한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 3, 341-351, September 2007

삼각형의 결정과 합동의 분석

김수현[1] · 최윤상[2]

중학수학 7-나에서 삼각형의 결정조건은 '세 변이 주어질 때', '두 변과 끼인 각이 주어질 때', '한 변과 그 양끝 각이 주어질 때'로 기술하고 있다. 합동[3] · 닮음조건[4]도 세 조건으로 기술하고 있다. 이 논문에서는 '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'도 삼각형의 결정조건에, 대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'는 합동조건과 닮음조건[5]에 포함될 수 있음을 밝히며, 최소필수성은 삼각형의 결정조건에 있다고 보기 어렵고 합동조건에만 존재한다는 것, 유클리드 기하를 통한 삼각형 결정 · 합동조건의 명제탐구 및 결정 · 합동조건을 동일시하는 개념 혼동에 의한 문제점, 삼각형 결정을 위한 작도학습에 있어서 각과 길이의 수치화로 인한 부정적 영향에 관하여 논의한다. 마지막으로 미국과 일본 등의 교과서에서는 다루지 않으며, 유클리드 기하에도 없는 결정조건의 학습 효과에 대한 논의와 중학 수학 7-나의 삼각형의 결정 · 합동부분에 있어 학생들의 탐구력과 창의성 향상을 위한 학습 방향을 제안하는 바이다.

주요용어 : 삼각형의 결정조건, 합동조건, 닮음조건, 최소필수성, 유클리드기하, 각과 변(선분)의 수치화

I. 서론

이종우(2004)는 기하학의 추론은 논리적이며 명백하여 기하학적 사고를 익힌 사람은 사고 판단을 정확하고 올바르게 할 수 있다고 말한다. 우리나라는 현재 유클리드 기하의 일부분만을 중학과정에서 다루고 있다. 도형의 성질을 연구하는 것이 기하학이라면, 작도는 기하학의 기본이라 할 수 있다. 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 학습하는 작도는 학생들의 탐구력 · 창의력 향상에 많은 도움을 줄 수 있으나, 입시 중심의 교육에서 작도는 점점 소홀하게 다뤄지고 있다. 현재 중학 수학 7-나의 삼각형 결정과 합동의 작도 학습에 서 많은 부분 변(선분)과 각을 수치화하고 있다. 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는 작도 학습에서 선분(변)과 각의 크기를 수치화하는 것은 작도와 증명을 통한 창의력 향상을 기대할

1) 대원외국어고등학교 (elffriend@empal.com)
2) 대원외국어고등학교 (yoonyou2@daewon.seoul.kr)
3) 합동조건은 '대응하는 세 변이 같을 때', '대응하는 두 변과 끼인 각이 같을 때', '대응하는 한 변과 그 양끝 각이 같을 때'
4) 닮음조건은 '세 쌍의 대응변 길이의 비가 같을 때', '두 쌍의 대응변의 길이의 비와 그 끼인 각이 같을 때', '대응각의 크기가 같을 때'
5) '두 쌍의 대응변 길이의 비와 긴 변의 대각이 같을 때'

수 없게 한다.

중학 수학 7-나 교과서의 삼각형의 결정을 위한 학습에서 삼각형의 6요소 중 다양한 조건('두 선분과 두 각', '세 선분과 한 각' 등)을 제시해 직접 작도해 보는 과정 없이, 삼각형의 결정조건 세 가지만을 작도하는 과정이 있다. 그리고 이 세 가지가 삼각형을 하나로 결정하기 때문에 삼각형의 결정조건이라는 내용이 기술돼 있다. 학생들은 깊은 사고 과정 없이, 이를 하나의 공식처럼 받아들여 결정과 합동의 이해 부족으로 이어진다고 할 수 있다. 이로 인해 학생들은 다양한 조건이 주어지고 삼각형이 결정되는가 하는 질문을 접하면 문제해결에 어려움을 느끼게 된다. 또 '두 변과 끼인각이 아닌 한 각'이 주어지면 삼각형이 두 개로 결정된다고 교과서에는 기술 돼 있다. 그러나 '두 변과 끼인각이 아닌 한 각'이 주어지면 삼각형이 하나로 결정될 때, 두 개로 결정될 때, 삼각형이 결정되지 않는 경우 이렇게 세 경우가 있다.

또한, 삼각형의 합동을 위한 학습에서는 삼각형의 결정을 이용하면 두 삼각형이 합동임을 알 수 있다고 기술돼 있다. 그러나 삼각형의 결정조건을 이용하면 두 삼각형이 합동임을 알 수도 있으나 결정조건을 이용하여 합동임을 알 수 없는 경우도 있다. '한 선분과 두 각이 주어질 때'는 삼각형이 하나로 결정될 수 없다. 그러나 '대응하는 한 변과 두 각이 같을 때(SAA)'에 합동은 된다. 이와 같이 삼각형의 결정은 될 수 없어도 합동은 되는 조건이 있기 때문에 결정을 이용하여 합동을 알 수 있다는 표현은 적절하다고 할 수 없을 것이다. 삼각형의 결정과 합동을 동일시하거나, 결정으로부터 합동을 알 수 있다는 것은 유클리드 기하의 삼각형 결정과 합동의 이해 부족으로 볼 수도 있다.

중학 수학 7-나 교과서에는 '세 변의 길이가 주어질 때', '두 변과 그 끼인각이 주어질 때', '한 변과 그 양끝 각이 주어질 때가 삼각형의 결정조건으로 기술돼 있다. '두 변과 그 끼인각이 아닌 한 각이 주어질 때'는 두 개의 삼각형이 결정되기 때문에 결정조건이 될 수 없다고 실려 있다. 그러나 직접 작도 · 탐구해 본 결과 '두 변과 끼인 각이 아닌 긴 변의 대각이 주어질 때'는 삼각형이 두 개가 아닌 하나로 결정된다. 그러므로 '두 변과 긴 변의 대각이 주어질 때'도 삼각형의 결정조건에 포함되어야 함을 제안하는 바이다.

삼각형의 결정조건이란 하나의 삼각형을 결정하기 위해 6요소 중 필요한 요소를 말한다. 결정조건에서 '최소필수성'이란 더 많은 조건이 주어져도 삼각형이 결정되나, 결정을 위해 꼭 필요한 최소한의 조건이 갖는 성질이라고 한다. 삼각형이 결정되는 데는 '세 변의 길이가 주어질 때', '두 변과 그 끼인각이 주어질 때', '한 변과 그 양끝 각이 주어질 때' 외에도 여러 가지 변과 각의 크기를 알아도 되지만 이 세 조건이 최소 조건이므로 특별히 삼각형의 결정조건이라 부른다(금종해, 이만근, 이미라, 김영주, 2007). 이 경우는 결정조건을 합동조건과 동일하게 보는 관점이라 할 수 있다. 그러나 결정조건과 합동조건을 각각 다른 성질의 조건으로 받아들인다면 삼각형의 결정조건이 최소필수성을 띤다고 하기 어렵다. 합동조건에는 6요소 중 다른 요소를 더 줘도 합동이 되지만 삼각형의 결정조건에 다른 요소를 더 주면 삼각형이 하나로 결정되지 않는다. 그러므로 삼각형의 합동조건만이 최소필수성을 띠고 있다고 볼 수 있다. 결정조건에 최소필수성이 있다고 하는 것은 삼각형의 결정조건을 합동조건과 동일시하기 때문일 것이다.

이 논문에서는 다음과 같은 사항을 밝히고자 한다.

첫째, 삼각형의 결정조건은 '세 선분이 주어질 때 ', '두 선분과 끼인 각이 주어질 때 ', '한 선분과 그 양끝 각이 주어질 때', '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'이며 이 네 개의 명제는 삼각형이 하나로 결정되기 위한 필요충분조건이라 할 수 있다.

둘째, 삼각형의 합동조건은 '대응하는 세 변이 같을 때 ', '대응하는 두 변과 끼인 각이 같을 때 ', '대응하는 한 변과 그 양끝 각이 같을 때', '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'이다. 합동조건에 6요소 중 다른 요소를 조건으로 더 줘도 합동이 되지만, 이 네 개의 명제가 최소필수성을 고려한 합동조건이라 할 수 있다. 그러므로 이 네 개의 명제는 합동이 되기 위한 충분조건이라 할 수 있다.

셋째, 삼각형의 닮음비의 조건은 '세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때', '두 쌍의 대응변의 길이의 비와 그 끼인 각이 같을 때', '대응각의 크기가 같을 때', '두 쌍의 대응변의 길이의 비와 긴 변의 대각이 같을 때'이다. 닮음조건에 6요소 중 다른 요소를 조건으로 더 줘도 닮음이 되지만, 이 네 개의 명제가 최소필수성을 고려한 닮음조건이라 할 수 있다. 그러므로 이 네 개의 명제는 닮음이 되기 위한 충분조건이라 할 수 있다.

넷째, 최소필수성은 삼각형의 결정조건이 아닌 합동조건에만 있는 성질이라고 볼 수 있다.

다섯째, 유클리드 기하를 통한 삼각형 결정조건과 합동조건의 명제 탐구 및 삼각형 결정과 합동의 혼동.

여섯째, 삼각형 결정의 작도 학습에 있어서 선분과 각의 수치화로 인한 부정적 영향.

마지막으로 결론에서는 본론의 내용을 간단하게 요약하고, 미국(Ron Tagliapietra, Kathy Pilger2000)과 일본(杉山 吉茂 平成, 18年) 등의 교과서에서는 다루지 않을 뿐 아니라 유클리드 기하에도 없는 결정조건의 학습 효과에 대한 논의와 중학 수학 7-나의 삼각형 결정・합동부분에 있어 학생들의 탐구력과 창의성 향상을 위한 학습 방향을 제시하고자 한다.

II. 본론

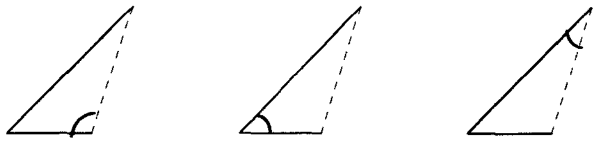
1. 삼각형의 결정・합동조건

삼각형의 결정에서 두 변(선분)과 한 각이 주어졌을 때 '두 변(선분)과 끼인 각'이 주어지면 삼각형이 하나로 결정되어 이 조건은 삼각형의 결정조건에 포함된다. 그러나 '두 변(선분)과 끼인각이 아닌 한 각'이 주어지면 두 개의 삼각형이 결정되어 삼각형의 결정조건이 될 수 없다고 중학 수학 7-나 교과서에는 기술돼 있고, 이는 당연하게 받아들여져 왔다. 모든 중학 수학 7-나 교과서에는 두 개의 삼각형이 결정되는 경우를 예시로 들고 있다. 그러나 '끼인 각이 아닌 한 각이 주어질 때'에 두 개의 삼각형이 결정되는 경우와 하나의 삼각형이 결정되는 경우, 삼각형이 만들어지지 않는 경우도 있다.

유클리드 기하 명제 4에는 '대응하는 두 변과 끼인 각이 같을 때' 삼각형이 합동된다는 내용이 있다. 그로 인해 우리들의 인식 속에는 삼각형의 결정이나 합동을 생각할 때 주어진 조건이 '두 변(선분)과 한 각'일 경우 일반적으로 한 각을 '끼인 각'과 '끼인 각이 아닌 각'으로 자리 잡고 있다. 즉, 삼각형에는 세 개의 각이 있으나 한 각은 '끼인 각', 나머지 두 각은 '끼인 각이 아닌 각'으로 구분되고 있다.

'두 변(선분)과 끼인 각이 주어졌을 때'에 '끼인 각'이란 삼각형의 세 각 중 두 변(선분) 사이에 있는 각의 위치를 지정해 준 것이라 할 수 있다. 끼인 각과 같이 다른 두 각도 위치지정을 해서 두 선분과 함께 조건으로 주어져야 각에 대한 일관성을 갖게 된다. 두 변(선분)과 한 각을 '두 변(선분)과 끼인 각'과 '두 변(선분)과 끼인 각이 아닌 각'으로 구분하는 것이 아니라 '두 변(선분)과 끼인 각', '두 변(선분)과 긴 변(선분)의 대각', '두 변(선분)과 짧은 변

(선분)의 대각'으로 나누어 생각하는 사고의 전환이 필요하다고 본다.(<그림Ⅱ-1>).



긴 변의 대각　　끼인각　　짧은 변의 대각

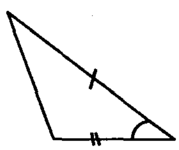
<그림 Ⅱ-1> '두 선분과 한 각이 주어졌을 때' 한 각의 위치

1) 작도를 통한 삼각형의 결정조건

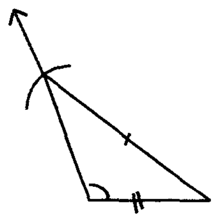
'두 선분과 한 각이 주어질 때'를 '두 선분과 끼인 각', '두 선분과 긴 선분의 대각', '두 선분과 짧은 선분의 대각' 으로 각의 위치를 지정해서 작도를 통해 삼각형의 결정을 보기로 한다.

첫째, '두 선분과 끼인 각이 주어질 때'(<그림 Ⅱ-2>).

둘째, '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'(<그림 Ⅱ-3>).

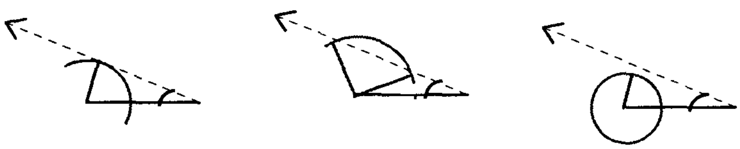


<그림Ⅱ-2> 끼인각



<그림Ⅱ-3> 긴 선분의 대각

셋째, '두 선분과 짧은 선분의 대각이 주어질 때'(<그림 Ⅱ-4>). 이 경우는 중학 수학 7-나 교과서에서 말하는 '두 선분과 한 각'이 주어질 경우로 삼각형이 두 개로 결정된다고 기술하고 있다. 그러나 이 경우에는 삼각형이 하나로, 두 개로, 전혀 결정되지 않는 경우로 나누어진다.



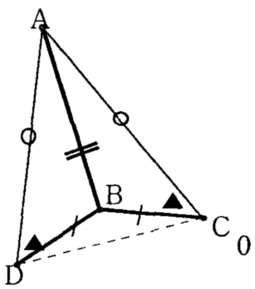
<그림Ⅱ-4> 짧은 선분의 대각

작도를 통해 본 결과 '두 선분과 끼인 각이 주어질 때'와 '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'는 삼각형이 하나로 결정되므로 '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'는 '두 선분과 끼인 각이 주어질 때'와 마찬가지로 삼각형의 결정조건이라 할 수 있다. 그러나 '두 선분과 짧은 선분의 대각이 주어질 때'는 세 가지 경우로, 삼각형이 하나로 결정되지 않는다.

2) 증명을 통한 삼각형의 합동조건

삼각형의 결정이 작도를 통한 학습으로 이루어진다면 삼각형의 합동에 대한 학습은 증명을 통해 이루어진다고 할 수 있다. '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'에 삼각형이 하나로 결정되는 것을 작도를 통해 알아보았다면 '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'의 합동은 증명을 통해 알아보기로 한다.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, 긴 변의 대각 ∠ACB가 주어진 △ABC가 있다. $\overline{AB}$, $\overline{BC}=\overline{BD}$, ∠ACB=∠ADB인 △ABD를 맞대어 그려 놓으면 <그림 Ⅱ-5>에서와 같이 $\overline{BC}=\overline{BD}$ 이므로 △BCD는 이등변 삼각형, ∠BDC=∠BCD 이다. ∠ADC=∠ACD이므로 △ADC는 이등변 삼각형이다. ∴ 대응하는 세 변의 길이가 같다. 증명을 통해 본 결과 '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'는 합동임을 알 수 있다.



<그림Ⅱ-5> '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'의 합동

직각삼각형의 'RHS' 합동은 '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'인 경우로 볼 수 있다. 직각 삼각형의 빗변이 긴 변에 해당되고, 직각이 긴 변의 대각이 된다.

합동인 도형은 닮은 도형이라 할 수 있기 때문에 '두 쌍의 대응변의 길이의 비와 긴 변의 대각이 같을 때'는 닮음조건에 포함될 수 있다.

2. 최소필수성

삼각형 결정조건은 하나의 삼각형을 만들기 위해 삼각형의 6요소 중 주어진 조건을 말한다. "최소한의 조건으로 삼각형을 결정하자"(이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은, 2007: 59). 이 문장 속에는 삼각형의 6요소 중 다른 요소를 더 줘도 삼각형이 결정될 수 있으나 삼각형을 결정할 때 꼭 필요한, 없어서는 안 되는 최소한의 조건을 삼각형의 결정조건으로 본다는 내용이 내재되어 있다고 할 수 있다. 즉, 위 문장을 통해서 삼각형의 결정조건은 최소필수성의 성격을 띠고 있다고 볼 수 있다. 이는 삼각형의 결정조건을 합동조건과 동일하게 보는 데서 오는 결과로 볼 수 있다. 그러나 결정조건과 합동조건을 각각 다른 성격의 조건으로 받아들인다면 최소필수성은 결정조건이 아닌 합동조건의 성격으로 봐야 적합할 것이다. 삼각형의 결정조건에 6요소 중 어떤 다른 조건을 더 추가하면 삼각형이 결정되지 않는다. 삼각형의 결정조건 중 '세 선분의 길이가 주어질 때'라는 조건에 한 각을 더 추가하여 주어진 조건이 '세 선분의 길이 + 한 각이 주어질 때'이면 삼각형이 하나로 결정되지 않는

다. 세 선분으로 만들어진 삼각형의 한 각이 조건으로 더 주어진 한 각의 크기와 일치한다고 할 수 없기 때문에 삼각형이 결정되지 않는다. 이때 두 각 또는 세 각을 조건으로 더 추가해도 삼각형은 결정되지 않는다. 그러나 합동에 있어서 주어진 조건이 '대응하는 세 변의 길이 + 한 각이 각각 같을 때'라면 이는 합동이 된다. 이미 존재하는 삼각형에서 대응하는 세 변이 같으면 대응하는 각도 같기 때문에 합동이 된다. 이때 두 각 또는 세 각을 조건으로 더 추가해도 합동이 된다.

삼각형의 결정조건 중 '두 선분의 길이와 끼인 각의 크기가 주어질 때'라는 조건에 한 각의 크기를 더 추가하여 주어진 조건이 '두 선분의 길이와 끼인 각 + 다른 한 각의 크기가 주어질 때'이면 삼각형이 하나로 결정되지 않는다. '두 선분의 길이와 끼인 각'으로 만들어진 삼각형의 각이 조건으로 더 주어진 한 각의 크기와 일치한다고 할 수 없기 때문에 삼각형이 결정되지 않는다. 이때 나머지 한 선분과 나머지 한 각을 조건으로 더 추가해도 삼각형은 결정되지 않는다. 그러나 합동에 있어서 주어진 조건이 '대응하는 두 변의 길이와 끼인 각 + 다른 한 각의 크기가 각각 같을 때'이면 합동이 된다. 이미 존재하는 삼각형에서 대응하는 두 변과 끼인각이 같으면, 대응하는 다른 각도 같기 때문에 합동이 된다. 이때 나머지 한 변과 나머지 한 각을 조건으로 더 추가해도 합동이 된다.

삼각형의 결정조건 중 '한 선분의 길이와 그 양끝 각의 크기가 주어질 때(두 각의 합이 2직각보다 작다)'라는 조건에 한 선분의 길이를 더 추가하여, 주어진 조건이 '한 선분의 길이와 그 양끝 각의 크기(두 각의 합이 2 직각보다 작다) + 또 다른 한 선분의 길이가 주어질 때'이면 삼각형이 하나로 결정되지 않는다. '한 선분의 길이와 그 양끝 각의 크기'로 만들어진 삼각형의 한 변이, 조건으로 더 주어진 한 선분의 길이와 일치한다고 할 수 없기 때문에 삼각형이 결정되지 않는다. 그러나 합동에 있어서 주어진 조건이 '대응하는 한 변의 길이와 그 양끝 각 + 또 다른 한 변의 길이가 각각 같을 때'이면 합동이 된다. 이미 존재하는 삼각형에서 '대응하는 한 변의 길이와 그 양끝 각'이 같으면, 대응하는 다른 변도 같기 때문에 합동이 된다. 위의 예시에서와 같이 삼각형의 결정조건에는 최소필수성이 없고 합동조건에만 최소필수성이 있다고 볼 수 있다.

3. 유클리드 기하 탐구

1) 삼각형의 결정 · 합동조건의 명제탐구

삼각형의 결정과 합동을 정확하게 이해하기 위해서는 우선 기하의 가장 근본이 되는 유클리드 기하의 48명제 중 삼각형의 결정과 합동에 관한 명제 탐구가 필요하다. 유클리드 기하에는 삼각형의 결정조건 중 '세 변의 길이가 주어질 때'라는 명제와 관련된 내용이 48명제 중 명제 22에 주어진 세 선분과 각각 같은 선분을 써서 삼각형 만들기, 이때 선분 중에서 어느 둘을 취해도 그 합은 나머지 선분보다 커야 한다는 내용이 있다(홍승표, 2005), (원대연, 2006). 그러나 삼각형의 결정조건 '두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어질 때'와 '한 변의 길이와 그 양끝 각의 크기가 주어질 때' 삼각형이 결정된다는 내용의 명제는 따로 없고, 삼각형의 합동조건과 관련된 내용만이 명제 4, 명제 8, 명제 26에 기술 되어 있다(홍승표, 2005), (원대연, 2006). 명제 4는 합동조건 '대응하는 두 변과 끼인각이 같을 때 ', 명제 8은 합동조건 '대응하는 세 변의 길이가 같을 때'에 관한 내용이다. 또 명제 26은 합동조건 '대응하는 한 변과 그 양끝 각이 같을 때'와 합동은 되지만 미국 교과서와 달리 우리나라 교과서

에서는 합동조건에 포함시키지 않는 '대응하는 한 변과 두 각이 같을 때'에 해당되는 명제라 할 수 있다. 이로써 삼각형의 결정조건 중 '두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어질 때'와 '한 변의 길이와 그 양끝 각의 크기가 주어질 때'는 유클리드 기하 삼각형의 합동에 관한 명제 4와 명제 26에서 유추한 결과로 볼 수 있다. 미국, 일본 등의 교과서에서 삼각형의 결정조건을 다루지 않고 합동조건만을 다루는 것도 이와 같은 맥락에서라 할 수 있다.

현재 중학 수학 7-나의 삼각형의 결정조건은 세 변의 길이가 주어질 때, 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어질 때, 한 변의 길이와 그 양끝 각의 크기가 주어질 때로 기술돼 있으나 이는 세 선분의 길이가 주어질 때(두 선분의 길이 합은 한 선분의 길이보다 크다), 두 선분의 길이와 끼인 각이 주어질 때(끼인각의 크기가 2 직각보다 작다), 한 선분의 길이와 그 양끝 각이 주어질 때(두 각의 합이 2 직각보다 작다), 두 선분의 길이와 긴 선분의 대각이 주어질 때(긴 선분 대각의 크기가 2 직각보다 작다)로 표현됨이 옳다고 본다.

유클리드 기하 명제 22에서도 알 수 있듯이 삼각형이 결정되기 위해서는 두 선분의 길이 합은 한 선분의 길이보다 크다는 조건이 반드시 주어져야 한다. 또 아직 성립되지 않은 삼각형의 결정조건에서 변이라고 기술하는 것은 적절하다고 보기 어렵다. 합동조건을 각각 변(Side), 각(Angle)을 나타내는 글자 S와 A를 써서 SSS합동, SAS합동, SAS합동으로 나타내기도 한다(배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열, 박동익, 우현철, 2007, p. 78). 이 예시를 통해서도 알 수 있듯이 변이라는 표현은 이미 삼각형이 만들어져있는 상태에서 사용함이 옳을 것이다.

유클리드 기하 명제 17에는 삼각형의 두 각의 합이 2 직각보다 작다는 내용이 있다. '한 선분의 길이와 그 양끝 각의 크기가 주어질 때'에 삼각형이 하나로 결정되기 위해서는 두 각의 합이 2 직각보다 작다는 조건이 반드시 주어져야 한다. 또 '두 선분과 끼인 각이 주어질 때'에 끼인 각의 크기가 2 직각이면 두 선분이 한 직선 위에 놓이게 되어 삼각형을 그릴 수 없다. 끼인 각은 2 직각보다 작은 조건으로 주어져야 한다. 여기서 '2 직각이 아닌 180° 보다 작다'라는 표현을 쓴다면 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는 작도에서 적절한 표현이라 할 수 없다.

2) 삼각형의 결정과 합동을 동일시하는 개념의 혼동.

최용준(2007)은 두 개의 삼각형이 합동임을 알아보려고 할 때 삼각형의 결정조건을 이용하면 세 변의 길이와 세 각의 크기를 모두 알아보지 않아도 두 삼각형이 서로 합동인지 아닌지를 알 수 있다고 한다. 즉 삼각형의 결정조건으로부터 합동이 얻어진다고 한다. 이는 삼각형의 결정조건과 합동조건을 동일시하는 결과로 볼 수 있다.

중학수학 7-나에 수록되어 있는 결정조건은 모두 합동조건이 된다. 그러나 미국 등의 교과서에는 합동조건으로 다루고 있으나 우리나라 중학 수학에서는 다루고 있지 않은 '대응하는 한 변의 길이와 두 각의 크기가 같을 때(SAA)'는 합동이 되지만, 결정에 있어서는 '한 선분의 길이와 두 각의 크기가 주어졌을 때' 삼각형을 하나로 결정할 수 없음을 작도를 통해 확인할 수 있다. 이와 같이 결정조건은 될 수 없어도 합동이 되는 조건이 있으므로 결정조건으로부터 합동을 알 수 있다고 하는 것은 적절하다고 할 수 없다. 이는 결정과 합동의 개념 혼동에서 오는 결과로 볼 수 있을 것이다.

4. 각과 길이의 수치화로 인한 부정적 영향

현재 중학 수학 7-나 교과서에는 삼각형의 결정조건의 작도문제에 있어서 많은 부분 선분과 각을 수치화해서 나타내고 있다

다음 중 삼각형이 하나로 결정되는 것은? (1), (4)
(1) $\overline{AB}$=6cm, ∠A=30°, ∠B=70°
(2) $\overline{AB}$=5cm, ∠B=60°, $\overline{AC}$=7cm
(3) $\overline{AB}$=3cm, $\overline{BC}$=8cm, $\overline{AB}$=4cm
(4) $\overline{AB}$=6cm, ∠B=40°, ∠C=75° (이준열 외, 2007, p. 59)

여기서 (2) 는 '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때'로 삼각형이 하나로 결정되는데, '두 변과 끼인 각'이 아니라 삼각형이 2개로 결정된다고 보고 있다. (1) 은 '한 선분과 양끝각이 주어질 때'로 삼각형이 하나로 결정된다. 그러나 (4) 는 '한 선분과 두각의 크기'가 주어진 조건으로 이는 삼각형이 결정되지 않는다. 그런데 아직 결정이 확실하지 않은 삼각형 내각의 합을 180°로 단정하고 180°에서 주어진 두 각을 빼면, 나머지 한 각을 알게 되어 (1) 과 같은 조건으로 삼각형이 결정된다고 보고 있다. 합동의 경우에는 이미 존재하는 삼각형 내각의 합이 180°임을 이용해 주어진 두 각을 빼면 한 각의 크기를 알 수 있어 결국 'SAA'가 'ASA' 합동이 됨을 알 수 있다. 결정에 있어서도 합동과 같은 방법으로 내각의 합을 이용해 결정을 알아볼 수 있다고 생각할 수도 있으나 직접 작도를 해 보면 (4) 의 경우에 삼각형이 하나로 결정되지 않음을 알 수 있다. 삼각형이 하나로 결정되는 것은 (1), (2) 라고 해야 할 것이다.

다음과 같은 조건이 주어진 두 삼각형은 같은 조건은 아니지만 삼각형 내각의 합을 이용해 두 삼각형이 합동임을 알 수 있다.△A의 조건(SAA): $\overline{AC}$=6cm, ∠B=40˚, ∠C=75˚, △B의 조건(SAS): $\overline{AC}$=6cm, ∠A=65˚, ∠C=75˚ 그러나 $\overline{AC}$=6cm, ∠B=40˚, ∠C=75˚의 경우와 같이 '한 선분과 두각의 크기'가 주어지면 직접 작도를 해 보면 삼각형이 하나로 결정되지 않음을 알 수 있다. 그럼에도, 이 조건이 삼각형을 하나로 결정할 수 있다고 하는 것은 유클리드 기하 합동에 관한 명제 중 명제 26에 나타나 있는 '대응하는 한 변과 두각의 크기가 같을 때(SAA)' 합동이 되는 것과 혼동하는 결과라 할 수 있다. 이와 같이 결정과 합동을 혼동하는 것은 작도와 증명을 통한 창의적인 학습이 아닌 각과 길이의 수치화로 인한 영향이라 할 수 있을 것이다.

III. 결론

중학 수학 교과서 7-나의 삼각형 결정과 합동의 학습에 있어서 '두 선 분과 한 각'을 '두 선분과 끼인 각'과 '두 선분과 끼인 각이 아닌 한 각'으로 구분해서 '두 선분과 끼인 각'이 주어지면 삼각형이 하나로 결정돼 결정조건이 되고, '두 선분과 끼인 각이 아닌 한 각'일 때는 삼각형이 두 개로 결정되기 때문에 결정조건이 될 수 없다고 기술돼 있다. 그러나 '두 변(선분)과 한 각이 주어졌을 때' 삼각형이 하나로, 두 개로, 하나도 결정되지 않는 경우가 있

다. 학생들이 삼각형의 결정을 정확하게 이해하도록 하기 위해서는 이 부분의 정정을 제안하는 바이다.

두 선분과 한 각을 '두 선분과 끼인 각'과 '두 선분과 끼인각이 아닌 한 각'으로 구분해 온 것은 '끼인 각'이 하나의 각을 위치 지정한 것임을 인식하지 않았기 때문이라 할 수 있다. 세 각을 각각 위치 지정해서 두 선분과 한 각을 '두 선분과 끼인 각', '두 선분과 긴 변의 대각', '두 선분과 짧은 선분의 대각'으로 조건을 주어야 이 세 개의 조건이 동등한 조건이라 할 수 있다.

'두 선분(변)과 긴 선분(변)의 대각'이 삼각형의 결정조건과 합동조건이 될 수 있음을 본론에서 작도와 증명을 통해 확인했다. 그러므로 '세 선분의 길이가 주어질 때', '두 선분과 그 끼인각이 주어질 때', '한 선분과 그 양끝 각이 주어질 때' '두 선분과 긴 선분의 대각이 주어질 때' 이 네 개의 명제가 삼각형을 결정하기 위한 필요충분조건이라고 본다. 또 삼각형의 합동조건은 '대응하는 세 변이 같을 때 ', '대응하는 두 변과 끼인 각이 같을 때 ', '대응하는 한 변과 그 양끝 각이 같을 때', '대응하는 두 변과 긴 변의 대각이 같을 때'로 볼 수 있다. 합동조건에 6요소 중 다른 요소를 조건으로 더 줘도 합동이 되지만, 이 네 개의 명제가 최소필수성을 고려한 합동조건이라고 볼 수 있기 때문에 이 명제들은 합동이 되기 위한 충분조건이라 할 수 있다. 합동인 도형은 닮은 도형이라 할 수 있기 때문에 네 개의 닮음조건 또한 닮음이 되기 위한 충분조건이라 할 수 있다.

삼각형의 결정조건에 최소필수성이 있다고 보는 것은 삼각형의 결정조건을 합동조건과 동일하게 생각하는 결과로 볼 수 있을 것이다. 합동조건에는 6요소 중 다른 요소를 더 줘도 합동이 된다. 그러나 삼각형의 결정조건에 다른 요소를 더 주면 삼각형이 하나로 결정되지 않는다. 그러므로 삼각형의 결정조건은 최소필수성의 성격이 없고, 합동조건만이 최소필수성이 있다고 할 수 있다.

유클리드 기하 합동 명제로부터 유추됐다고 볼 수 있는 결정조건은 중학 수학 7-나에서 다루고 있으나 미국(Ron Tagliapietra 외, 2000)과 일본(杉山 吉茂 平成, 18年) 등의 교과서에서는 다루지 않고 있다. 중학 수학 7-나에서 삼각형의 결정을 작도를 통해 학습하는 것은 창의적인 학습이라 할 수 있다. 그러나 수치화된 삼각형의 작도로 결정과 합동을 동일하게 생각해서 내각의 합을 이용해 결정을 알아낼 수 있다는 사고와 증명을 통해 학습 돼야 하는 합동이 결정을 통해 합동을 알 수 있다는 학습으로 이어져 결정조건의 학습효과를 기대하기 어려울 것이다. 중학 수학 7-나의 교과과정에서 삼각형 결정조건의 학습 이전에 삼각형의 6요소 중 다양한 요소를 조건으로 줘서 삼각형의 결정 여부를 작도를 통해 학생들이 직접 학습할 수 있는 과정이 필요하다고 본다. 이와 같은 과정 뒤에 위의 네 개의 명제가 삼각형의 결정조건이 될 수 있음을 학습함이 옳을 것이다.

합동조건에 있어서는 결정조건을 통해 합동을 알 수 있다는 학습을 지양하고, 삼각형의 각과 길이를 수치화하지 않은 문자와 기호로 나타낸 증명을 통해 합동조건의 명제를 이해할 수 있는 학습이 필요하다고 본다. 삼각형의 결정, 합동에 있어서 순수한 작도, 즉 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로도 충분히 학습할 수 있을 뿐 아니라 학생들이 좀 더 쉽게 삼각형의 결정과 합동을 이해할 수 있다. 수치화된 문제를 통해서가 아닌 삼각형의 결정은 작도를 통해, 삼각형의 합동은 증명을 통한 학습으로 깊은 사고와 창의력 향상을 가져올 수 있을 것이다.

참고문헌

강옥기 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 두산.

강행고, 이화영, 박성기, 박진석, 이용완, 한경연, 이준홍, 이혜련, 송미현, 박정숙 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 중앙교육진흥연구소.

금종해, 이만근, 이미라, 김영주 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 고려.

박규홍, 한옥동, 김성국, 임창우, 고성균, 김유태 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 두레교육.

박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 교학사.

배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열, 박동익, 우현철 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 한성교육연구소.

신항균 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 형설.

이종우 (2004). 기하학의 역사적 배경과 발달. 서울: 경문사.

양승갑, 박영수, 박원선, 배종수, 성덕현, 이성길, 홍우철 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 금성.

이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 도서출판 디딤돌.

전평국, 신동윤, 방승진, 황현모, 정석규 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 교학연구사.

최용준 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 천재교육.

황석근, 이재돈 (2007). 중학수학 7-나. 서울: 한서.

홍승표 (2005). 유클리드 기하 개론. 서울: 경문사.

고바야시 쇼시찌 · 원대연 옮김 (2006). 유클리드 기하에서 현대 기하로. 경기: 청문각. 杉山 吉茂 (平成 18年) 新しい數學 2.

Ron Tagliapietra, Kathyd.Pilger (2000). GEOMETRY for Christian schools, Bobjones Univursity Press.

Analysis on Triangle Determination and Congruence

Kim, Suhyun[6] · Choi, Yoonsang[7]

Abstract

The primary purpose of this treatise is to suggest the solutions as follows for the errors concerning the triangle determination and congruence in every Korean mathematics textbook for 7th graders: showing that SsA[8], along with SSS, SAS, ASA, should also be included as the condition for triangle determination, congruence and similarity; proving that contrary to what has been believed, minimality applies only to congruence and similarity but not to determination; examining related Euclidean propositions; discussing the confusion about the characteristics of determination and congruence; and considering the negative effects of giving definite figures in construction education. The secondary purpose is to analyze the significance of triangle determinant that is not dealt with in either Euclid's *Elements* or the text books in the U.S. or Japan, and suggest a way to effectively deal with triangle determination and congruence in education.

Key Words : Triangle determination, Triangle congruence, Triangle similarity, Minimality, Giving definite figures

6) Daewon Foreign Language High School, Korea (elffriend@empal.com)
7) Daewon Foreign Language High School, Korea (yoonyou2@daewon.seoul.kr)
8) Two sides and an angle opposite the longer side