

갤러킨법을 이용한 아치의 고유진동해석

Natural Frequency Analysis of Arch by Galerkin's Method

정 찬 우* 석 근 영** 강 주 원***
Jung, Chan-Woo Seok, Keun-Yung Kang, Joo-Won

요 약

근래에 이르러 컴퓨터의 발전과 더불어 유한요소법이 가장 많이 사용되고 있는 수치해석수법이 되어 왔다. 그러나 유한요소법은 각각의 구조물을 해석하는 데는 탁월한 능력을 발휘하지만 구조물을 형성하는 파라메타에 대한 영향 또는 경향을 파악하는 것에 대해서는 갤러킨법이 더욱 유효하다. 본 논문은 구조물을 형성하는 파라메타에 대한 영향·경향을 파악하는 것에 유리한 갤러킨법(Galerkin's Method)을 이용하여 고유치 해석을 수행하고 아치를 형성하는 파라메타가 고유진동응답에 미치는 영향을 고찰한다.

Abstract

Recently, with the development of computer, FEM has become the most frequently used numerical analysis method. FEM shows great ability in structures analysis, however, Galerkin's Method is more useful in grasping influence or the tendency of parameter which forms the structure. This paper perform the eigenvalue analysis using Galerkin's Method which is advantageous in grasping the influence and the tendency of parameter which forms the structure and study on the influence of parameter that forms arch on natural frequency response.

키워드 : 아치, 갤러킨법, 고유진동해석.

Keywords : Arch, Galerkin's Method, Natural Frequency Analysis

1. 서 론

대공간 구조는 극장, 스타디움, 체육관과 같이 그 내부에 기둥이 없이 대공간을 형성할 수 있도록 설계된 구조를 말한다. 대공간 구조의 거시적 형상을 살펴보면, 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 우선, 장스팬을 가지며 일반적인 라멘구조의 형상을 가지는 구조이다. 두 번째로 장스팬으로 라이즈를 가지는 구조가 있다. 일반적으로 대공간구조라 함은 두 번째의 라이즈를 가지는 구조인 아치, 배럴볼트, 돔 등을 말한다.

이와 같은 거시적 형상의 차이를 보이는 대공간

구조는 일반 중층(重層)라멘구조와 비교하여 다음과 같은 진동특성의 차이점을 가진다는 것이 보고되어 있다.

첫째, 수평지진동에 의해서도 상하진동이 발생하기 쉽다는 점이다. 특히 라이즈가 큰 구조형식에서는 그 영향이 크게 나타난다. 다음으로, Span이 길어지면 진동의 고유주기가 다소 길어지고, 구조체의 상하진동주기가 상하진동의 탁월고유주기대에 일치하게 되어 상하진동이 발생할 가능성이 있다는 점이다.

라이즈를 가지고 있는 대공간 구조들인 아치, 배럴볼트, 돔을 살펴보면, 공통적으로 주구조요소로서 아치를 내포하고 있으며, 이들은 모두 아치의 진동 특성을 내재하고 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 구조물을 형성하는 파라메타에 대

* 정희원 · 경북대학교 건설공학부 BK박사후과정, 공학박사

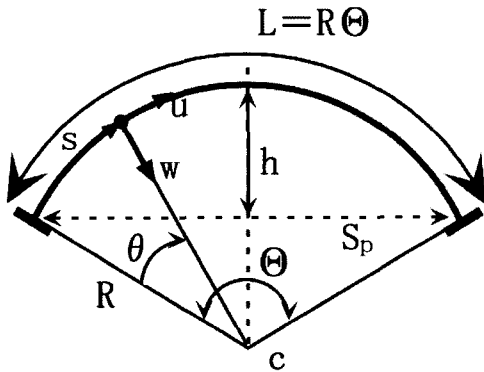
** 학생회원 · 영남대학교 대학원 건축공학과 박사과정

*** 교신저자, 정희원 · 영남대학교 건축학부 교수

Tel : 053-810-2429 E-mail : kangj@ynu.ac.kr

한 영향 및 경향을 파악하는 것에 유리한 갤러킨법(Galerkin's Method)을 이용하여 고유치 해석을 수행하고 아치를 형성하는 파라메타가 고유진동응답에 미치는 영향을 고찰한다.

2. 해석모델



〈그림 1〉 해석모델(원호아치의 제원)

〈그림 1〉은 본 연구에 사용되는 원호아치의 제원을 나타낸다. 그림 중 θ 는 개각, R 은 아치의 곡률 반지름을 나타내고 원호의 길이 L 은 $R \times \theta$ 가 된다, s 는 아치의 좌측단에서부터의 원호상의 위치, θ 는 아치의 좌측단에서부터의 개각, S_p 는 저면직경, h 는 라이즈를 나타낸다. 또한, 아치의 중립축에 대한 접선방향의 변위를 u , 아치의 곡률중심방향(z 방향)의 변위를 w 로 나타낸다

3. 해석수법: 갤러킨법(Galerkin's Method)

3.1 기초식의 무차원화

아치의 기하학적 특성 또는 동적특성을 표현하는 계수, 변위, 변형, 단면력 또는 외력을 표현하는 무차원량을 적절하게 설정하는 것은 해석상 중요하다. 여기에서는, 비편평(非偏平)아치 이론에 근거하여 기초 식으로부터 위의 각 제량(諸量)들을 정의한다. 원주방향의 길이 s 의 무차원량을 S 로 한다. 아치의 중립축에 대한 접선방향의 변위를 u , z 방향의 변위를 w 로 나타내며, 단면으로 작용하는 축력을 n , 휨 모멘트를 m 이라 하면, 이에 대응하는 무차원량을 각각 U, W, N, M 으로 한다. 이러한 무차원량들은

다음과 같이 정의된다.

$$S = \frac{\pi}{L} s, \quad U = \frac{1}{i} u, \quad W = \frac{1}{i} w \quad (1)$$

$$N = \frac{n}{n_E} = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{dU}{dS} - \frac{\Theta}{\pi} W \right) \quad (2)$$

$$M = \frac{m}{i n_E} = -\frac{\Theta}{\pi} \frac{dU}{dS} - \frac{d^2 U}{dS^2} \quad (3)$$

여기에서, i 는 단면2차반경, λ 는 주장(周長) L 로 표현한 겹보기 세장비, n_E 는 주장(周長) L 을 좌굴길이로 하는 오일러 좌굴하중(압축축력)에 해당한다. 즉,

$$i = \left(\frac{I}{A} \right)^{1/2}, \quad \lambda = \frac{L}{i}, \quad n_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4)$$

단위길이당 질량을 ρ , 점성감쇠계수를 c 로 한다. 상기의 무차원화에 의해 얻어진 다음의 양 ψ, C 를 질량 및 감쇠에 관한 진동계수라고 부르기로 한다.

$$\psi = \left(\frac{\pi^4 EI}{L^4 \rho} \right)^{1/2}, \quad C = \frac{c}{\rho} \quad (5)$$

질량에 관한 진동계수 ψ 는 고유진동수에 관련된 양이다. n 차 고유진동수를 f_n 으로 할 때 그 무차원량 F_n 은 다음 식으로 정의된다.

$$F_n = \frac{f_n}{\psi} \quad (6)$$

i 로 무차원화 한 접선 방향 및 반경방향의 지반동 변위를 U_0, W_0 로 하면, 운동방정식은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} + C \frac{dU}{dt} - \psi^2 \left(\frac{\lambda}{\pi} \frac{dN}{dS} - \frac{\Theta}{\pi} \frac{dM}{dS} \right) \\ = - \frac{d^2 U_0}{dt^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + C \frac{dW}{dt} - \psi^2 \left(\frac{d^2 M}{dS^2} - \frac{\lambda \Theta}{\pi^2} N \right) \quad (8)$$

$$= - \frac{d^2 W_0}{dt^2}$$

본 장에서는, 아치의 기하학적 계수 및 진동계수로서, 이상의 무차원화의 과정으로 도입된 개각 Θ , 결보기 세장비 λ 와 질량에 관한 진동계수 ψ 를 이용하게 된다.

3.2 갤러킨법의 적용

근래에 이르러 컴퓨터의 발전과 더불어 유한요소법이 가장 많이 사용되고 있는 수치해석수법이 되어 왔다. 그러나 유한요소법은 각각의 구조물을 해석하는 데는 탁월한 능력을 발휘하지만 구조물을 형성하는 파라메타에 대한 영향 또는 경향을 파악하는 것에 대해서는 갤러킨법이 더욱 유효하다.

식(7), (8)로부터 고유치해석을 하기 위해 감쇠력 항을 생략하면 운동방정식은 무차원화 된 수평변위 U 와 연직변위 W 의 함수로 되고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_s(U, W) = 0 \quad (9)$$

$$F_z(U, W) = 0 \quad (10)$$

고정단의 경계조건을 만족시키는 \bar{U} 와 \bar{W} 를 다음과 같이 가정하고 시행함수로 둔다.

$$\bar{U} = \sum_i X_i \sin \frac{i\pi\theta}{\Theta} \quad (11)$$

$$\bar{W} = 2 \sin \frac{\pi\theta}{\Theta} \sum_j Z_j \sin \frac{j\pi\theta}{\Theta} \quad (12)$$

식(11), (12)을 식(9), (10)에 대입하면 잔차(殘差) R_s 및 R_z 가 다음과 같이 얻어진다.

$$R_s = F_s(\bar{U}, \bar{W}) \neq 0 \quad (13)$$

$$R_z = F_z(\bar{U}, \bar{W}) \neq 0 \quad (14)$$

또한, 무게 함수는 시행함수로부터 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w_s = \sum_m \sin \frac{m\pi\theta}{\Theta} \quad (15)$$

$$w_z = 2 \sin \frac{\pi\theta}{\Theta} \sum_n \sin \frac{n\pi\theta}{\Theta} \quad (16)$$

따라서, 갤러킨법에 따른 기본식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_v R_s w_s ds = 0 \quad (17)$$

$$\int_v R_z w_z ds = 0 \quad (18)$$

$X_i \Rightarrow X_i e^{i\omega t}$, $Z_i \Rightarrow Z_i e^{i\omega t}$ 로 치환하고 식(17), (18)식을 미정계수 벡터 X_i, Z_i 에 관하여 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Z_i \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$- \left(\frac{w}{\psi} \right)^2 \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

여기에서,

$$A_{11} = - \frac{(\lambda^2 + \Theta^2)}{\pi^2} \sum_i i^2 SS(i, m) \quad (20)$$

$$A_{22} = \sum_i \frac{\Theta}{\pi} \left[i_m \left\{ \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 + i_m^2 \right\} SS(i_m, m) - i_p \left\{ \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 + i_p^2 \right\} SS(i_p, m) \right] \quad (21)$$

$$A_{21} = - \sum_i \frac{\Theta}{\pi} i \left\{ i^2 + \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \right\} CCM(i, m_m, m_p) \quad (22)$$

$$A_{22} = \sum_i \left[\left\{ i_m^4 + \frac{(\Theta\lambda)^2}{\pi^4} \right\} CCM(i_m, m_m, m_p) \right. \\ \left. - \left\{ i_m^4 + \frac{(\Theta\lambda)^2}{\pi^4} \right\} CCM(i_p, m_m, m_p) \right] \quad (23)$$

$$B_{11} = - \sum_i SS(i, m) \quad (24)$$

$$B_{22} = \sum_i \{ SS(i_m, m_m, m) \\ - CC(i_m, M_p) - CC(i_p, m_p) \} \quad (25)$$

$$i_m = i - 1, \quad i_p = i + 1 \quad (26)$$

$$m_m = m + 1, \quad m_p = m + 1 \quad (27)$$

$$SS(a, b) = \int \sin as \sin bs \, ds \quad (28) \\ = \frac{\pi}{2} \{ \delta(a-b) - \delta(a+b) \}$$

$$CC(a, b) = \int \cos as \cos bs \, ds \quad (29) \\ = \frac{\pi}{2} \{ \delta(a-b) + \delta(a+b) \}$$

$$CCM(a, b, c) = CC(a, b) - CC(a, c) \quad (30)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (31)$$

식(19)를 만족시키는 $(w/\psi)^2$ 과 $\{X_i, Z_i\}^T$ 를 구하는 고유치 문제가 된다. 식(19) 가운데 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}$ 및 B_{22} 는 개각 θ 와 결보기 세장비 λ 의 함수이기 때문에 θ 와 λ 가 결정되면, 무차원 고유진동수 $(w/\psi)^2$ 와 고유진동 모드 $\{X_i, Z_i\}^T$ 는 다른 구조 파라메타에 관계없이 동일한 값을 가지게 된다. 즉, 같은 고유진동특성을 가진다는 것을 알 수 있다.

<표 1>에는 $\lambda = 200, f_1 = 1$ Hz 로 한 모델시리즈에 대하여 개각 θ 의 설정에 따른 아치의 질량, 기하학적 제량(諸量)을 보인다. f_1 을 2Hz, 3Hz 로 한 모델에서는 f_1 을 2배, 3배로 설정하는 것에 대하여 단위길이당 질량이 1/4, 1/9로 감소한다. 고차고유진동수 f_i 및 ψ 의 값은 f_1 의 변화에 따라 2배, 3배가 되고 따라서 무차원고유진동수 F_i 는 1차 고유진동수 f_i 의 값에 따라 변하지 않는다. 고유진동수가 1Hz 이외의 모델에 관해서는 이상의 규칙성으로부터 여기에서는 생략하였다. <표 1>에서 A는 비대칭 모드, S는 대칭모드를 나타낸다. 유한요소법에 따른 결과와 비교하면 고차까지 같은 고유진동수를 보이는 것을 알 수 있다.

<표 1> 해석 모델의 제원 및 4차까지의 고유진동수 (갤러킨법에 따름)

모델	Θ (deg)	Sp	h	h/Sp	λ (cm)	ρg	ϕ	f_1 Hz F1 $F_{1,AP}$	M1	f_2 Hz F2 $F_{2,AP}$	M2	f_3 Hz F3 $F_{3,AP}$	M3	f_4 Hz F4 $F_{4,AP}$	M4
r200s30f1	30	3.9	0.25	0.07	1.96	30.77	1.02	1 0.982 1.033	A	1.35 1.326 1.82	S	2.15 2.107 3.30	S	3.26 3.202 4.67	A
r200s60f1	60	7.5	1	0.13	3.93	7.18	1.05	1 0.949 0.967	A	1.78 1.685 1.76	S	3.30 3.137 3.21	S	3.34 3.167 4.61	A
r200s90f1	90	10.6	2.2	0.21	5.89	2.87	1.11	1 0.9 0.9	A	1.88 1.694 1.71	S	3.45 3.109 3.12	A	4.60 4.14 4.55	S
r200s120f1	120	13	3.75	0.29	7.85	1.40	1.19	1 0.839 0.833	A	1.98 1.657 1.66	S	3.62 3.033 3.03	A	5.24 4.393 4.49	S
r200s150f1	150	14.5	5.6	0.38	9.82	0.76	1.30	1 0.77 0.767	A	2.08 1.602 1.60	S	3.83 2.947 2.94	A	5.71 4.397 4.43	S
r200s180f1	180	15	7.5	0.5	11.78	0.43	1.43	1 0.699 0.7	A	2.20 1.534 1.55	S	4.08 2.852 2.85	A	6.22 4.345 4.37	S

4. 고유진동 모드의 특성

<표 1> 중에 M_n 은 모드의 분류를 나타낸다. 분류 기호 A, S는 각각 비대칭 모드, 대칭 모드를 나타낸다. <그림 2>는 FEM해석에 따른 4차까지의 고유진동모드를 나타낸다. 여기에서는 비대칭의 1차 및 2차, 대칭의 1차 및 2차로 분류하고 있다. 여기에서 나타낸 각 차수는 <표 1>에 나타낸 것과 같으며 θ 가 작을수록 모드의 교대가 급격히 발생한다. 각 모드 그림의 상단은 수평변위성분을 하단은 연직변위성분을 나타낸다. 고유진동 모드는 개각이 동일하면 중량분포에 상관없이 동일한 형태의 모드가 된다. 또한, 각 고차 고유진동수의 1차 고유진동수에 대한 비는 같게 된다.

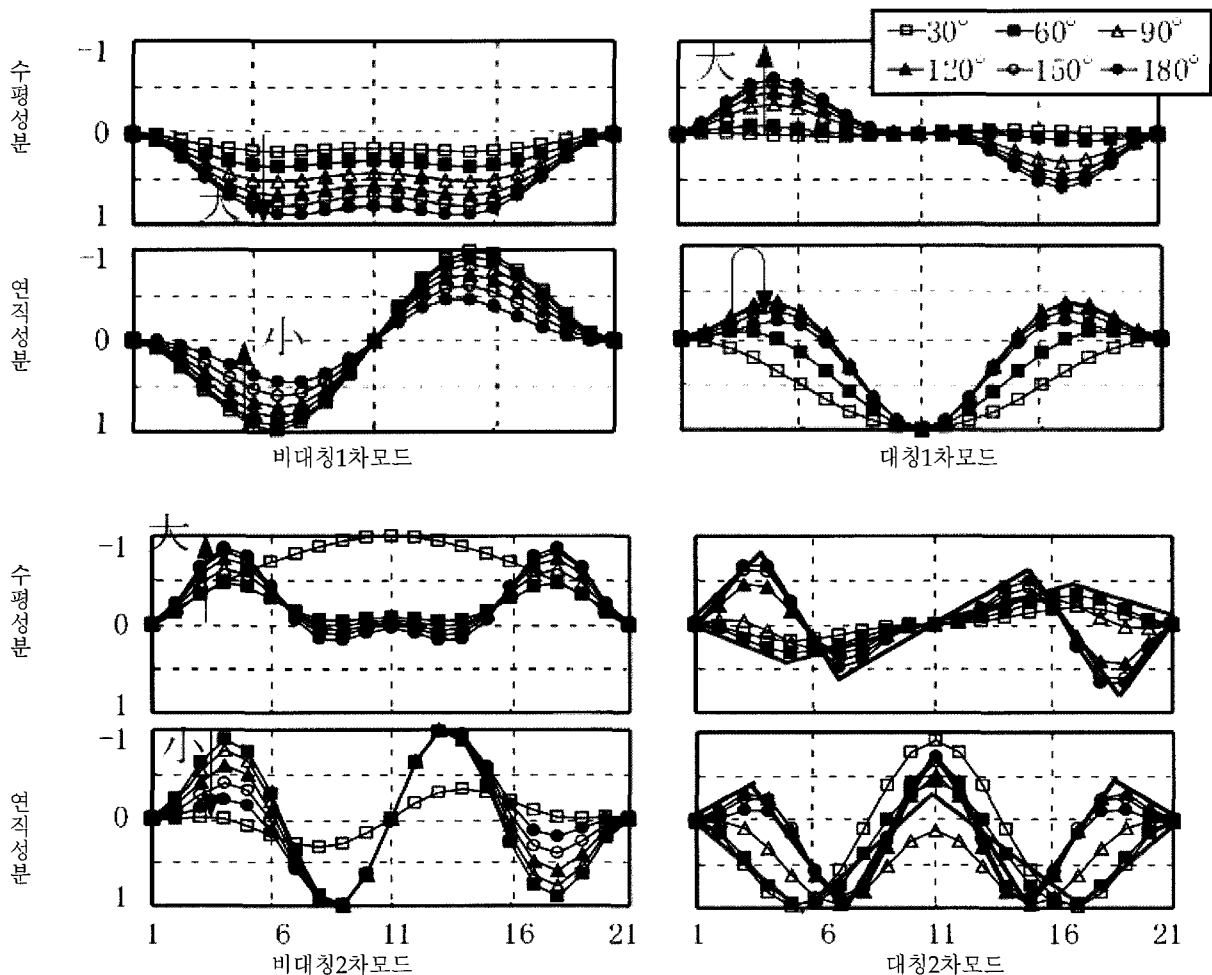
비대칭 1차 및 대칭 1차 모드에서는 θ 가 커질수록 수평변위성분의 진폭이 증가하고 연직변위성분

의 진폭이 감소하는 경향을 보이고 있다. 개각이 90° 이상이면, 각 차수의 모드형은 산과 골의 수의 의미로 같게 된다. 단, 개각에 따라서 모드를 구성하는 수평성분과 연직성분은 그 구성비율이 변화한다. 이 같은 진동특성은 입력지진동 각각의 진동수특성과 대응하여 아치의 지진응답특성에 영향을 미치지만 대체적으로는 일정한 경향을 가질 것이라는 것은 예상가능하다.

5. 진동수 특성

식(7), (8)에서 보인 기초식을 해석적 근사해법으로서 갤러킨법을 적용하여, λ 와 θ 를 변수로 한 무차원고유진동수를 구했다. 식(11)의 \bar{U} 와 식(12)의 \bar{W} 의 가정으로 사용한 항수(項數)는 각각 20항이다.

<그림 3>는 λ 를 변수로 한 4차까지의 무차원 고



<그림 2> 고유진동모드 분포

유진동수와 θ 의 관계를 나타낸다. 검은색 실선은 1차, 적색 파단선은 2차, 녹색 실선은 3차, 파란색 파단선은 4차의 무차원 고유진동수를 나타낸다. 각 λ 의 값에 대하여 곡선은 특정한 θ 의 범위에서 크게 변화하고 아울러 진동모드도 변화한다. 예를 들면, 1차에 관해서는 θ 가 극히 작은 범위에서 대칭 모드(S)이지만, θ 가 크게 되면 급격히 무차원 고유진동수가 커지면서 비대칭 모드(A)로 변화한다. 이 변화의 정도는 λ 가 클수록 심하고 λ 가 작게 되면 완만하게 된다. 크게 변화하는 θ 의 범위 밖에서는 곡선은 λ 에 상관없이 변화가 극히 적은 곡선으로 급속도로 접근(漸近)한다. θ 가 작은 범위 즉 무차원 진동수가 크게 변화하는 범위의 곡선은 차수가 하나 작은 곡선 θ 가 큰 범위의 점근선의 연장위에 있다. 이 경향은 1차와 2차의 곡선 군을 살펴보면 확실히 알 수 있다. <그림 3>에서 λ 및 θ 가 크다고 가정하면 무차원 고유진동수 F_n 은 거의 λ 와 거의 상관없이 변화가 아주 적은 상태가 되므로 θ 의 1차 함수로 근사 가능하다는 것을 알 수 있다. 이에 의거하여 4차까지의 F_n 의 근사 평가식을 다음과 같이 작성했다.

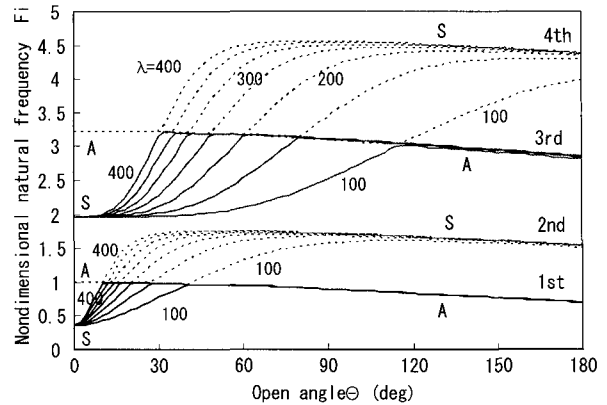
$$F_1 = -0.40 \frac{\theta}{180} + 1.10 \quad (32)$$

$$F_2 = -0.32 \frac{\theta}{180} + 1.87 \quad (33)$$

$$F_3 = -0.54 \frac{\theta}{180} + 3.39 \quad (34)$$

$$F_4 = -0.36 \frac{\theta}{180} + 4.73 \quad (35)$$

<그림 3>에 이 근사식들을 파란색 실선으로 나타내었다. 적용범위는 차수, θ 및 λ 에 따라 다르지만, 저차 일수록 그리고 개각이 커질수록 유효범위가 확대되는 것을 알 수 있다. 해석 모델에 대한 고유치 해석은 FEM 해석으로도 행하고 서로 다른 해석 방법에 의한 해의 정합성을 검증하였다. <표 1>에는 각 모델에 대한 FEM 해석으로부터 구해진 4차까지의 고유진동수 f_i 를 상단에 표시하고, 질량에 관한 진동계수 ψ 에서 구해지는 무차원 진동수 F_n 을



<그림 3> 겹보기세장비의 변화에 따른 4차까지의 무차원고유진동수

중단에 표시하였다. 그리고 하단에 표시한 F_n, AP 는 식(32)부터 식(35)에 보이는 F_n 의 근사 평가식으로부터 얻어지는 값이다.

6. 결 론

본 논문에서는 갤러킨법(Galerkin's Method)을 이용하여 고유치 해석을 수행하고 아치를 형성하는 파라메타가 고유진동응답에 미치는 영향을 고찰하였으며 이상을 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 1) 개각 θ 와 겹보기세장비 λ 가 결정되면 무차원 고유진동수와 고유진동 모드는 다른 구조 파라메타에 관계없이 동일한 값을 가지게 된다. 즉, 같은 고유진동특성을 가진다.
- 2) 고유진동 모드는 개각이 동일하면 중량분포에 상관없이 동일한 형태의 모드가 된다. 또한, 각 고차 고유진동수의 1차 고유진동수에 대한 비는 같게 된다.
- 3) 비대칭 1차 및 대칭 1차 모드에서는 θ 가 커질수록 수평변위성분의 진폭이 증가하고 연직변위성분의 진폭이 감소하는 경향을 보인다.
- 4) 각 λ 의 값에 대하여 곡선은 특정한 θ 의 범위에서 크게 변화하고 아울러 진동모드도 변화한다. 변화의 정도는 λ 가 클수록 심하고 λ 가 작게 되면 완만하게 된다.
- 5) λ 및 θ 가 크다고 가정하면 무차원 고유진동수 F_n 은 거의 λ 와 거의 상관없이 변화가 아주 적은 상태가 된다.
- 6) 4차까지의 무차원고유진동수 F_n 의 근사 평가식

을 작성하고 그 근사식의 타당성을 보였다.

감사의글

본 연구는 건설교통부 첨단도시개발사업의 연구비 지원(과제번호#'06 R&D B03)에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

1. 셀·공간구조의 자연재해시 비선형 거동과 그 억제대책, 平成 9 年度 교토대학 방재연구소 공동연구집회, 교토대학 방재연구소, 1997.10
2. 공간구조의 내진성능·평가를 어떻게 진척시켜야 하는가?, 平成 10 年度 교토대학방재연구소 공동연구집회, 교토대학 방재연구소, 1998.10
3. 山田大彦, 鄭 讚愚, 아치의 정적 진동력의 평가에 관한 연구, 平成 12 年度 교토대학 방재연구소 공동연구집회 논문집, pp.167- 178, 2000
4. 加藤史郎, 中澤祥二, 高鑫, 大Span 아치 구조의 지진시 응답성상의 분석과 정적지진력의 추정, 구조공학 논문집 Vol.48B, 23-36, 2002