한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 3, 303-322, September 2007

중학교 기하단원의 개방형문제에서 학생의 문제해결과정의 사고 특성에 관한 연구

고상숙[1] · 노지연[2]

교과서에서 사용되는 문제는 주로 정형화된 폐쇄형의 문제로 학생의 문제해결력을 육성하거나 학생의 자주적인 학습을 촉구하는데 제한적이다. 본 연구는 문제해결력을 육성하기 위해 개방형 문제를 해결해가는 과정을 폴리아의 문제해결단계를 따라 학생에게 나타나는 학습변화를 관찰하였다. 학생은 문제를 더욱 신중히 읽고 이해하는 과정에서 단순화하였고 계획수립과정에선 처음엔 익숙하지 않았지만 다양한 방법으로 해결하려는 시도와 체계적으로 되돌아보는 인지과정을 나타냈으며, 실행과정에서는 오류를 통한 계획수립의 재시도가 일어나 통제가 향상되는 과정을 보였다. 반성단계는 점검만하는 수준을 벗어나 다른 해결방법을 무엇인지 등의 반성단계의 필요성을 인식하였고 개방형문제의 실생활 적용과 일반화하는 과정을 통해 문제해결력이 더욱 향상됨을 알 수 있었다.

주요용어 : 문제해결력, 개방형문제, 폴리아의 문제해결, 메타인지

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

교육의 형태는 그 시대의 사회적 요구를 반영해 왔다. 21세기인 현재에는 새로운 사회적 패러다임이 형성되고 있다. 즉, '정보화 사회'가 그것이다. 그러면, 정보화 사회에서 요구되는 능력은 무엇인가? 급속하게 변화해 가는 상황에 유연하게 대처할 수 있는 능력, 한 마디로 '문제해결 능력'이 필요하다. 그러나 종래의 수학교실에서 주로 교과서나 참고서를 통해 학생들에게 제시되어 왔던 문제는 대부분 완성된, 정형화된 그리고 답이 오직 하나로 제한되고 폐쇄된(closed) 통상적인 문제로서, 지식, 기능의 습득에는 유효했지만 문제해결 능력을 육성하거나 학생의 흥미 관심을 고조시켜 자주적인 학습능력을 성취하기는 어렵다.

개방형 문제는 다양한 전략을 사용하여 다양한 결과에 이르는 것을 허용하고, 어떤 수학적 능력을 가진 학생들이라도 자신의 수학적 능력을 발휘할 수 있는 기회를 제공하며, 학생들의 사고를 자극하고 확산시키며 도전감을 줄 수 있다. 또한 독자적인 해결 전략을 사용하여 자주적이고 창의적인 아이디어를 사용할 기회를 제공한다(NCTM, 1999). 특히, 제7차 교

1) 단국대학교 (sangch@dankook.ac.kr)
2) 단국대학교 교육대학원 (jiyeon@hanmail.net)

육과정의 수학과 교육과정의 교수 학습 방법 면에서 제시한 바에 의하면 문제 해결은 전 영역에서 비정형 문제를 통하여 지속적으로 지도할 것을 권장하고 있다. 따라서 논증 기하가 교육 과정에 처음 도입되어 학생들이 어려움을 겪고 있다는 연구가 많이 보고되고 있는(송륜진, 2005) 중학교 2학년 학생들에게 개방형 문제를 적용해 봄으로, 증명중심의 결과만을 강조하지 않고 문제해결의 그 과정을 강조한 수업형태로의 변화를 꾀하고자 하였다. 또한, 수업 중 교사의 설명을 피동적으로 받아들이던 이제까지의 수학 학습 습관에서 탈피하여 수학학습에 능동적으로 참여하도록 유도하고자 함은 물론 학생의 반성적 사고를 촉진하기 위함이다.

개방형 문제는 학생들의 논리에 따라 여러 가지 답이 가능하므로 풀이 과정이 무엇보다 중요하며 풀이 과정에 나타난 학생들의 표현 방법은 학생들의 문제 해결 능력을 판단할 수 있는 하나의 자료가 될 수 있다. 물론, 지금까지 개방형 문제(open-ended problem)를 활용한 다양한 연구가 국내외에서 이뤄졌다. 하지만 주로 양적 연구 방법을 사용하여 개방형 문제를 활용 시 학생들의 수학적 문제 해결력, 수학적 신념 및 태도, 문제 설정 능력, 그리고 발전적 생각이 긍정적으로 변화되는 것을 조사하였다. 그러나 개방형 문제를 활용할 때, 학생은 어떠한 수학적 사고를 하며, 또 무엇을 필요로 하는지 구체적으로 알아보고 메타인지적 지식형성과정을 조사한 연구는 그리 많지 않다. 특히 각 연구에서 개방형 문제에 대한 학생들의 답안에 대한 소개가 구체적으로 이뤄지지 않았다. 따라서 Polya(1957)의 문제해결 4단계를 따라 개방형 문제를 해결하고 자신이 어떤 수학적 사고로써 문제를 해결했을 지를 추측, 검토 및 수정하는 학생의 활동을 관찰하고 분석하는 것은 충분히 연구할 가치가 있는 것으로 판단된다. 따라서 본 연구는 개방형문제의 해결과정에서 Polya의 문제해결 4단계에 따라 나타나는 학생의 사고의 특성을 조사하고, 그 결과가 수학 교육에 어떤 시사점을 가지는 지 알아보는 것에 그 목적이 있다.

2. 연구 문제

1) 개방형 문제를 해결하는 과정에 Polya의 문제해결 4단계에서 나타나는 사고는 어떤 특성을 갖고 있는가?
   (1) 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고는 문제의 이해 단계에서 어떤 특성을 갖고 있는가?
   (2) 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고는 계획의 수립 단계에서 어떤 특성을 갖고 있는가?
   (3) 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고는 계획의 실행 단계에서 어떤 특성을 갖고 있는가?
   (4) 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고는 반성 단계에서 어떤 특성을 갖고 있는가?

2) 개방형 문제 해결과정에서 학생의 신념과 메타인지적 요소는 어떻게 나타나는가?

3. 용어의 정의

(1) 개방형 문제(Open-ended Problem)

본 연구에서는 주어진 하나의 문제에 대해 유일한 정답만 존재하는 것이 아니라, 문제해결 접근 방법에 따라 풀이전략이 다양하며 여러 가지 답을 산출 할 수 있는 문제를 개방형 문제로 규정한다. 또한 개방형 과제는 아동들에게 부과된 개방형 문제를 가리키나, 본 연구에서는 같은 의미로 사용하기도 한다.

(2) 메타 인지(Meta-cognition)

백석윤(1992)은 앞에서 언급된 일차적인 문제해결의 행위를 후차적으로 감찰하거나 통제하는 메타수준의 인지활동과 이미 구성하여 갖고 있는 선입견적인 신념체계(Belief System) 그리고 정의적, 심정적 요인들을 모아서 '순수인지외적' 요인으로 정의하였다.

본 연구에서는 메타지식과 메타기능뿐 아니라 신념(belief)이나 태도(attitude) 등의 정의적인 측면까지 그 범위를 넓게 하여, 백석윤(1992)이 '순수인지외적 요인'이라고 명한 내용들을 메타인지 요소라고 한다.

4. 연구의 제한점

(1) 본 연구의 대상은 서울특별시 oo중학교 2학년 학생 한명을 대상으로 실시하였으므로 일반적으로 사회적 경제적 환경이 다른 학생들에게 동일하게 적용하는 것과 다른 학년의 학생들에게 적용하여 일반화하는데 한계를 가진다.

(2) 본 연구에서 활용한 개방형 문제는 연구자가 7차 교육과정에 따라 본 연구의 목적에 맞게 구성하였고, 중학교 기하단원의 내용만 다루었으므로 타 영역이나 단계에 활용하기 어려운 제한점을 가지고 있다.

II. 이론적 배경

개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생의 문제해결 과정을 살펴보기 위하여 이에 배경이 되는 이론들을 관련 문헌을 통해 살펴본다.

1. Polya의 문제해결과정

수학자 Polya(1957)는 그의 저서 "How to Solve It?"에서 수학적 문제해결의 사고과정을 1)문제의 이해, 2)계획의 수립, 3)계획의 실행, 4)풀이에 대한 반성의 4단계로 나누고 각 단계에서의 일반화된 발문과 전략을 제시하였다. 자세히 보면 다음과 같다.

가) 문제의 이해

(1) 미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?

(2) 조건은 만족될 수 있는가? 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가, 또는 과다한다? 또는 모순되는가?

(3) 그림을 그려보아라. 적절한 기호를 붙여라.
(4) 조건을 여러 부분으로 분해하고, 그것을 사용하여 나타낼 수 있는가?

나) 계획의 수립
(1) 이전에 이러한 문제를 본 적이 있는가? 그렇지 않으면 약간 다른 형태로 된 같은 문제를 본 적이 있는가?
(2) 관련된 문제를 알고 잇는가? 유용하게 쓰일 수 있을 듯한 어떤 정리를 알고 있는가?
(3) "미지의 것을 살펴보아라" 친숙한 문제 중 미지의 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라.
(4) "관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있거나, 그것을 활용할 수 있을까?" 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 어떤 보조 요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있을까?
(5) 문제를 널리 진술할 수 있을까? 좀 더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아가 보자.
(6) 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어보아라. 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것을 버려보아라. 그랬을 때 미지의 것은 어느 정도까지 정해지는가? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 새로운 미지의 것과 새로운 자료가 서로 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서 미지의 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 다 변형할 수 있을까?
(7) 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가?

다) 계획의 실행
(1) 풀이 계획을 실행하고, "매 단계를 점검하라."
(2) 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?
(3) 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?

라) 반성의 단계
(1) "결과를 점검"할 수 있는가? 논증 과정을 점검할 수 있는가?
(2) 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? 그것을 한 눈에 알 수 있는가?
(3) 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

2. Schoenfeld의 문제해결 과정

Schoenfeld(1980)는 "Heuristics in the Classroom Problem Solving in School Mathematics"에서 Polya의 문제해결과정을 보다 상세히 한 것이라고 말하면서 '문제의 분석', '계획'과 '탐구(난이도에 따른)', '실행', '확인'등으로 분류하고 있다. 그이 주장은 Polya의 단계의 계획수립단계를 더욱 강화한 것으로 보이며 본 연구의 수행과정에 도움을 얻기 위함이다.

1. 분석단계
(1) 가능하면 그림을 그려라.
(2) 특수한 경우를 조사하여라.
 1) 실례를 들어라
 2) 가능성 있는 범위를 조사하여라.
 3) 정수인 매개변수를 1,2,3... 순서대로 놓고 귀납적인 방법을 찾아라.
(3) 대칭성을 쓰거나 또는 일반성을 잃지 않고, 문제를 간단히 만들어라.

2-1. 계획단계
(1) 위계적으로 해결을 계획하라.
(2) 해결의 각 단계에서 무엇을 하려고 하는지, 왜 하고 있는지, 그리고 그 결과를 가지고 무엇을 하려고 하는지에 대해 설명할 수 있게 하라.

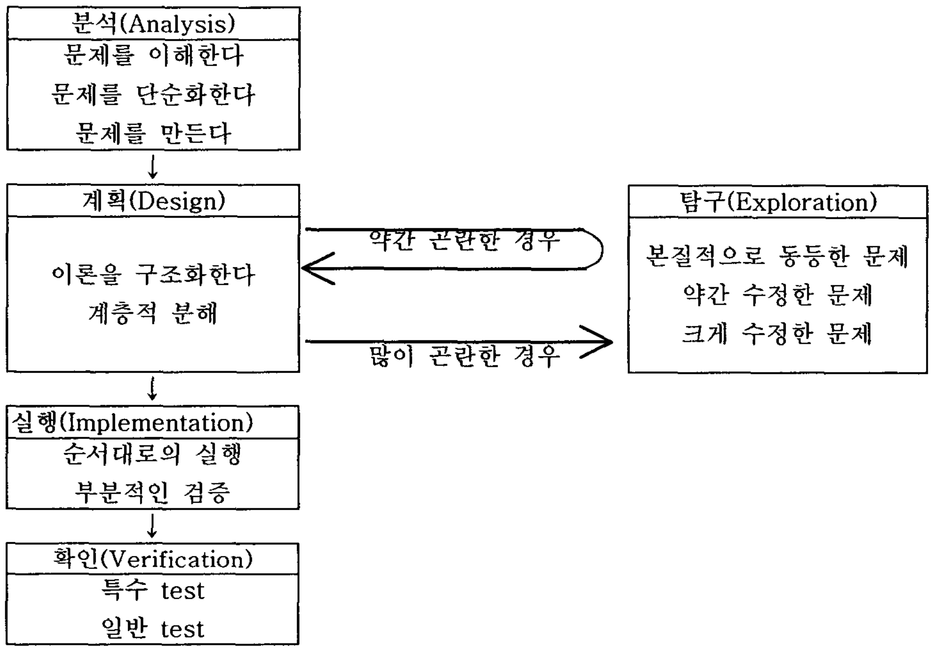
2-2. 탐구단계
(1) 여러 가지 동등한 문제들을 생각해 보아라.
 1) 조건을 동등한 것으로 바꾸어 보아라.
 2) 문제의 요소들을 여러 방법으로 결합해 보아라.
 3) 보조요소를 도입하여라.
 4) 문제들을 재구성하여라.
(2) 주어진 문제를 약간 수정한 문제를 생각하여라.
 1) 하위목표들을 세우고 그 것들을 달성하도록 해 보아라.
 2) 조건을 완화시킨 다음에 다시 그 조건을 부과해 보아라.
 3) 문제를 분해한 다음에 그 각 부분의 경우에 대해 알아보아라.
(3) 주어진 문제를 크게 수정한 문제를 생각하여라.
 1) 덜 복잡한(변수가 더 적은) 비슷한 문제를 알아보아라.
 2) 나머지 것들은 고정시킨 채 하나의 변수나 조건의 역할을 보아라.
 3) 형태, 조건, 결론 등이 비슷한 문제를 생각해 보아라; 결과와 방법 모두를 탐구해 보아라.

3. 실행단계
(1) 순서대로의 실행
(2) 부분적인 검증

4. 확인단계
(1) 다음과 같은 특수한 test를 하여라; 자료는 모두 쓰고 있는가? 합리적인 어림계산을 하고 있는가? 대칭, 차원분석, 척도 등에도 성립하는가?
(2) 다음과 같은 일반적인 test를 하여라; 다른 방법으로도 해결이 되는가? 이미 알려져 있는 사실로 변형되는가? 무엇인가 알고 있는 것을 만들 수 있는가?

Schoenfeld는 위 모델에서 탐구단계를 특히 중요시하였는데, Schoenfeld의 계획와 탐구

단계는 Polya의 계획을 세우는 단계와 같은 영역이며, 탐구 단계가 Polya의 문제해결 중심 단계라고 말할 수 있다. Schoenfeld는 Polya와 달리 일반적 전략의 중요성을 인식하고 있으며, 학생들의 인지적 특성을 특히 강조하고 있으며 정의적 특성의 전 단계인 신념의 체제도 중요시하고 있다. 그러나, Schoenfeld는 학생의 인지적인 특성에 치우쳐서 교사의 역할이나 문제 해결의 구체적인 방법은 상세하게 제시하지 않았다.



[그림 1] Schoenfeld 문제-해결 전략의 도식적 개요

위의 문제해결 과정에 따라 Schoenfeld는 수학문제해결 수행의 적절한 특성화에 필요한 지식과 행동을 자원, 발견술, 통제 그리고 신념 체계의 4가지 범주로 나누어 제시하였다. 첫 번째 요소는 자원으로, 문제에 관련 있을 수 있는 개인에 의해 소유된 수학적 지식을 말하며, 구체적으로 영역에 관한 직관과 비형식적 지식, 사실, 알고리즘적 과정, "기계적인" 비알고리즘적 과정, 영역에서 학습하기 위해 합의된 공식에 관한 이해(명제적 지식) 등을 의미한다. 두 번째는 발견술로, 익숙하지 않거나 비표준적인 문제에서 진전을 이루기 위한 전략과 기교를 말하고, 효율적인 문제해결을 위한 공식, 그림그리기; 적절한 표기를 도입하기, 관련된 문제를 탐구하기, 문제를 다시 만들기; 거꾸로 풀기, 과정을 검사하고 확인하기 등을 포함한다. 세 번째는 통제력으로, 자원과 전략의 선택과 실행에 관한 전반적인 결정을 말하고, 또한, 통제력에는 계획하기, 모니터링과 평가, 의사결정, 의식적인 메타인지 행위 등이 있다. 네 번째, 신념체계로, 개인의 "수학적 세계관"을 뜻하며, 개인에 관한, 환경에 관한, 토픽에 관한, 수학에 관한 개인행동의 일단의 결정을 포함한다.

마지막으로 Scheonfeld(1985)는 통제력과 관련하여 메타인지를 정의하였는데, 메타인지를 '자신의 사고에 대하여 마음속으로 음미하며, 사고를 관리하며, 재조직하는 것'이라 정의하였

다. 그가 메타인지를 강조하게 된 것은 학습과 문제 해결 과정에서 반성적 사고가 중요하다는 것을 인식하게 되었기 때문이었고, ‘성공적인 결과의 결핍은 문제해결에서의 경영적인 정신활동을 경시해 온 수학 교육계의 연구 경향에서 비롯된 현상’이라고 생각했다. 이상희(2005)는 교사, 학생이 적절하게 상호작용하면서 수학적 문제해결 실행의 특성화에 필요한 지식과 행동 등을 통하여 문제해결력이 향상되었고, 수학적 흥미 부여 등에 큰 도움을 주었다고 하였는데 그것은 학생이 가지고 있는 자원의 증가와 효율적인 발견술의 사용이 나타났고, 통제와 신념체계와 같은 메타인지적 요소 역시 장시간의 학생들의 상호작용을 통해 어느 정도 만족할만한 결과를 얻은 것으로 나타났다.

III. 연구방법 및 절차

본 연구는 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 사고의 특성에 대해 알아보기 위해 정성연구 방법을 이용하였다

1. 연구의 대상

본 연구의 대상은 oo중학교 2학년 학생으로 연구자가 가르치고 있는 진아라는 여학생이다. 연구가 시작되기 전에 학생에게 본 연구의 취지와 참여자의 자세에 대하여 자세히 설명하고 개방형 문제의 해결과정의 사고에 대해 관찰하기 위한 적극적인 참여의사와 동의를 얻어 연구대상으로 선정하였다. 연구 설계 시에는 자신이 개방형 문제를 잘 다룰 수 있을 지에 대한 걱정을 하였으나 개방형 문제가 자신의 학습에 도움을 줄 수 있을 것이라는 긍정적인 관심을 보였고, 따라서 본 연구자는 다양한 수학적 활동을 유도할 수 있을 것이라 생각되었다. 또한 도형의 성질은 연구대상이 학교에서 배운 내용으로 본 연구에서는 이 수학 내용에 바탕을 둔 도형의 성질에 관한 개방형 문제를 구성하였다.

2. 연구의 도구

(1) 개방형 문제의 개발 및 적용 방향

개방형 문제를 교수-학습에 적용시키기 위하여 문헌의 검토를 토대로 다음과 같은 방향 및 내용을 설정하였다. 첫째, 개방형 문제를 수학교육에 도입하는 것은 수학 교과의 분리된 한 단위로서가 아니라 기존의 수학교육과정을 보완적이고 부수적으로 사용하여 기존 수학교육의 부족한 부분을 보완하고 수학교육의 질과 학습의 효과를 좀 더 높일 수 있다. 그러므로 개방형 문제를 학생의 학습 진도에 맞추어 개념과 기본학습이 이루어진 후 응용 활용 단계에 이르렀을 때에 개방형 문제를 도입한다. 둘째, 현행 교육과정이나 수업에 지장이 없는 범위 내에서 활용할 수 잇도록 한다. 방대한 양의 학습자료 도입은 학생이나 교사에게 과중한 부담이 될 수도 있기 때문이다. 셋째, 내용은 한 가지 문제에 대한 다양한 풀이 방법을 지니며 학습내용과 관련되어 개발된 개방형 학습 자료를 이용한다.

위의 원칙을 중심으로 개방형 문제는 모두 5문제로 구성하였다. 본 연구자가 구성한 개방형 문제는 국내서적(예, 구광조 외, 2004), 학회지나, 저널, 웹사이트와 외국문헌을 참고로 작성하여 교과전문가의 조언을 통해 개발 및 수정, 보완하였다. 구성된 문제는 단원의 특성과

개발된 과제의 특성에 따라 구체적으로 조작 활동을 수반하는 것과 학생들의 논리적 사고 과정을 관찰하는 것을 포함하였다. 또한, 수준의 타당성이나 학생들의 흥미 등을 고려하였으며, 수준이 맞지 않고 문항의 진술이 난해하다고 관찰된 문제는 수정, 보완하였다. 과제의 개발에 있어서는 학생들의 수학적 사고과정과 문제해결 과정에 초점을 맞추고, 학생들이 스스로 수학의 원리를 발견하도록 하며, 학교 수학학습에서도 그 유용성을 인식할 수 있도록 하는데 초점을 두었다.

(2) 연구 내용 및 차시 구성([표 1])

차시	교과서 내용	개방형 문제와 관련된 수행한 내용
1	II.도형의 성질 (7-나 단계) 1. 정사각형의 성질	1. 방 공평하게 나눠쓰기
2	II.도형의 성질 1. 삼각형의 성질 ④ 삼각형의 외심과 내심	2. 유물 복원하기
3	II.도형의 성질 2. 사각형의 성질 ② 여러 가지 사각형	3. 여러 가지 사각형 분류 하기
4	III. 도형의 닮음 1. 도형의 닮음	4. 넓이가 2배인 사각형 그리기
5	III. 도형의 닮음 2. 닮음의 용용 ③ 삼각형의 중점정리	5. 직각삼각형의 중점연결정리 그리기

3. 자료의 수집

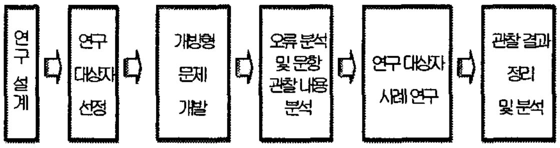
자료수집은 ① 참여 관찰 방법 ② 자기평가 대화표 ③ 면담으로 다음 표와 같이 이루어졌다.

[표 2] 자료의 수집 및 분석 도구

방 법	종류
관 찰	수업 관찰 기록, MP3 녹음.
면 담	교사 (MP3 녹음), 학생 (자기평가 대화표)
내용 분석	수학 교과서, 교사용 지도서, 학생의 학습지 답안

4. 연구의 절차

본 연구는 2006년 6월중에 8-나 단계의 학생을 위한 도형의 성질 지도, 총 5차시에서 개방형 문제를 활용하여 학생의 사고의 특성을 살펴보는 연구로 다음과 같은 순서로 진행되었다.



[그림 2] 연구 절차

Ⅳ. 연구의 결과

여기에서는 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생의 사고의 특성을 Polya의 문제해결 과정에 초점을 맞추어 연구 결과를 기술한다. 즉, Polya의 문제해결과정 이론에 근거한 문제이해단계, 계획수립단계, 계획 실행단계, 반성단계에 따른 학생들 사고의 특성을 정리하고 그 특성을 살펴보고자 한다.

1. 진아의 문제해결 과정

(1) 이해단계

개방형 문제의 해결과정 중 이해단계에서는 폐쇄형 문제(Closed Problem)의 이해단계에서 "말하는 것이 무엇인지 모르겠다"는 구체적이 아닌 추상적인 반응이 일반적이었던 것에 비해 5차시 문제 대부분에서 이와 같은 반응을 보이는 경우는 드물었고. 대부분의 학생들이 문제의 조건을 이해한 정도에 따라 다양한 정답을 제시하였다. 하지만 아이러니하게도 학생은 이해단계에서의 충실한 이해가 부족하여 겪는 어려움은 각 차시마다 관찰되었다. 1차시는 사각형의 넓이를 2등분하는 문제로 직사각형을 제시하는 것이 아니라 사각형을 변형한 문장형 문항으로 제시하였다. 문제 이해는 곧 문제를 재구성하는 것, 즉 문제의 표상을 나타낼 수 있는데, 이 문항의 경우, 학생은 적절한 그림으로 스스로 변형시켜 넓이를 2등분해야 하는 문제로 스스로 생각해 내어야 했고, 이러한 표상과정에서 어려움을 느낀다는 것을 알 수 있었다.

또한 2차시에서는 외심에 대한 문제라는 대답을 했을 때. 교사는 문제에 대해 올바른 이해를 했다고 판단했지만. 계획의 실행단계에 이르렀을 때, 외심의 성질을 이용하여 원의 중심을 구하는 문제라는 사실을 알지 못하여 당황하는 모습을 볼 수 있었다.

그리고 3차시 역시 이 문제를 닮음을 활용할 수 있는 문제라는 것을 쉽게 이해하지 못함을 알 수 있었다. 즉, 위의 예로부터 학생은 이해단계에서 문제에 대해 진정한 이해가 부족했음을 알 수 있었다.

이처럼 개방형 문제는 이해단계에서 볼 때, 학생으로 하여금 호기심 자료로 손쉽게 다가갈 수 있도록 하는 긍정적 면도 관찰되었지만 이러한 특징이 오히려 문제를 단순화하거나

구체적 사고과정을 거치지 않도록 할 수 있음도 알 수 있었다. 따라서 문제를 구성할 때에는 반드시 학생으로 하여금 문제에서 요구하는 것이 무엇인지 깊게 생각할 수 있도록 하며, 또한 구체적 사고를 할 수 있도록 하는 교사와의 발문의 상호작용을 위한 준비가 필요할 것으로 사료된다.

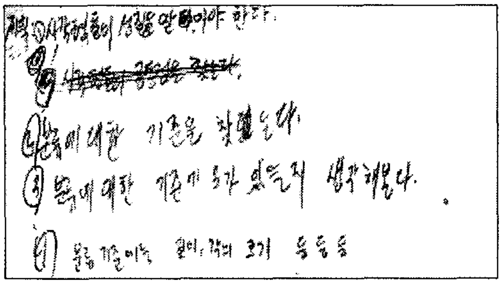
(2) 계획수립 단계

학생은 개방형문제의 해결과정 중 계획단계에서 문제를 실행하기 위한 구체적인 실행의 기준을 세우는 것이 아니라, 구체적인 나열에만 급급하는 모습이 관찰되었으며, 교사의 기대보다 계획을 세우는 것에 익숙하지 않았다. 즉, 실행단계에서 활용하기 위한 구체적인 성질만 생각해 내려고 노력할 뿐, 이전에 무엇을 분류의 기준으로 삼을 지 등에 대해서 잘 생각해 내지 못하였다. 하지만 점차 개방형 문제를 통해 계획 단계에서는 실행단계의 구체적 답안을 구하는 것이 목표가 아니며, 우선, 분류의 기준에 대해 세우고, 그 분류 기준을 가지고 실행단계에서 구체적인 답안을 적어가는 것이 자신의 사고를 더 잘 조절할 수 있으며 다양한 답안을 구할 수 있다는 메타인지적 지식에 더욱 초점을 두게 된다. 즉, 학생은 개방형 문제를 통해 자신의 사고과정을 통제할 수 있는 능력, 즉 메타인지적 지식을 가지게 되었다. 그리고 이러한 메타인지적 지식은 후의 차시에 문제해결 과정에 긍정적 영향을 미치게 됨이 관찰되었다.

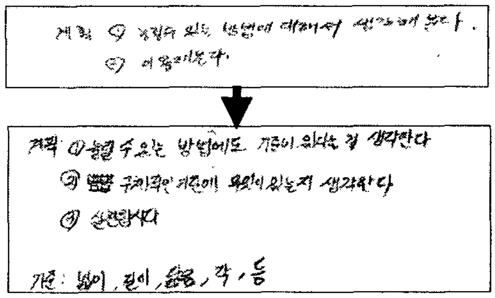
그리고 학생은 개방형 문제를 해결할 때에 자신의 계획에 있어 구체적으로 생각하거나, 자신의 계획을 명확하게 표현하는 것에 익숙하지 못함을 알 수 있다. 따라서 교사는 학생들의 계획 수립단계에서 학생들이 계획을 수립하는 과정에서 직감에 의존하지 않고 구체적으로 생각할 수 있는 기회를 제공하고, 자신의 아이디어를 구체적인 언어로 표현 할 수 있도록 권고하는 것이 중요할 것으로 생각된다. 또한 학생은 개방형 문제를 해결할 때에 급격하게 문제 실행하려는 경향이 강했다. 따라서 교사는 학생들이 계획을 실행하기 전에 자신의 계획에 대해 이해단계와 연결 지어 생각할 기회를 제공하는 것이 필요할 것으로 생각된다.

하지만 결과적으로 개방형 문제를 해결하는 과정을 통해 계획의 수립 단계에서 학생은 개방형 문제를 다양한 방법으로 해결하려고 시도하였으며, 정확한 해답을 이끌어내기 위해 다양한 전략을 생각해보고 올바른 전략을 세우는 것이 중요함을 인식하게 되었고, 사고 과정을 체계적으로 되돌아 볼 수 있는 메타인지적 지식을 가지게 되었다. 또한 본 연구에서 학생은 스스로 생각한 다양한 답을 자신이 만들어낸 그림 및 방법을 통하여 교사에게 설명하여야 하며 교사의 힌트나 발문을 잘 이해하고 여러 가지 가능성을 생각해 봐야 했다. 따라서 교사와의 대화나 자신의 답안에 대하여 나름대로 생각을 정리한 후에 신중하게 답변하는 것을 볼 수 있었다. 따라서 개방형 문제는 학생들의 공간적 문제해결 전략을 풍부하게 하고, 학생들 각자가 동일한 문제를 해결하기 위해 서로 다른 전략을 사용하면서 의사소통이 풍부해 질 수 있다고 생각된다.

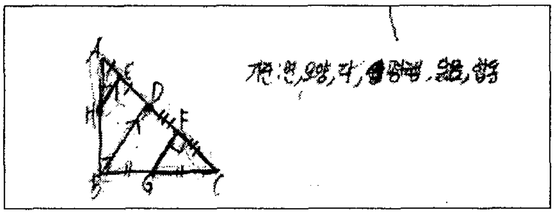
마지막으로 개방형 문제에서 자신이 생각한 계획이 매우 중요한 과정이라는 것과 "이 문제는 너도 할 수 있는 문제이다."라는 긍정적인 교사의 발언은 학생으로 하여금 문제를 대하는 태도에 매우 긍정적인 신념을 학생들에게 심어줄 뿐만 아니라, 개방형 문제의 해결과정에서 자신의 계획을 좀 더 적극적으로 수립하거나 의미를 부여하는 할 수 있도록 하는 긍정적 효과가 있었음을 알 수 있었다.



[그림 3] 진아의 계획수립단계(3차시)



[그림 4] 진아의 반성 전후의 계획수립단계(4차시)



[그림 5] 진아의 계획수립단계(5차시)

(3) 계획실행 단계

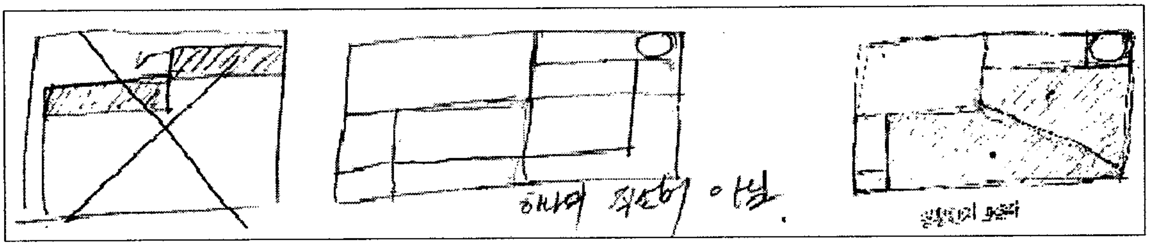
학생, 진아는 연구초반에는 교사가 제시한 문제를 낯설게 받아들이기도 하였지만, 자신들이 해야 할 것을 이해한 후 계획실행 단계에서는 적극적으로 임하는 것을 볼 수 있었다. 특히 학생은 교사에게 자신의 풀이에 대해 설명할 때에는 더욱 적극적인 태도가 관찰되었다. 그리고 교사의 힌트 내용에 대해 상당한 관심을 보였다. 특히 교사의 해결 방법만을 그대로 받아들이지 않고, 자신의 생각을 나타났으며, 또한 계획의 실행 단계와 관련된 측면에서 연구대상 학생은 개방형 문제를 구체적으로 그림을 그려 문제를 해결하거나 자신의 계획에 따라 자신의 답에 대한 이유를 써가면서 최대한 오류 없이 문제를 해결하려고 노력하는 모습이 관찰되었다.

또한 진아는 계획실행 단계에서 다시 자신이 문제의 조건과 계획을 완전히 기억하고 그 조건에 알맞은 풀이를 생각해 내는 것이 아니라. 최소한의 조건을 만족하는 해답을 찾은 후 다시 문제를 이해하는 단계, 즉 문제의 조건을 확인하고 자신의 풀이를 점검하는 과정으로 문제를 풀어나갔다.

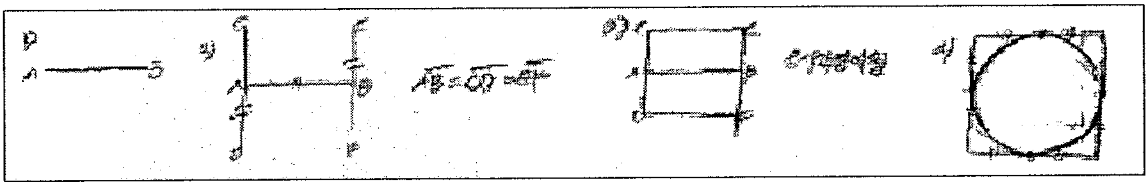
또한 계획수립 단계에서 뿐만 아니라 계획실행단계에 이르렀을 때에도 자신의 계획수립 단계의 계획대로 실행한다고 하는 것이 아니라 실행단계에서 여러 가지 오류과정을 거치면서 좀 더 구체적인 조작을 스스로 해보고 자신이 할 수 있는 수준의(여기서는 구체적 수치를 적용한) 동등한 문제를 생각해보고 계획을 실행하는 모습이 관찰되었다.

특히, 개방형 문제를 해결하는 과정에서 계획실행 단계에서 나타나는 학생의 사고에서 주목해야할 점은 첫째, 통제력에 대한 모습이다. 2차시의 문제에서 진아는 외심과 내심으로 이 문제를 풀 수 있는 충분한 자원을 가지고 있었다. 그런데 실행과정에서 외심과 내심외의 다른 풀이방법이 없을까 생각하였고 원을 그릴 수 있는 방법에 대해 다시 생각했다. 하지만

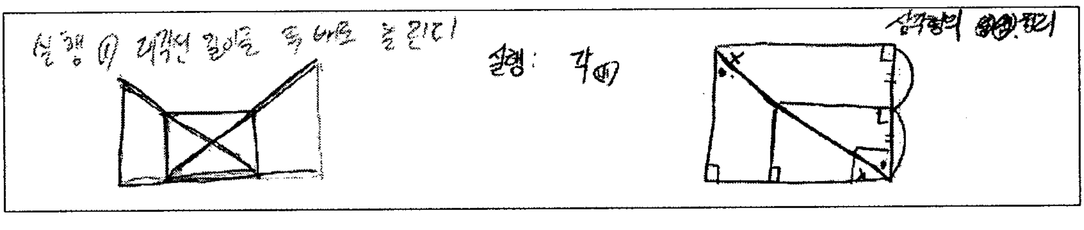
정육각형을 그리면 원을 그릴 수 있을 것이라는 막연한 추측을 가지고 계획수립 단계를 거치지 않은 채 곧바로 계획실행 단계로 들어갔고. 잘못된 계획을 실행하기 위해 많은 시간을 보냈다. 하지만 이와 같이 확인되지 않은 계획을 무작정 실행하고 실행에 실패를 자주 경험하였을 때 연구 대상자처럼 학생들은 문제에 대한 흥미를 떨어뜨릴 수 있다. 따라서 개방형 문제에서는 자신의 새로운 계획이 생각난다 할지라도 자신의 사고를 다시 계획 단계로 돌아가 타당성을 살펴볼 수 있는, 즉 Schoenfeld의 지식과 행동 요인 중 통제수준을 향상시킬 수 있도록 하는 것이 계획 실행단계에 있어서 가장 중요한 요소일 것으로 생각되었다. 그리고 이러한 결과는 “학생을 훌륭한 문제 해결자가 되도록 만드는 것은 그들이 그 잘못된 해결을 극복의 할 수 있도록 하는 것이며, 효과적인 통제의 주요한 요소는 풀이과정이 진전됨에 따라 정기적인 검증과 풀이에 대한 평가와 함께 부정적으로 평가된 시도를 그만두도록 해야 하며, 통제 매커니즘의 부재가 이 학생의 실패한 주요 요인이다” 라는 남승인외(2002)의 연구결과와도 일치하는 것이다.



[그림 6] 진아의 실행단계에서 오류(1차시)



[그림 7] 진아의 계획실행단계에서 오류(2차시)



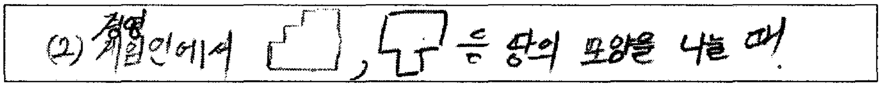
[그림 8] 진아의 계획실행단계에서 오류(4차시)와 반성 후 계획실행단계(4차시)

2차시에서 진아는 외심과 내심을 이용해서 그린다는 계획은 잘 세웠지만 구체적인 실행단계에 있어서 외심과 내심의 성질 중 각과 길이의 특징을 이용해 원의 중심을 찾아야 한다는 생각을 하지 못했다. 즉, 원을 그릴 수 있다는 것을 알고 있다 하더라도 어떠한 과정을 거쳐 원을 그릴 수 있는지에 대해서는 구체적 조작활동을 거치지 않았기 때문에 실제적으로 계획

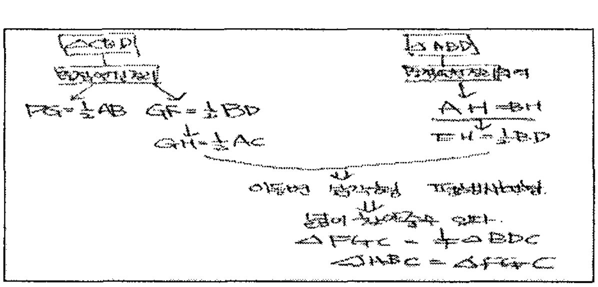
을 실행하는 단계에서 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 기하학습에서는 문제의 해결과정 중 계획의 실행단계. 즉 구체적 조작활동이 개념학습에 얼마나 중요한 역할을 하는지 알 수 있다. 그리고 계획 실행단계를 하면서 학생 스스로도 자신이 이제는 문제를 차근차근(학생의 표현에 의하면)푸는 것에 더욱 익숙하고 활용할 수 있는 방법을 배우게 되는 것도 관찰되었다. 그리고 진아는 계획실행 단계에 있어서 계획수립 단계의 상당한 영향을 받는 것이 관찰되었다. 특히 4차시의 경우는 반성단계에서 계획수립 단계의 부족한 점을 발견하였고, 계획수립과 계획실행 단계를 수정하였다. 그 과정을 살펴보면 수정 전의 계획실행 단계에서 학생은 상당히 어려움을 겪었지만, 반성단계 후 계획수립 단계에서는 실행을 어떠한 기준으로 해줄 것인지 세워주었을 뿐인데 학생은 계획실행단계를 매우 체계적으로 실행해 나갈 수 있었으며 더욱 다양한 답을 도출할 수 있었다. 그리고 마지막으로 교사는 개방형 문제를 수업에 도입하기 위해서는 예상되는 반응에 대한 조사 못지않게 오류에 대한 철저한 연구가 있어야한다고 생각된다.

(4) 반성단계

진아가 개방형 문제를 해결하는 과정에서 반성 단계에서 골고루 나타나고 있는 모습은 답에 대한 확신이 없었다는 것이다. 학생은 문제를 해결하고 나서 자신의 구한 해가 맞는지 틀리는지에 대한 상당한 관심을 가지고 있었다. 또한 진아는 개방형 문제를 통해 반성 단계의 중요성을 알게 되었고, 반성적 사고를 하는 과정으로 보기보다는 문제를 다 해결하고 난 후 검산을 하는 단계라는 생각이 많이 수정되었다. 그래서 반성단계에서도 이 문제의 다른 해결 방법은 무엇인지에 대해 생각하는 모습이 관찰되었다. 1차시와 5차시에서 학생은 자신의 답을 실생활에 적용해 보거나 일반화하는 과정을 경험하였다. 그리고 결과적으로 매우 긍정적인 반응이 관찰되었다.



[그림 9] 진아의 반성단계(1차시)



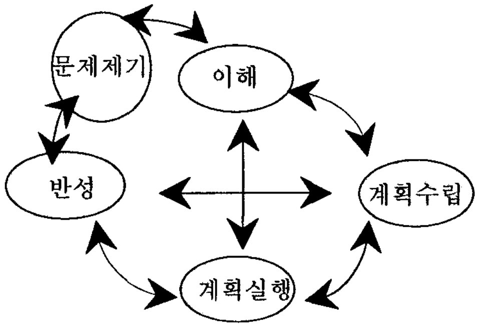
[그림 10] 진아의 반성단계(5차시)

2. 학생의 신념과 메타인지적 요소

첫째, 본 연구에서 학생은 개방형 문제의 해결 과정에서 많은 시행착오 행위로부터 전체적으로 문제의 요소들 사이의 관계를 보는 신중한 자세로 변화하고 있음이 관찰되었으며,

각 차시별로 학생은 문제해결의 순환적인 과정에서 자원을 근간으로 한 사고의 내면화가 더욱 강화되었다. 또한 개방형 문제를 해결하는 과정에서는 학생으로 하여금 [그림Ⅳ-22]과 같은 Polya의 문제해결 과정이 상호 순환하여 일어나도록 하여, 학생의 유연한 사고와 메타인지적 능력을 향상을 촉진함을 알 수 있었다. 그리고 이러한 특징은 학생으로 하여금 자신 문제 목표에 대해 더욱 명확하게 인식하게 하며, 따라서 결과적으로 이는 그들의 행동과 목표 사이의 연결성에 대한 의식을 증진시키는 결과가 되었고. 그리고 이 의식이 증대됨에 따라 학생들은 목표를 향한 그들의 진보를 좀 더 잘 모니터를 할 것으로 기대되었다.

둘째, 개방형 문제는 학생이 자신의 이해에 대한 진단과 모니터링을 할 수 있는 능력향상에 매우 긍정적 영향을 미치고 있음을 발견할 수 있었다. 그리고 이러한 능력은 그들의 수학적 성취에 대한 중요한 예측이 됨을 알 수 있다. 또한 학생은 개방형 문제를 해결하는 과정에서 자신의 생각을 조합하고 자발적으로 점검하게 되며, 이러한 모습은 자신이 문제를 통제하고 있다는 긍정적 신념과 태도를 심어주었다.



[그림 11] 개방형 문제의 문제해결과정

셋째, 개방형 문제를 통하여 여러 가지 해를 만들어 내고, 창의적 생각 풀이는 학생들로 하여금 사고의 유연성을 기를 수 있음을 알 수 있다. 특히 여러 가지 방법의 패턴을 구별하고 이를 분석하고 이를 기술하고 일반화 하는 능력들은 학생으로 하여금 수학적 주제들 사이의 관련성을 이해하도록 도울 수 있었으며, 이러한 연결성은 좀 더 추상적인 수학적 사고들의 기초로써 이용이 되는 수학적 사고의 유형을 강화시켰다고 생각된다.

면담과정에서 나타난 다양한 반응을 종합해 보면, 여러 가지 정답과 관계성을 찾는 개방형 문제에 대한 학생의 생각은 정답이 하나인 문제를 푸는 것보다 조금 어렵지만 풀기 싫다는 부정적 반응은 전혀 나타나지 않았으며 오히려 재미있고 문제를 해결하고 나니 성취감을 느낄 수 있었다고 대답하였다. 즉 학생은 자신의 능력에 따라 적절한 해답을 찾으면서 문제를 풀 수 있고 스스로 문제를 해결하는 과정에서 재미와 성취감을 느끼기 때문에 비록 조금 어렵더라도 재미있다는 반응을 보였다. 그리고 학생은 기존에 예상했던 것 보다 더 많은 정답을 이끌어 내기 위해 적극적이며 진지한 자세로 문제를 해결해 나가게 되었다고 대답하였다. 또한 스스로 다양한 생각을 하기 위해서 노력했다는 것이 학생의 반응이었다. 보통 진아는 수학 시간에 아는 문제일 거라는 추측이 들면 더 이상 문제에 관심을 기울이지 않거나, 만약 모르는 문제라는 생각이 들면 더 이상 해결하려 하지 않았던 학생이었는데, 개방형 문제는 이해단계에서부터 집중하여 문제에 대한 섣부른 판단을 보류하는 되었고, 그래서 비록 어려운 문제 같아도 스스로 해결하려는 노력도 했다는 반응도 있어 수학적 문제해결에 적극

적인 태도에 긍정적인 영향을 가지게 되었다고 대답하였다. 이러한 결과는 문성길(2000)의 개방형 교수법에 의한 수업이 새로운 사회적 패러다임인 정보화 사회에서 요구되는 문제해결력을 향상시킬 수 있는 교수법임을 시사하면서 일반적 수업보다 수학적 신념수준의 향상에 더 효과적이라 주장하고 학생들에게 문제에 대한 도전감을 주고 수학적인 힘을 길러주는 개방형 교수법에 의한 수업활동이 조성될 필요가 있다는 주장과 일치함도 알 수 있었다. 또한 문제해결 과정을 통한 개방형 문제의 해결 활동은 Polya의 문제해결 4단계를 충실하게 지켜 나갈 때 다양한 해결 전략과 올바른 해답들을 제시할 수 있음도 알 수 있었다.

차근차근 풀었다 (제일큰 범위에서 시작하여 제일 작은 범위가 되도록 차근차근 풀었다)
만약에 이렇게 풀지 않았다면 못 풀었을 것이다 (푸는 순서를 몰라서 못 풀었을 것이다. 내용을 알고있었다)
학교 서술형은 계산만 하는 문제이지만
이것은 생각을 해야만 풀 수 있었던 문제니다

[그림 12] 학생 A의 자기평가대화표(1차시)

본 연구 문제를 해결하기 위해, 각각 수업 관찰이 끝난 후, 학생 각각에 대한 면담을 하였다. 연구자는 개방형 문제활용에 대한 장, 단점, 문제해결에 대한 학생의 신념과 태도의 변화를 알기 위해 면담을 진행하였으며 그 결과는 다음과 같이 표로 요약되었다.

[표 3] 진아의 신념과 결과 (1, 2차시)

신념 1	수학적 문제가 풀린다면 항상 10분 이내에 해결된다.
신념 2	오직 천재들만이 수학을 발견하고 창조해 낼 수 있다.
결과 1	만약 학생들이 10분 이내에 문제를 해결하지 못하면 그들은 포기한다.
결과 2	만약 이러한 문제를 푸는 방법을 배우지 않았다면 이 문제는 나의 힘으로는 풀 수 없다.
결과 3	모든 문제의 해결은 선생님으로부터 얻어야 문제를 해결할 수 있다. 나에게는 이 문제를 해결할 수 있는 자원이 없다.

V. 결론 및 제언

본 연구를 하면서 가장 흥미로웠던 점은 학생들이 처음에는 개방형 문제만을 해결하는 것에 그쳤지만, 차시가 지나갈수록 결국 개방형 문제의 최대 장점이라고 볼 수 있는 다양한 해결전략과 개방적 사고를 학교의 일반 수업시간에도 적용하게 됨을 알게 되었으며, 수업태도에도 더욱 적극적 태도를 형성하게 되는 긍정적인 면이 반영된다는 것이었다. 따라서

개방형 문제를 적절하게 학생들에게 제시한다면 학생들에 자신의 문제해결 과정 중에 나타나는 오류나 잘된 점을 발견하여 그것을 앞으로의 자신의 문제해결 과정에 반영하게 되고 그로 인해 바른 문제해결을 할 수 있을 것으로 생각된다. 앞서 논의된 연구결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 요약할 수 있다.

1. 문제해결 과정에서 이해단계

폐쇄적 문제(closed problem)의 이해단계에서 "말하는 것이 무엇인지 모르겠다" 는 구체적이 아닌 피상적인 반응이 일반적이었던 것에 비해 5차시 문제 대부분에서 이와 같은 반응을 보이는 경우는 드물었고. 대부분의 학생들이 문제의 조건을 이해한 정도에 따라 다양한 정답을 제시하였다. 즉, 개방형 문제는 이해단계에서 볼 때 학생들로 하여금 문제에 비교적 쉽게 다가가게 할 수 있음을 알 수 있다. 하지만 아이러니하게도 학생은 이해단계에서의 충실한 이해가 부족하여 겪는 어려움은 각 차시마다 관찰되었다. 즉, 학생은 이해단계에서 문제에 대해 진정한 이해가 부족했음을 알 수 있었다. 이처럼 개방형 문제는 이해단계에서 볼 때, 학생으로 하여금 호기심으로 인해 손쉽게 다가갈 수 있도록 하는 긍정적 면도 관찰되었지만 이러한 특징이 오히려 문제를 단순화하거나 구체적 사고과정을 거치지 않도록 할 수 있음도 알 수 있었다. 즉, 개방형 문제를 구성할 때에는 반드시 학생으로 하여금 문제에서 요구하는 것이 무엇인지 깊게 생각할 수 있도록 하며, 또한 구체적 사고를 할 수 있도록 하는 발문의 효과에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

2. 문제해결 과정에서 계획수립단계

본 연구에서 학생은 스스로 생각한 다양한 답을 자신이 만들어낸 그림 및 방법을 통하여 교사에게 설명하여야 하며 교사의 힌트나 발문을 잘 이해하고 여러 가지 가능성을 생각해 봐야 했다. 따라서 교사와의 대화나 자신의 답안에 대하여 나름대로 생각을 정리한 후에 신중하게 답변하는 것을 볼 수 있었다. 이처럼 개방형 문제는 학생들의 공간적 문제해결 전략을 풍부하게 하고, 학생들 각자가 동일한 문제를 해결하기 위해 서로 다른 전략을 사용하면서 의사소통이 풍부해질 수 있다고 볼 수 있다.

3. 문제해결 과정에서 계획실행단계

실행단계에서 관찰된 것처럼 문제를 해결하는 과정에서 새로운 계획을 수립하게 되는 경우가 종종 발생한다. 따라서 개방형 문제에서는 자신의 새로운 계획의 필요성을 느낄 때 자신의 사고를 다시 계획 단계로 돌아가 타당성을 살펴볼 수 있는, 즉 Schoenfeld의 지식과 행동 요인 중 통제수준을 향상시킬 수 있도록 하는 것이 개방형 문제에 있어서 중요한 요소일 것으로 생각된다.

Schoenfeld는 문제해결과정에서 계획수립단계는 탐구의 사고과정과 상호적으로 작용하면서 문제해결의 계획을 세우기 위해 주어진 문제를 본질적으로 동등한 문제나 약간 수정한 문제 등으로 바꾸는 단계를 거친다고 하였다. 개방형 문제 즉, 여러 가지 계획수립과 실행이 가능한 상황이고. 계획수립단계에서 뿐만 아니라 계획실행단계에 이르렀을 때에도 자신의

계획수립단계의 계획대로 실행하는 것이 아니라 실행단계에서 여러 가지 오류과정을 거치면서 좀더 구체적인 조작을 스스로 해보고 자신이 할 수 있는 수준의 동등한 문제를 생각해보고 계획을 실행하였다.

실행을 어떠한 기준으로 할 것인지 수립단계와 관련지어 생각할 것을 권유하였을 뿐인데 학생은 계획실행단계를 매우 체계적으로 실행해 나갈 수 있었으며 더욱 다양한 답을 도출할 수 있었다. 또한, 계획 실행단계에서 오류는 반성단계에서 점검과 확인을 하는 과정에서 발견되어 다시 계획을 수립하고 실행하는 과정을 거듭하여 수정 보완하였다.

4. 문제해결 과정에서 반성단계

진아는 1차시에서 개방형 문제의 반성단계에 아직 익숙하지 않은 모습을 보였다. 즉, 학생은 개방형 문제의 특성에 맞게 반성 단계에서 문제해결단계에 따라 풀이과정의 오류를 찾거나, 더 나은 방법은 없는지 생각하는 것이 아니라. 폐쇄적 문제의 반성단계에서 그랬던 것처럼, 점검하고 문제의 해결과정을 기억하려는 모습만 관찰되었다. 하지만 연구가 진행되면서 진아는 개방형 문제를 통해 반성단계는 점검에서 더 발전하여서 자신의 풀이과정의 틀린 부분을 찾아내고 좀 더 나은 방법은 없었는지 확인하며, 더 나아가 그 문제를 일반화 및 활용할 수 있도록 하는 단계라는 사실을 알게 되었다.

또한, 개방형 문제를 통해 자신의 사고과정을 통제할 수 있는 능력, 즉 메타인지적 지식을 가지게 되었다. 학생은 개방형 문제를 다양한 방법으로 해결하려고 시도하였으며, 정확한 해답을 이끌어내기 위해 다양한 전략을 생각해보고 올바른 전략을 세우는 것이 중요하다고 생각하게 되었고, 사고 과정을 체계적으로 되돌아 볼 수 있는 메타인지적 지식을 가지게 되었다.

1차시에서 개방형 문제의 특성에 맞게 "그렇다면 실생활 문제로 만든다면 어떤 걸 만들 수 있을까?" 와 같은 발문을 통하여 자신의 답을 스스로 일반화할 수 있도록 하였다는 점은 개방형 문제의 이점을 활용하여 학생 스스로 반성단계를 잘 활용할 수 있도록 하였다고 생각된다. 개방형 문제는 자칫 여러 가지 답안을 내기 위해 애쓰는 것에 그칠 수 있다. 따라서 일반화하는 과정을 거치도록 문제를 구성한다면 자신의 풀이과정을 일반화하고 문제의 주제(이 문제에서는 사각형의 대칭성)을 스스로 학습할 수 있을 것으로 생각된다.

개방형 문제는 학생들로 하여금 비교적 다양한 사고를 유도하기 위해 그 해결시간이 폐쇄형 문제에 비해 긴 것이 일반적이다. 따라서 개방형 문제는 자신의 사고를 스스로 통제하지 못한다면 긴 시간동안 많은 답을 하지 못한다는 것을 자연스럽게 깨닫게 된다. 즉, 개방형 문제는 해결과정에서 문제해결과정의 자신의 지식과 행동 중 자원과 통제수준에 대해 돌아볼 수 있는 기회를 제공함을 알 수 있다. 학생은 반성단계에서 보통 폐쇄적 문제에서 자신의 답을 수정하는 것에 그쳤던 것에서, 자연스럽게 스스로 자신의 문제해결과정을 '무엇을 이용해서 풀었는지(자원)' '시간은 효율적으로 활용하였는지(통제수준)'등 자연스럽게 돌아보고 반성하는 모습이 관찰되었고 특히 이러한 모습은 문제해결력 향상에 많은 도움을 줄 수 있을 것이라 예상된다.

특히 반성단계의 역할 중 일반화의 단계를 할 수 있도록 하기 위해 "순서도"를 그려보도록 하였다. 삼각형의 중점정리와 그 역의 논리적 관계에 대한 순서도는 학생들 자신의 학습을 요약하는 데 도움이 되었으며 특히 기하학적 도형에 대해 학생들이 폭 넓고, 깊게 사고하는 것을 도울 수 있었음이 관찰되었다.

면담과정 나타난 다양한 반응을 종합해 보면, 여러 가지 정답들과 그 관계 등을 찾는 개방형 문에 대한 학생의 생각은 정답이 하나인 문제를 푸는 것보다 조금 어렵지만 풀기 싫다는 부정적 반응은 전혀 나타나지 않았으며 오히려 재미있고 문제를 해결하고 나니 성취감을 느낄 수 있었다고 대답하였다. 또한 스스로 다양한 생각을 하기 위해서 노력했다는 것이 학생의 반응이었다. 보통 수학 시간에 아는 문제일 거라는 추측이 들면 더 이상 문제에 관심을 기울이지 않거나, 만약 모르는 문제라는 생각이 들면 더 이상 해결하려 하지 않았던 학생이었는데. 개방형 문제는 이해단계에서부터 더 적극적으로 하게 되어 문제에 대한 섣부른 판단을 보류하게 되었고, 그래서 비록 어려운 문제 같아도 스스로 해결하려는 노력을 했다는 대답을 통해 수학적 문제해결에 적극적인 태도에 긍정적인 영향을 가지게 되었음을 알 수 있었다.

이상의 내용을 토대로 본 연구에서 미비했던 점을 중심으로 후속 연구를 위해 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 첫째, 본 연구 결과 개방형 문제를 활용함으로써, 여러 교육적 이점을 기대할 수 있다하여 이에 대한 현장 교사들의 교수-학습 방법에 대한 구체적인 제안 없이는 현재의 교실 수업에 개방형 문제를 도입할 수 없을 것이다. 교사는 수학적 지식 면에서나 수업 방식에서 뛰어난 것도 필요하겠지만, 무엇보다 중요한 것은 수업 과제에 대한 교사의 열린 관점과 학생들의 문제 해결에 대한 열린 태도, 그리고 열린 수업 분위기 조성 능력이었다. 그러므로 학생들의 표면적 실수를 수정하는데 급급할 것이 아니라 수학적 의미를 이해하도록 도와줄 수 있는 교수-학습 방법에 대한 많은 연구가 있어야 할 것으로 생각된다.

둘째, 앞에서 보았듯이 학생들의 수학적 사고 교육의 발판을 마련하기 위한 하나의 방법으로서 그리고 수학적 태도 면에서 기대할 수 있는 긍정적 영향을 고려해 보았을 때, 더욱 다양한 개방형 문제를 개발 및 교과서에 적용하기 위한 많은 연구가 필요하다. 뿐만 아니라. 학생들은 생각보다 문제해결 향상을 위한 다양한 문제를 요구하고 있었다. 따라서 현행 수학 교재의 문제를 전적으로 비판하고, 배척하는 것이 아니라, 중학교 수업에서 개방형 문제와 수학 교과서의 문제의 활용을 함께 고려하여, 이 둘의 조화를 찾아보아야 할 것이다. 즉, 수업 현장에서 개방형 문제를 활용하기 이전에 개방형 문제의 장·단점을 이해하고 이들 학습-지도에 대한 사전 준비가 충분히 필요할 것으로 생각된다.

셋째, 연구는 학생의 사고 과정을 살펴보기 위해 교사와 학생, 학생들 간의 상호작용이 매우 중요한 학습요소임을 알 수 있다. 개방형 문제를 활용한 효과적 수업을 위해서는 교실 안에서 학생들의 아이디어에 대한 비교가 이뤄지고, 좀 더 폭넓은 수학적 상황으로 진보할 수 있어야 한다. 이러한 학습 과정이 수학 수업에서 이뤄지기 위해서, 교사는 모둠 토론학습과 전체 토론학습이 병행할 수 있도록 수업 구성과 수학 협동학습의 효율성에 대한 연구가 필요하다.

넷째, 학생들의 개인적 특성에 따른 발문의 효과와 학생들이 다양한 수학적 생각을 할 수 있도록 수렴적, 발산적 발문 및 질문을 통해 적절한 비계설정에 대한 연구가 요구된다. 또한 문제해결에서 학생들의 인지적 영역 뿐 아니라 정의적 영역의 중요성이 강조되고 있는 시점에서 학생들의 정의적 영역의 차이에 따른 발문의 효과에 대한 연구 역시 이루어져야 할 것이다.

다섯째, 현재 중학교 수학 교과서에는 대부분 패쇄형 문제(closed problem)의 유형이 많다. 이러한 패쇄적 문제 활용에 대해 류시규(1995)가 논의한 것처럼, 패쇄형 문제해결 과정

에서 다양한 처리나 표현방식을 통하여, 그리고 문제 조건의 첨가 혹은 삭제 등에 따라 폐쇄형 문제를 발전적으로 처리해 볼 수 있을 것이다. 폐쇄형 중심의 현 교과서 문제의 부족한 점을 보완하여 개방형 문제화를 시도해볼 수 있다. 폐쇄형 문제를 바탕으로 교사의 개방형 발문을 통해 개방형 문제로 전환하는 과정에서 학생들에게 개방형 문제 해결의 발판을 마련하는 다양한 수학적 사고를 촉진시킬 수 있을 것이다. 이를 위해 교사는 문제유형의 구조의 차이점을 이해하고, 폐쇄형 문제를 활용하는 노력을 통해 학생의 사고의 질을 향상시킬 수 있을 것이다. 그리고 동료 교사 간에 또는 교사와 수학교육 전문가들의 합하여 학생들의 지적 수준에 대한 고려 및 비판적 시각에서의 수학 교과서의 재구성을 통하여, 다양한 개방형 문제를 개발하여 심화 과정에서 활용해 볼 수 있을 것이다.

참고문헌

남승인·류성림 (2002). 문제해결 학습의 원리와 방법. 서울: 형설출판사.

류시규 (1995). 수학교육에 있어서 탐구적 어프로치의 실천적 연구. 한국수학교육학회. 34(1), 73-81.

문성길 (2000). 개방형교수법에 의한 수학지도가 문제해결력과 신념형성에 미치는 효과. 한국교원대석사학위논문.

백석윤 (1992). 수학문제해결 과정의 순수인지외적 분석, 대한수학교육학회논문집, 2(2), 35-52.

송륜진 (2005). 수학 8-나 도형의 닮음 지도에서 협동 학습의 효과. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이상희 (2005). 특별보충과정 학생들의 문제해결수행에 관한 사례연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문

Becker, J. P., & Shimada, S. (1977). The open-ended approach : A new proposal for teaching mathematics. Reston, VA. : The National Council of Teachers of Mathematics, Lnc.: 구광조, 전평국, 박성선, 문성실(공역) (2004). 개방형 교수법. 서울 : 경문사.

NCTM (1999). Mathematics Assessment: A practical handbook. for Grades 9-12. Reston, VA: The National Council of Teachers of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1957). How To Solve it? Princeton, NJ: Princeton University Press. 우정호 역(1986). 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: (주)천재교육.

Polya, G (1980). On solving mathematical problems inhigh school. Problem solving in school mathematics(pp.1-2),1980 Yearbook of the NCTM, edited by Krulick , S. Redton, VA: NCTM,1980.

Schoenfeld, A H (1980). Heuristics in the classroom problem solving in school mathematics. Yearbook, Reston, VA: The National Council of Teachers of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1985) Mathematical Problem Solving, 대한수학교육학회, 2002년도 동계 집중세미나 제36회.

고상숙 · 노지연

A Study on Student's Processes of Problem Solving Using Open-ended Geometric Problems in the Middle School

Choi-Koh, Sangsook[3] · Noh, Jiyeon[4]

Abstract

This study is to investigate student's processes of problem solving using open-ended Geometric problems to understand student's thinking and behavior. One 8th grader participated in performing her learning in 5 lessons for June in 2006. The result of the study was documented according to Polya's four problem solving stages as follows: First, the student tended to neglect the stage of "understanding" a problem in the beginning.However, the student was observed to make it simplify and relate to what she had learned previously. Second, "devising a plan" was not simply done. She attempted to solve the open-ended problems with more various ways and became to have the metacognitive knowledge, leading her to think back and correct her errors of solving a problem. Third, in process of "carrying out" the plan she controled her solving a problem to become a better solver based on failure of solving a problem. Fourth, she recognized the necessity of "looking back"stage through the open ended problems which led her to apply and generalize mathematical problems to the real life. In conclusion, it was found that the student enjoyed her solving with enthusiasm, building mathematical belief systems with challenging spirit and developing mathematical power.

Key Words : Problem-solving, Open-ended problem, Polya, Meta-cognition

3) Dankook University (sangch@dankook.ac.kr)
4) Graduate school of Dankook University (jiyeon@hanmail.net)