하였다. 그리고 논리적 증명을 하였다.

본 연구에 참여한 학생들은 모두 수학에 흥미를 가지고 열심히 학업에 임하려는 자세를 가지고 있으며, 수학 성적은 중상위권을 유지하는 학생들로 본 연구에 참여하겠다는 그들의 개인적인 의사를 존중하여 선정하였다.

Ⅳ. 연구의 실행

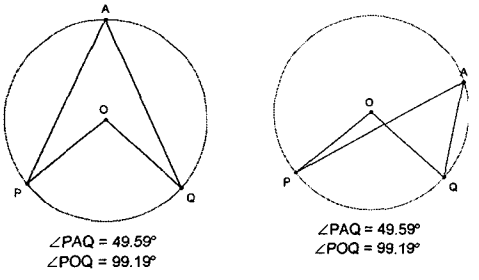
1. 대상 학생들의 사전 조사

설문조사에서 "컴퓨터 프로그램 활용 수업을 받아본 적이 있는가?"라는 질문에 4명이 "받

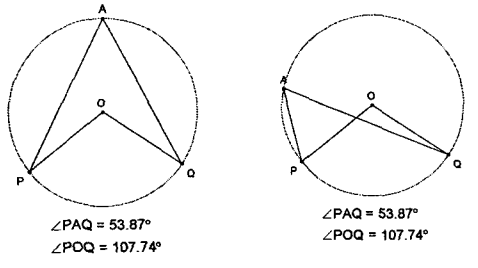
아본 적이 있다"라고 응답을 하였고, 2명이 "받아본 적이 없다."에 응답을 하였다. "컴퓨터 활용 수업 시 수업내용의 이해도는 얼마나?"라는 질문에 "잘 이해한다."에 1명, "조금 이해한다."에 5명이 응답을 하였다. "수학에 대한 일반적인 생각을 적으시오?" 라는 질문에 학생들의 반응은 "수학은 집중력과 이해력을 필요로 하는 학문이다." "복잡하고 짜증난다.", "자신감이 필요한 학문이다.", "푸는 재미가 있는 교과목이다.", "실생활에 필요하지만 이해하기가 어렵다." "기호가 많이 중요하고 기호를 바탕으로 문제를 응용할 수 있어야 한다.", "머리가 아프지만 풀고 답을 알면 기분이 좋다."라고 응답을 하였다. 전체적으로 학생들은 수학을 좋아하고 있지만 이해하기 어려운 교과로 인식하고 있다. 진단평가에서 4명의 학생은 원주각과 중심각의 성질을 공식으로만 알고 문제를 풀 수 있었고 2명은 공식을 잊어버려 풀지 못하고 있다가 이를 알려주니 바로 배운 것이 생각난다고 하였고, 증명은 1명만 제대로 할 줄 알고 있었고 5명은 증명을 하지 못하였다. 이를 증명을 한 학생도 특수한 상황에서 증명을 하였다. 피타고라스 정리의 공식은 모두 알고 있었으며, 증명은 어려워하여 모두 증명을 하지 못하였다. 1명의 학생만이 삼각형 합동 조건을 이용한 증명 방법을 생각해 내었다.

2. 수업운영

[그림 1]은 원주각과 중심각의 성질을 GSP를 이용해서 학생들에게 실험한 대수적 시각화 자료이고, [그림 2]는 자체 제작한 기하적 시각화 자료이다. [그림 1]의 대수적 시각화 자료는 학생들이 점 A, 점 P, 점 Q를 원 위로 움직여서 학생 스스로가 원하는 중심각과 원주각을 만들어 본다. 측정 도구에서 원주각 $\angle PAQ$를 측정하고, 중심각 $\angle POQ$를 측정하여 원주각과 중심각 사이의 관계를 추측하여 보는 자료이다.

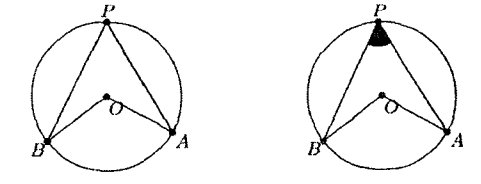


중심각이 원주각의 2배가 대수적으로 성립 하지 않는다.



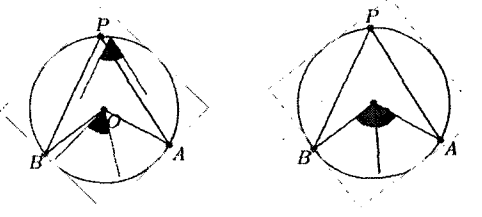
중심각이 원주각의 2배가 대수적으로 성립한다.

[그림 1] 대수적 시각화 자료



원하는 원주각과 중심각을 만든다.

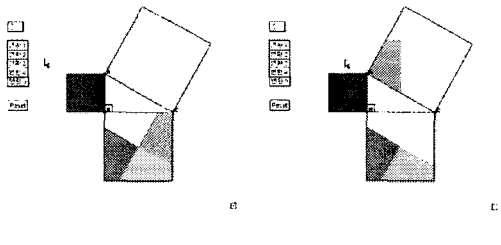
다음 버튼을 눌러 두 개의 원주각을 만든다.



원주각을 드래그와 회전버튼으로 중심각에 맞춘다.

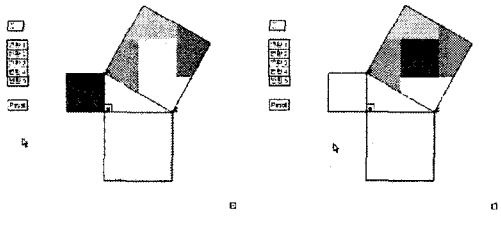
원주각의 두 배가 중심각이 됨을 시각적으로 확인한다.

[그림 2] 기하적 시각화 자료



원하는 직각삼각형을 만든다.

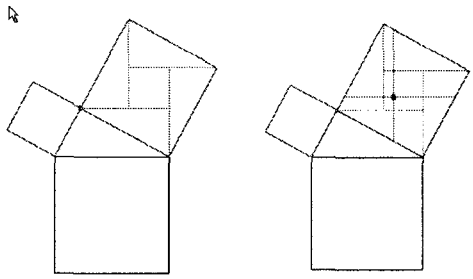
변환 버튼을 순서적으로 눌러 도형을 이동시킨다.



변환 버튼을 순서적으로 눌러 도형을 이동시킨다.

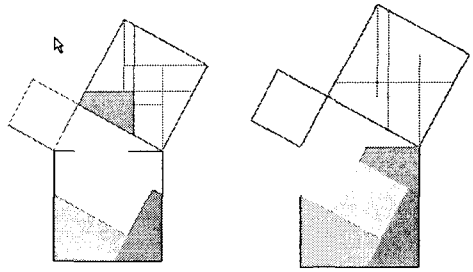
변환 버튼을 눌러서 도형을 이동시켜 피타고라스 정리가 성립함을 시각적으로 확인한다.

[그림 3] 특수화된 시각화 자료



원하는 직각삼각형을 만든다.

원하는 부분으로 도형을 자른다.



마우스로 드래그 하여 도형을 아래에 맞춘다.

피타고라스 정리가 성립함을 시각적으로 확인한다.

[그림 4] 일반화된 시각화 자료

[그림 2]는 점 A, 점 B, 점 P를 원 위로 움직여서 학생 스스로가 원하는 원주각과 중심각을 만들어 본다. 다음 버튼을 누르면 원주각이 시각적으로 나타나고 2개의 원주각을 드래그 하여 원의 중심에 이동시키고 회전버튼을 눌러서 원주각을 회전시켜 중심각에 맞추어 그 성질을 추측하여 보는 자료이다.

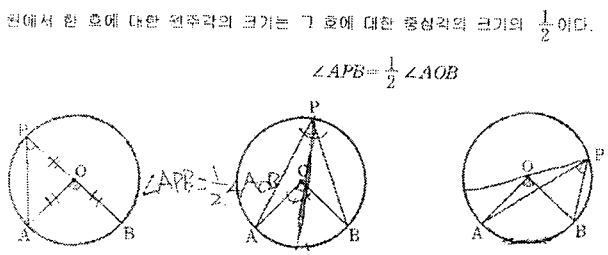
[그림 1]의 위에 있는 [그림 2]를 보면 수치상으로 중심각이 원주각의 2배와 같지 않는 것을 볼 수 있고, [그림 2]를 보면 중심각이 원주각의 2배가 됨을 알 수 있다. 이는 GSP의 측정 도구가 가지는 특성 때문인데 즉, 소수점 셋째 자리에서 반올림 하여 나타난 측정값이다. 따라서, 학생들이 이러한 점에서 의구심을 갖게 되고, 그에 대한 질문을 하였다. 그러나 [그림 2]에서는 각을 기하적으로 표시하여 직관적으로 추측할 수 있는 장점이 있다.

[그림 3]은 피타고라스 정리의 증명 중 페리칼 증명을 하는 것인데, 닮음의 직각삼각형으로는 변형이 되는데 직각이등변삼각형이나 더 일반화된 직각삼각형으로 변형시킬 수는 없다. 또한 밑변의 사각형도 자르는 것도 특수한 상황에서만 잘라져 있다. 이런 점을 수학적 다양성에서 보면, 변화할 수 있는 변인을 모두 다 변화하지 않아 특수한 시각화 자료로 구분하였다. 또한 넓이를 마우스로 평행이동이 불가하여 버튼으로만 이동하게 제작된 것이다.

[그림 4]는 원하는 직각삼각형으로 변형할 수 있고, 다음 버튼을 눌러 변인을 변형하게 하여, 즉 학생이 원하는 방향으로 자르게 할 수 있다. 이런 자료는 모든 변인을 변형시킬 수 있어서 일반화된 시각화 자료로 구분하였다. [그림 4]의 일반화된 시각화 자료는 학생이 원

하는 데로 변형을 한 후에 다음 버튼을 눌러 면적이 표시되게 하고 이를 마우스로 드래그하여 아래의 정사각형에 갖다 놓아 피타고라스 정리의 성질을 직관으로 인지할 수 있는 실험 자료이다.

[그림 5]는 테크놀로지를 이용한 시각화 자료를 가지고 수업을 한 후, 한 학생이 학습지에 논리적으로 증명을 한 부분이다.



[그림 5] 학생이 논리적 증명을 한 학습지 일부

V. 연구 결과 및 분석

각도기를 이용한 측정 활동을 내용에 대한 아래의 인터뷰를 보자.

교사 : 각으로 직접 재었을 때 그것을 믿을 수 있다고 생각합니까? 또한 답을 쓴 것을 보니까 20 18 19 등등 딱딱 떨어지는 모습을 보았는데, 소수점이 나왔을 때 각도기를 이용하여 잴 수 있는가요?
학생1 : 없습니다. 또한 힘들구요.
교사 : 두 가지 수학 실험을 했는데, 숫자 측정을 통한 것과 기하적으로 각을 움직여서 맞추어 보는 실험을 비교하면 어떤가요?
학생3 : 정확한 것을 음!. 거의 대부분 원래 모든 것이 다 그렇잖아요. 대충 눈으로 보고 그렇게 하는 것이잖아요.
교사 : 각도기는 어느 정도 믿을 수 있을까요?
학생2 : 네. 실제 측정하는 것보다 각을 맞추는 것이 더 믿을 만합니다.

학생들이 각도기를 이용해 측정 활동을 하였을 때에 각도기에 표시된 정확한 각으로 측정되었을 때는 믿음이 가지만 각도기의 측정 도구의 오차로 인하여 소수점 각이 나왔을 때는 실측이 불가능하여 원주각과 중심각 사이의 경험적 확신을 갖는데 어려움을 느끼고 있다.

탐구형 소프트웨어의 측정 도구를 사용하여 원주각과 중심각을 측정하여 성질을 알아보고자 인터뷰를 한 내용을 보면 다음과 같다.

교사 : 원주각인 ∠ACB가 26.04인데 중심각의 크기는 얼마이죠?
학생6 : 네. 중심각인 ∠ADB=52.08 두 배입니다.

교사 : 그러면 움직여 보세요. 잘 했는데요. ∠ACB가 36.54인데 중심각의 크기는 얼마이죠?
학생5 : 네. 중심각인 ∠ADB=73.03입니다. 정확하게 두 배가 아니네요.
교사 : 수학은 정확해야 하는데 그럼 믿을 수 있는가요?
학생2 : 이렇게 나오잖아요. 하지만 숫자의 의미는 정확성에 있는데 숫자라서 그리 믿기 좀 어색한데요.

테크놀로지를 이용하면 측정값을 원하는 각도기로 측정했을 때보다는 정확한 값을 측정할 수는 있어 [그림 1]의 아래에 있는 그림의 자료에서 보듯이 정확하게 중심각이 원주각의 2배가 됨을 보고 경험적 확신을 가질 수는 있으나, [그림 1], 즉 위의 그림에서처럼 테크놀로지의 왜곡된 부분으로 인하여 다시 말하면 측정 도구의 오류에 의해 수학 명제의 증명은 수학의 본질을 훼손하고, 학생들은 컴퓨터에 대한 오류를 인지하지 못하므로 경험적 확신을 갖지 못하고 의구심을 갖게 되었다. 이러한 시각화 자료를 대수적 시각화 자료로 분류하였고 이러한 대수적 시각화 자료의 단점을 보완하는 기하적 시각화 자료에 대한 학생들의 반응을 살펴보자.

교사 : 다음 시각화 자료를 살펴봅시다. 원주각을 두 번 옮겨와서 붙여보세요.
학생1 : (실험 중) 정확한 느낌이 듭니다. 그냥, 기억하는 데에도 유리하고 믿음이 더욱 갑니다. 눈에 보이니까 의심할 수 없잖아요.
교사 : 어느 것이 더 믿을 수 있을까요? 어떤가요?
학생1 : 두 번째 것이 더 믿음이 가요. 숫자라고 하면 정확한 값이 있어야 하잖아요. 그런데 소수점은 눈에 안 들어오잖아요. 근사값이 여러 개 나와도 믿기 어렵고 오래 기억에 남지는 않습니다.
교사 : 숫자만을 봤을 때 느낌은?
학생2 : 딱 꿰어 맞추려고 노력하고 있다는 느낌이 듭니다. 숫자가요 실제로 숫자만 같다고 해놓고 각도가 다를 수 있잖아요. 그런데 그림은 딱 들어맞으니까 참 들어맞고요. 실제로 저희가 보는 것이니까 숫자보다 그림 쪽에 믿음이 더욱 갑니다.
학생3 : 정확하게 하면 저희가 딱 봤을 때 바로 보는 그림이라고 생각합니다. 더욱 믿음이 갑니다.
교사 : 꿰어 맞추는 것은 각이 다 다른데 여러 번을 해봤나요?
학생3 : 각의 크기가 다 다르잖아요 그런데도 다 들어가니까 신기했습니다. 바꿔도 되니까요

학생들의 반응은 각도기를 이용한 측정활동과 탐구형 소프트웨어를 사용한 대수적 시각화 자료보다 자체 제작한 기하적 시각화 자료에 원주각과 중심각의 성질에 대하여 경험적 확신을 가지는 것을 볼 수 있었다. 탐구형 소프트웨어의 대수적 시각화 자료도 작도하는데 매우 좋은 도구이며, 이를 이용한 수업도 흥미를 이끌어 내기도 하지만, 측정 도구를 이용한 자료는 대수적 표현을 정확히 할 수 없는 단점을 안고 있어서 이러한 부분을 보완할 수 있는 기하적 시각화 자료가 경험적 확신을 심어 줄 수 있다. 테크놀로지를 이용하면 여러번 반복을 할 수 있는 이점도 있으며, 학생들이 다양하게 상황에서 실험을 할 수 있어 경험적 인식을 갖는데 도움을 주었다.

피타고라스 정리의 실험에서 일반화된 시각화 자료를 가지고 실험한 인터뷰를 보자.

교사 : 이제 페리칼 증명법 일반화된 상황에서 실험해 봅시다.
학생1 : 재미있는 걸요. 신기해요.
교사 : (학생이 훨씬 빨리 찾아가는 모습을 볼 수 있었다) 정말로 잘하는 걸!
학생2 : 제가 좀 잘 하나요! 이거요 좀 신기해서 기억에 많이 남을 것 같아요.
교사 : 일반화된 상황에서의 피타고라스는 이런 상황에서도 되잖아 칠판에서 설명을 시각적 평면자료로 제시한 것과 실험을 통한 시각적 증명과 비교를 하면 어떤가요? 일반화시킨 조작을 통한 실험 중 어느 것이 좋은가요?
학생5 : 직접 실험해 보는 것이 좋아요 피타고라스 증명에 대해 아이들이 이해를 잘 못하는 경우가 많은데요. 훨씬 좋은걸요.

일반화된 시각화 자료가 흥미를 줄 수 있고, 수학의 태도에 영향을 줌을 알 수 있다. 학생이 매우 흥미로워하고 피타고라스의 정리의 이해를 잘 할 수 있음을 볼 수 있었다.

교사 : 이번 '페리칼 피타고라스 증명' 실험은 무슨 원리에 의해서 잘랐을까?
학생3 : (실험) 빗변과 평행이 되도록 잘라 놓은 것 같습니다. 그래서 옮겨진 것이고요. 가져다 붙여 봄으로써 잘려나갔던 선분을 찾을 수 있는걸요. 피타고라스 정리를 증명할 때 하나하나 잘라서 생각하는 것이 훨씬 믿을 만하고 내 것이라는 생각이 듭니다. 정말 제가 증명한 것 같구요!. 또 시간이 지난 후에도 더 잘 떠오를 것 같습니다. 넓이가 같다는 것만으로는 기억하기가 좀 어려울 것 같습니다.

일반화된 시각화 자료는 경험적 인식을 제공하여 보다 경험적 정당화를 하는데 도움을 주는 것을 보았다. 또한 파지의 효과에서 공식을 외우는 것 보다는 시각적으로 경험적 정당화를 하면 오랜 기억이 될 수 있을 것이다.

교사 : 일반화된 것에 대한 장점은?
학생5 : 이렇게 이런 모습으로 고정된 것만 하니까 문제 적용에서 불리합니다. 머릿속에서는 그림이 이런 식으로만 그려져 있으니까요! 고정된 그림에서의 생각은 문제가 잘 풀리지 않아요. 그런 면에서 이번에 참 좋은 실험인걸요.
학생2 : 일반화란 것으로 배우니까 이런 그림도 있고요. 이런 그림도 있어요. 이런 상황으로 배우니까 참 재미있는 걸요.

일반화된 시각화 자료가 학생들에게 수학적 사고의 확장을 제공함을 위의 인터뷰에서 볼 수 있었다. 이것은 특수화된 시각화는 단순히 직각삼각형인데 예각일 때에만 증명을 하고 있고, 특수화된 시각화 자료도 특수한 상황에서만 다루어지기 때문에 여러 가지 상황을 생각하는데 어려움을 주고 있다. 그러나 일반화된 시각화 자료는 이를 해결하기 위해서 수학적 다양성의 원리를 적용해서 학생들에게 정리의 변수는 변하지 않고 그 이외의 변수를 변화하도록 하게 하여 이를 자기 주도적으로 실험함으로써 다양한 변수를 처리하여 피타고라스 정리의 성질을 수학적 사고를 확장하는데 도움을 주고 있다.

교사 : 실험 중에 사고력을 요하고 생각하는 시간을 줘야하는데 시간적으로 불리한 점은 없을까요?
학생1 : 하나라도 확실하게 알아두는 것이 좋을 것 같습니다. 나머지는 나중에라도 할

수 있지만 이것은 아니잖아요. 불리하단 생각보다 자기가 생각한 것에 대한 도움을 더 받을 수 있다고 생각합니다. 왜냐하면 그것을 자기 혼자만 생각하면 이곳저곳 방황하는데 실험을 하면 좀 더 체계적으로 할 수 있게 되니까요.

교사 : 시각화를 이용한 수업에서 재미있게 느낀 부분은 무엇이 있을까요?

학생1 : 직접 해보는 각 맞추는 부분에서 눈으로 보는 것보다 흥미롭고 좋았습니다.

본 연구에서도 학생이 원래 점이 원 위로만 움직여야 하는데 마우스를 매우 빠르게 움직이면 원 밖으로 점이 이동되는 시각화 자료의 오류가 나타남을 알 수 있다. 시각화 자료를 제작할 때 논리적 오류가 없게 만들었으나, 오류를 무시하고 컴파일을 하는 플래시의 액션스크립트 언어의 특징에 의한 제작자가 미처 예상치 못한 오류를 학생들이 발견하게 되었다. 학생들은 이러한 것에서 학습 자료의 신뢰성을 잃게 된다. 따라서 자료의 제작에서 이러한 오류가 없게 면밀히 제작을 하여야겠다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구에서 탐구형 소프트웨어로 만들어진 대수적 시각화 자료와 특수화된 시각화 자료가 대수적 표현에 따른 학생들의 경험적 정당화의 경험적 인식에 문제가 있고, 수학적 사고를 이끌어 내지 못했다. 따라서 본 연구를 위해서 개발한 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료는 대수적 시각화와 특수화된 시각화 자료보다 평행이동과 회전변환이 자유롭고 일치하는 것이 시각적으로 보여 경험적 인식을 가지게 되었고, 수학적 사고의 향상이 되어 경험적 정당화를 할 수 있었음을 볼 수 있었으며 매우 흥미롭게 학습하는 것을 관찰하였다.

탐구형 소프트웨어로 만들어진 시각화 자료들은 대수적 시각화 자료이거나 특수화된 시각화 자료가 대부분이었다. 일본 IES 홈페이지에서 제공되고 있는 일부 Java로 만든 자료에서 기하적 시각화 자료와 일반화된 시각화 자료가 적었다. 때문에 대수적 시각화, 기하적 시각화, 특수화된 시각화, 일반화된 시각화 자료들이 수학적 사고와 경험적 인식이 큰 경험적 정당화를 시킬 수 있는 시각화 자료를 개발 보급하여야 하겠다. 테크놀로지를 활용한 수열 단원의 시각화 자료의 연구는 정인철·황운구·김택수(2007)에 의해서 연구되었다.

학생들은 연역에 의해 수립된 결론의 절대적 확실성을 수용하는데 매우 조심스러워 했으면서도, 학생 모두가 귀납에 의해 만든 결론들 보다 연역에 의한 결론이 "훨씬 더 확실하다"고 느꼈다. 연역적 또는 귀납적으로 증명을 하던 학생들 모두가 경험적 지식이 없이는 논리적 증명의 어려움이 따른다(Harold P, Fawcett, 장경윤·류현아·한세호 역, 2006). 이를 위해서는 기하적 시각화 자료를 통해서 경험적 인식으로 경험적 정당화를 할 수 있는 자료와 일반화된 시각화 자료를 통해서 수학적 사고를 향상시킬 수 있는 자료를 다른 학년이나 다른 단원으로 확대하여 개발하는 연구가 필요하다.

참고문헌

권성룡·김남균·류성림·박성선 (2006). 테크놀로지와 함께 하는 수학교육, 서울, 경문사.

김내희 (2005). 제7차 교육과정에 따른 학교수학의 시각화에 관한 연구, 전주대학교 교육대학원.

김세진 (2002). 중등 수학 교과서의 시각화 자료 연구, 중앙대학교 석사학위 논문.

김홍기 (2004). 중학교 수학에서 기하 내용 취급에 관한 연구, 대한수학교육학회논문집, 제14권 제1호.

류희찬·조완영 (1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어 활용, 대한수학교육학회논문집, 제9권, 제2호.

박치환 (2000). 일차분수함수의 컴퓨터 시각화, 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.

서동엽 (1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석, 대한수학교육학회논문집, 제9권 제1호.

신동선·류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울, 경문사.

우정호 (1994). 증명 지도의 재음미. 대한수학교육학회논문집, 제4권, 제1호.

우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울 : 서울대학교 출판부.

윤태숙 (2002). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명 학습, 이화여자대학교 석사학위논문.

이대현 (2001). 수학교육에서 직관적 모델에 대한 연구, 대한수학교육학회논문집, 제11권, 제1호.

이만근외 4인 (2003a). 수학과 개연추론 Ⅰ, 서울, 교우사.

이만근외 4인 (2003b). 수학과 개연추론 Ⅱ, 서울, 교우사.

이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

조완영·권성룡 (2001). 수학 수학에서의 증명, 대한수학교육학회논문집, 제11권, 제2호.

정인철·황운구·김택수 (2007). 컴퓨터 시각화 자료가 고등학생들의 수열 개념 이해에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집, 10(1), 91-111.

Fischbein, E (2006). 우정호외 7인 역, 수학과학학습과 직관, 서울, 경문사.

Fawcett, H. P. (2006). 장경윤·류현아·한세호 역, 증명의 본질, 서울, 경문사.

NCTM (1998). Principles and standards for school mathematics : Discussion draft. Reston, VA: the Council.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics, (pp. 1-8), Library of congress number: 90-063690. ISBN 0-88385-071-0.

수학사랑(주) (2007). http://www.mathlove.co.kr/sw/GSP/JSP_Gallery.htm.

Math Education and Technology (2007). htttp://www.ies.co.jp/math/indexeng.html.

정인철 · 김택수 · 황운구

A Study of Mathematical Thinking and Experimental Recognition in using of Technology
- Focused on Unit of Geometry at Level of Middle School Student

Jung, Inchul[4] · Kim, Taeg-su[5] · Hwang, Woon-gu[6]

Abstract

Students have a hard time with a formal proof, which is one of most important part in mathematics education. They were taught the proof with algebraic visual materials using technology and specialized visual materials. But, they experienced the difficulty in justifying due to the lack of experimental recognition with the representation using technology. The specialized visual materials limited the extension of mathematics thinking of students because it worked only for the case that is fixed. In order to solve this type of problem, we made algebraic visual materials for 9th graders using technology and generalized visual materials so that students experience for themselves to help them to experience experimental justification, thus we recognized that they were improved in enhancing mathematical thinking.

Key Words : Visualization, Experimental Recognition, Mathematical Thinking, Experimental Justification

4) Chonnam National University (ijung@jnu.ac.kr)
5) Daejeon Foreign Language High School (wpkts@hanmail.net)
6) Daejeon Yuseong High School (michol92@edurang.net)