

< 논문 >

바이스펙트럼 해석에 의한 카오스 신호의 비선형성에 관한 연구

이해진* · 이경태* · 박영선** · 차경준** · 박문일*** · 오재응†
 (2006년 7월 22일 접수, 2007년 7월 19일 심사완료)

A Study on the Nonlinearity of Chaotic Signal by Bispectral Analysis

Hae-Jin Lee, Gyeong-Tae Lee, Young-Sun Park,
 Kyung-Joon Cha, Moon-Il Park and Jae-Eung Oh

Key Words : Bispectrum(바이스펙트럼), Bicoherence(바이코히어런스), Nonlinearity(비선형성), Chaotic Signal(카오스 신호), Logistic Equation(로지스틱 방정식)

Abstract

During thirty years, deterministic chaos has moved center stage in many areas of applied mathematics. One important stimulus for this, particularly in the early 1970s, was work on nonlinear aspects of the dynamics of plant and animal populations. There are many situations, at least to a crude first approximation, by a simple first-order difference equation. Past studies have shown that such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behavior, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. But higher-order spectral analyses of such behavior are usually not considered. Higher-order spectra of a signal contain important information that is not present in its power spectrum. So, if we find the spectral pattern and get information from it, it will be able to be used effectively in so many fields. Hence, this paper uses auto bicoherence and bicoherence residue which are sort of bispectrum. Applying these to behavior of logistic difference equation, which is typical chaotic signal, the phenomenon of phase coupling and the appearance of frequency band can be analyzed. Such information means that bispectral analysis is useful to detect nonlinearity of signal.

기호설명

- $B_{xxx}(f_1, f_2)$: 자기 바이스펙트럼
- $B_{xyy}(f_1, f_2)$: 상호 바이스펙트럼
- $C_{xxx}(f_1, f_2)$: 자기 바이코히어런스
- $C_{xyy}(f_1, f_2)$: 상호 바이코히어런스
- $BR(f_1, f_2)$: 바이코히어런스 잔여

1. 서론

자연현상에서 흔히 관찰되는 여러 현상들이 오랜 노력에도 불구하고 규명하기 곤란했으나, 로렌츠(Edward N. Lorenz)의 연구⁽¹⁾ 이후 자연의 복잡성 속에 숨어 있는 규칙성을 찾고자 하는 연구가 매우 활발해졌다. 비선형시스템에 대한 이러한 새로운 발견으로 인해 물리적 시스템에 대한 카오스 신호의 프랙탈 차원(Fractal dimension)과 리아프노프 지수(Lyapunov exponent)를 측정함으로써 결정론적 카오스(deterministic chaos)를 정량화할 수 있게 되었다. 그러나 이러한 방법들을 통해서 카오스 신호를 정량화할 수는 있지만 주파수 성분 분

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
 E-mail : jeoh@hanyang.ac.kr
 TEL : (02)2220-0452 FAX : (02)2299-3153

* 한양대학교 대학원 기계공학과

** 한양대학교 수학과

*** 한양대학교 산부인과학교실

석 및 위상결합 정보는 알 수 없다. 비선형 시스템에서는 신호로부터 보다 많은 정보를 얻기 위해 2차 푸리에 변환 이상의 해석이 요구되며, 고차스펙트럼에 의해 신호의 주파수 성분 사이에서 비선형적으로 발생하는 위상결합을 검출하거나 비선형 신호의 특징을 분석할 수 있다.⁽²⁾ 고차스펙트럼 중에서 바이스펙트럼(Bispectrum)은 파워스펙트럼(Power spectrum)보다 한 차원 높은 분석법으로서 신호의 비선형 위상 결합을 반영하여 신호를 발생하는 계의 메커니즘을 이해하는데 도움이 되며,⁽³⁾ Hinich(1982)⁽⁴⁾의 논문 이래로 많은 연구가 진행되어 신호의 비선형성을 검출하는데 유용하게 사용되어 왔다.

본 논문에서는 대표적인 카오스 신호인 로지스틱 방정식의 거동에 자기 바이코히어런스(Auto Bicoherence) 및 바이코히어런스 잔여(Bicoherence Residue)를 적용하여 매개변수 변화에 따른 위상결합 정보 및 생성된 주파수대역을 분석함으로써 바이스펙트럼 해석법이 카오스 신호를 해석하는데 유용함을 확인하고자 한다.

2. 카오스 이론

2.1 카오스 이론의 개요

공학적인 측면에서 볼 때 카오스 이론은 결정론적 비선형 동역학 계(deterministic nonlinear dynamic system)를 다루는 학문이다.⁽⁵⁾ 카오스 이론의 창시자는 프랑스 수학자 푸앵카레(H. Poincaré)로, 그는 간단한 결정론적 방정식에서 예측 불가능한 비결정론적 해를 얻어냄으로써 결정론적 시스템은 예측 가능하다는 고전적인 개념을 뒤집어 놓았다.

로렌츠는 1963년 그의 논문 '결정론적인 비주기성 흐름(Deterministic Nonperiodic Flow)'에서 '초기조건에 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)' 즉 '나비효과'를 발견하여, Fig. 1의 로렌츠 끌개(Lorenz attractor)라 불리는 걸로는 무질서해 보이지만 내면에는 놀라운 규칙성을 갖고 있는 현상이 존재하고 있음을 밝혔다.⁽¹⁾

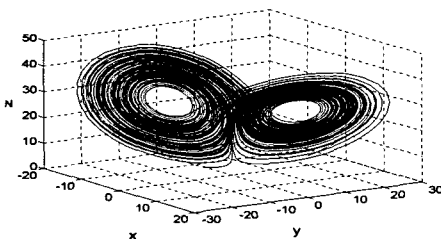


Fig. 1 Lorenz attractor

요크(James A. Yorke)는 1975년 결정론적 비선형 동역학 계에서의 복잡한 현상을 '카오스(Chaos)'라고 처음 정의하였다.⁽⁶⁾ 로버트 메이(Robert M. May)는 1976년 생물의 개체 수 변동을 모델링한 로지스틱 방정식으로부터 주기배가분기(period doubling bifurcation)와 카오스를 발견하였고,^(7,8) 파이겐바움(Mitchell J. Feigenbaum)은 로버트 메이의 연구를 바탕으로 '보편성이론(Universal theory)'을 발표하였다.⁽⁹⁾ 이러한 성과들을 바탕으로 카오스 이론은 여러 분야에서 응용되기 시작하였으며, 최근 컴퓨터의 처리 능력 향상과 응용기술의 발달로 공학분야에서 새롭게 부각되고 있다.

2.2 주기배가분기(period doubling bifurcation)

요크는 로렌츠의 3연립 미분방정식을 사용한 연구에서 3개의 변수 중 변수 하나의 움직임에만 주목하여 보았을 때 그 변수의 최대값의 변동이 실제로는 1차원 사상에 의해서 생성된다는 사실을 밝혀냈다. 로버트 메이가 시간의 변화에 따른 동물의 개체 수 변화를 구하는 간단한 식을 통하여 요크의 논문의 구체적인 연구 결과를 발표하였다. 이에 의하면 개체 수 변화는 현재의 개체 수와 증가율, 그리고 자연 감소율 등을 종합해서 다음 단계의 개체 수를 계산하는데, 이 식을 로지스틱 방정식(Logistic difference equation)이라고 하며 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n) \quad (1)$$

식 (1)에서 매개변수 r 은 개체 수의 증가율이며 X_n 은 현재의 개체 수, X_{n+1} 은 다음의 개체 수이다. 개체 수는 0과 1 사이로 나타내야 하는데 1은 개체의 최대 수를 나타내고 0은 전멸을 나타낸다. Fig. 2는 매개변수 r 에 따른 개체 수의 변화를 나타낸 파이겐바움 분기도(Feigenbaum diagram)이다.⁽¹⁰⁾ 그리고 매개변수 r 에 따른 개체 수 변동에 관한 특징을 정리하여 Table 1에 나타내었다.

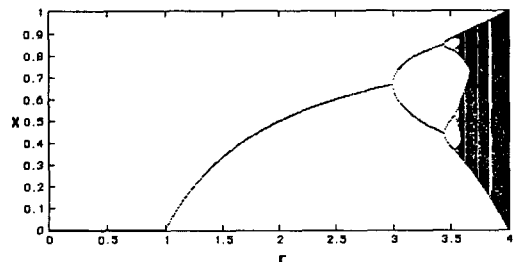


Fig. 2 Feigenbaum diagram

Table 1 Explanation of Feigenbaum diagram

r	X_n
$0 < r \leq 1$	0 으로 수렴.
$1 < r \leq 2$	$1-1/r$ 로 수렴.
$2 < r \leq 3$	진동하며 $1-1/r$ 로 수렴.
$3 < r \leq 3.449489 \dots$	2 주기에 접근.
$3.449489 \dots < r \leq 3.5699456 \dots$	2^2 주기, 2^3 주기, 2^4 주기가 되고 $3.5699456 \dots$ 에 접근하면 2^∞ 가 됨.
$3.5699456 \dots < r \leq 4$	카오스가 됨.

2.3 로지스틱 사상(Logistic map)

식 (1)을 가시화하는 하나의 방법은 수평축에 입력치를 기입하고 수직축에 출력치를 기입하면서 그래프를 그리는 것이다. 이와 같이 로지스틱 방정식을 X_n 에서 X_{n+1} 로의 위상공간으로 재구성하여 나타낸 것이 로지스틱 사상이다.⁽⁷⁾

Fig. 3 은 Table 1 의 각각의 매개변수 r 및 임의의 X_1 에 대하여 $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ 인 시계열 및 로지스틱 사상을 나타낸 것이다. 여기서 0 에서부터 4 사이의 값을 취하는 r 은 그 포물선의 기울기를 결정한다. 그리고 방정식의 거동은 포물선의 기울기, 즉 비선형의 정도에 민감한 특성을 보인다.⁽⁹⁾

(a)에서 $0 < r \leq 1$ 일 때, 포물선이 너무 낮아서 개체 수가 완전히 소멸되어 가는 과정을 보여준다. 즉 시작할 때의 개체 수가 얼마든 간에 결국에는 완전히 없어진다.

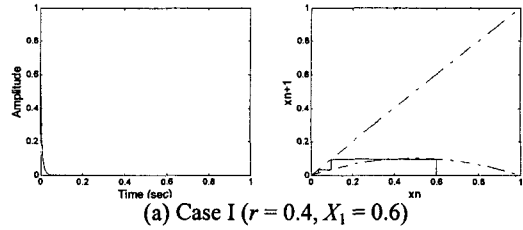
(b)와 (c)에서 각각 $1 < r \leq 2$ 일 때와 $2 < r \leq 3$ 일 때, 전통적인 생태학자들이 예상하는 안정된 평형상태를 보여준다. 여기서 모든 궤적을 끌어들이는 점은 0 차원의 끌개(attractor)이다.

(d)에서 $3 < r \leq 3.449489 \dots$ 일 때, 분기(bifurcation)를 통하여 두 개의 주기를 갖는 2 주기 끌개가 나타난다.

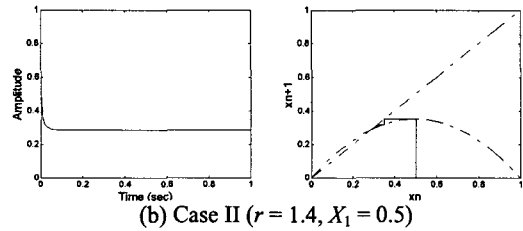
(e)에서 $3.449489 \dots < r \leq 3.5699456 \dots$ 일 때, 주기배가분기(period doubling bifurcation)가 더욱 가속되어 끌개의 주기가 4 주기, 8 주기, 16 주기, ...로 점점 증가한다.

(f)에서 $3.5699456 \dots < r \leq 4$ 일 때, 주기배가가 계속되다가 마침내, 궤적은 일정주기를 나타내지 않는 카오스 상태가 된다.

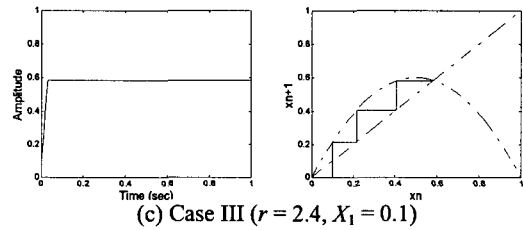
이와 같이 비선형계는 매개변수의 작은 변화에 따라 다양한 반응이 나타난다. 선형계와 다르게 비선형계는 나비효과처럼 작은 변화가 나중에 엄청난 큰 변화를 야기시키는 것이다.



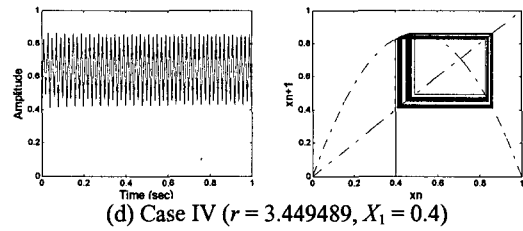
(a) Case I ($r = 0.4, X_1 = 0.6$)



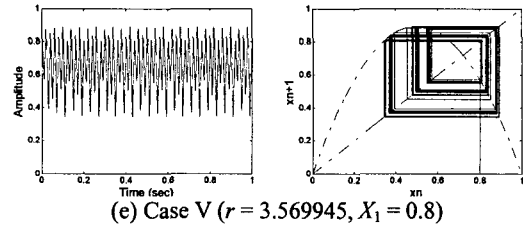
(b) Case II ($r = 1.4, X_1 = 0.5$)



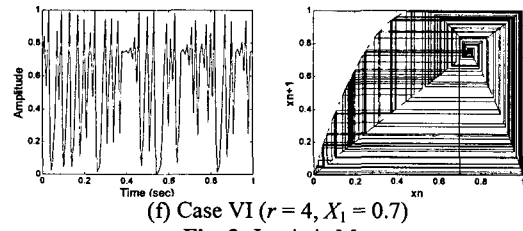
(c) Case III ($r = 2.4, X_1 = 0.1$)



(d) Case IV ($r = 3.449489, X_1 = 0.4$)



(e) Case V ($r = 3.569945, X_1 = 0.8$)



(f) Case VI ($r = 4, X_1 = 0.7$)

Fig. 3 Logistic Map

3. 바이스펙트럼 해석법

3.1 바이스펙트럼의 정의

가우스(Gauss)성 불규칙신호의 경우에는, 파워스펙트럼(Power spectrum)이 유력한 해석수단인 것으로 알려져 있지만,⁽¹¹⁾ 비가우스성 신호의 통계적 성질의 기술이나 비선형계의 특성해석을 위해서는 보다 고차의 스펙트럼이 필요하다.⁽¹²⁾ 고차스펙트럼은 난류에 있어서 에너지 수송(Batchelor, 1952), 쇄파(Phillips, 1958), 파랑의 성분과 사이의 에너지 수송(Phillips, 1960, Hasselman, 1962) 등의 비선형 현상을 설명하는데 사용되어 왔다.⁽¹³⁾

바이스펙트럼(Bispectrum)은 고차스펙트럼 중에서도 비교적 간단히 구할 수 있고, 이제까지 대부분 의존해왔던 파워스펙트럼으로는 얻을 수 없는 각각의 주파수 성분들 사이의 상관위상의 변화에서만 나타나는 정보를 얻는 것이 가능하다는 점에 특징이 있다. 바이스펙트럼은 3 차 상관함수의 2 차원 푸리에 변환으로 정의되며, 합이 0 이 되는 세 개의 주파수 성분들간의 상호관계를 나타낸다.⁽¹²⁾

정상 랜덤 과정일 때의 $x(t)$ 를 Fourier-Stieltje 적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dZ(\omega) \quad (2)$$

$S(\omega)$ 는 평균 제곱 $R(\tau)$ 의 함으로 정의 된다.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

$$R(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (4)$$

$B(\omega_1, \omega_2)$ 는 평균 세제곱 $C(\tau_1, \tau_2)$ 의 함으로 정의 된다.

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (5)$$

$$C(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)] \quad (6)$$

식 (2)를 식 (3)과 식 (4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] &= S(\omega_1)d\omega_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &\neq 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (2)를 식 (5)와 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)] &= B(\omega_1, \omega_2)d\omega_1d\omega_2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &\neq 0 \\ \Rightarrow E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ(\omega_3)] &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

다시 말해서 파워스펙트럼은 주파수의 합이 0 인 두 개의 푸리에 성분으로부터 나온 평균 자승치의 기여도를 나타내고 바이스펙트럼은 주파수의 합이 0 이 되는 세 개의 푸리에 성분의 곱에서 나온 평균 세제곱의 기여도를 나타낸다.⁽¹²⁾ 정상과정 $x(t)$ 에 대한 파워스펙트럼은 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (11)$$

$$S(\omega) = S(-\omega) \quad (12)$$

바이스펙트럼에 대해서는 3 차의 곱으로서 다음과 같은 경계가 생긴다.

$$\begin{aligned} C(\tau_1, \tau_2) &= C(\tau_2, \tau_1) \\ &= C(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) = C(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) \\ &= C(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) = C(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) &= B(\omega_2, \omega_1) \\ &= B(-\omega_2, \omega_1 - \omega_2) = B(\omega_1 - \omega_2, -\omega_2) \\ &= B(-\omega_1, \omega_2 - \omega_1) = B(\omega_2 - \omega_1, -\omega_1) \end{aligned} \quad (14)$$

또한 $dZ(\omega) = dZ^*(-\omega)$, $B(\omega_1, \omega_2) = B^*(-\omega_1, -\omega_2)$ 가 성립한다. Fig. 4 에 식 (13)과 식 (14)에서 주어진 기본적인 기하학적 특성을 표시하였다. 시계열 $x(t)$ 에 대해서는 단지 Fig. 4 에서 보이는 채색된 부분만 계산하면 된다.⁽¹⁴⁾ 12 개의 삼각형 면적은 동일하며 다른 삼각형들은 채색된 삼각형으로부터 계산될 수 있다.

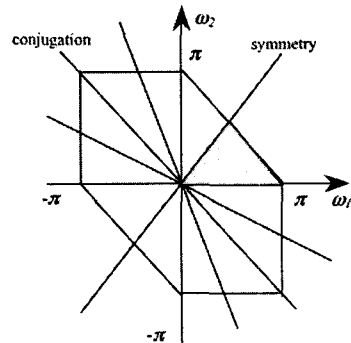


Fig. 4 Symmetric relationship of the bispectrum

3.2 바이스펙트럼의 추정

바이스펙트럼은 3 차 상관함수의 2 차원 푸리에 변환으로부터 구할 수도 있지만 계산량 등을 생각할 때 이 방법은 좋은 방법이라 할 수 없다.

여기에서는 보다 유용한 방법으로서, 유한한 길이의 시계열 푸리에 변환으로부터 3 차의 피리어드그램(Periodogram)을 구하여 스펙트럼 윈도우를 거쳐서 평활화하는 방법을 채택하였다.⁽¹⁵⁾

피리어드그램은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$P_{xxx}(f_1, f_2) = \frac{1}{T} [X_T(f_1)X_T(f_2)X_T^*(f_1 + f_2)] \quad (15)$$

그리고 이 피리어드그램으로부터 바이스펙트럼을 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$B_{xxx}(f_1, f_2) = \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-L}^L w(i, j) \frac{1}{T} P_{xxx}(f_{1+i}, f_{2+j}) \quad (16)$$

$$w(i, j) = \frac{1}{M^2}, \quad |i| \leq L, \quad |j| \leq L, \quad L = \frac{M-1}{2}$$

식 (16)에서 M 은 홀수이며, 보통 3 으로 하지만 본 연구에서는 1 로 정하였다. Fig. 5 는 시간 T 까지 측정된 신호를 $x_T(t)$, 이것의 푸리에 변환을 $X_T(f)$ 라 할 때,⁽¹⁶⁾ 신호 $x_T(t)$ 의 바이스펙트럼을 구하기 위한 신호처리 흐름이다.⁽¹⁷⁾

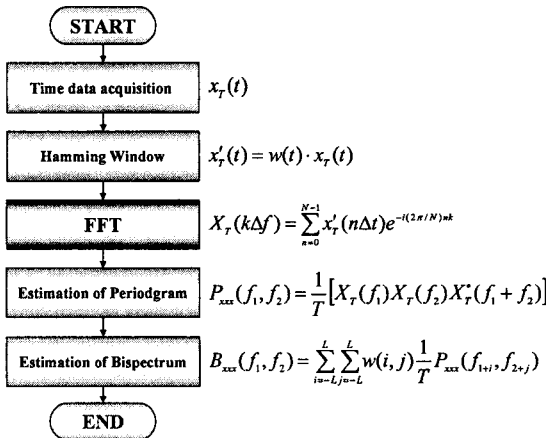


Fig. 5 Signal processing flow for bispectrum

이상의 식으로부터 자기 바이스펙트럼, 상호 바이스펙트럼, 자기 바이코히어런스, 상호 바이코히어런스, 바이코히어런스 잔여를 다음과 같은 식으로 추정할 수 있다.⁽¹⁴⁾

① 자기 바이스펙트럼(Auto Bispectrum)

$$B_{xxx}(f_1, f_2) = \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-L}^L w(i, j) \frac{1}{T} P_{xxx}(f_{1+i}, f_{2+j}) \quad (17)$$

$$w(i, j) = \frac{1}{M^2}, \quad |i| \leq L, \quad |j| \leq L, \quad L = \frac{M-1}{2}$$

$$P_{xxx}(f_1, f_2) = \frac{1}{T} [X_T(f_1)X_T(f_2)X_T^*(f_1 + f_2)] \quad (18)$$

② 상호 바이스펙트럼(Cross Bispectrum)

$$B_{xyy}(f_1, f_2) = \sum_{i=-L}^L \sum_{j=-L}^L w(i, j) \frac{1}{T} P_{xyy}(f_{1+i}, f_{2+j}) \quad (19)$$

$$w(i, j) = \frac{1}{M^2}, \quad |i| \leq L, \quad |j| \leq L, \quad L = \frac{M-1}{2}$$

$$P_{xyy}(f_1, f_2) = \frac{1}{T} [X_T(f_1)X_T(f_2)Y_T^*(f_1 + f_2)] \quad (20)$$

③ 자기 바이코히어런스(Auto Bicoherence)

$$C_{xxx}(f_1, f_2) = \frac{B_{xxx}(f_1, f_2)}{\sqrt{X_T(f_1)X_T(f_2)X_T(f_1 + f_2)}} \quad (21)$$

④ 상호 바이코히어런스(Cross Bicoherence)

$$C_{xyy}(f_1, f_2) = \frac{B_{xyy}(f_1, f_2)}{\sqrt{X_T(f_1)X_T(f_2)Y_T(f_1 + f_2)}} \quad (22)$$

⑤ 바이코히어런스 잔여(Bicoherence Residue)

$$BR(f_1, f_2) = \frac{B_{xyy}(f_1, f_2)}{B_{xxx}(f_1, f_2)} \quad (23)$$

3.3 바이스펙트럼의 고찰

여기서는 바이스펙트럼의 물리적인 의미를 알고자 식 (17)~식 (23)의 바이스펙트럼을 간단한 사인파형에 적용하여 고찰하고자 한다. 사인파는 정상랜덤신호라는 가정을 따르지는 않지만 결과를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 하나의 보기로 사용되었다.

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 \sin(2\pi f_i t) \quad (24)$$

$$y(t) = x(t) + \sin(2\pi f_5 t) \quad (25)$$

$x(t)$ 의 주파수 성분은 1 Hz, 3 Hz, 5 Hz, 21 Hz 로 4 개이며, $y(t)$ 의 주파수 성분은 $x(t)$ 의 주파수 성분 에 11 Hz 성분을 더한 것이다. 샘플링 시간 Δt 는 0.020039(sec)이며, 데이터 개수는 512 개이다. 그리고 바이스펙트럼 패턴을 좀더 선명하게 보기 위하여 크기는 dB 값으로 나타내었다.

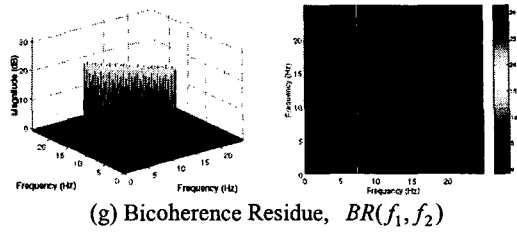
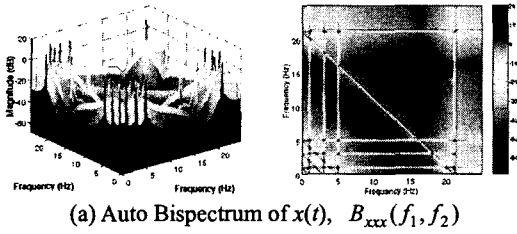


Fig. 6 Example of bispectral analysis

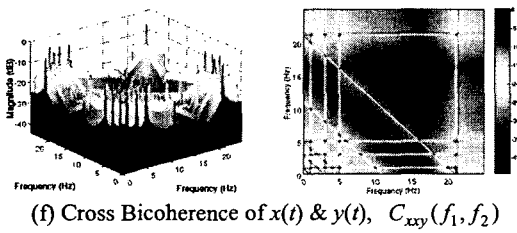
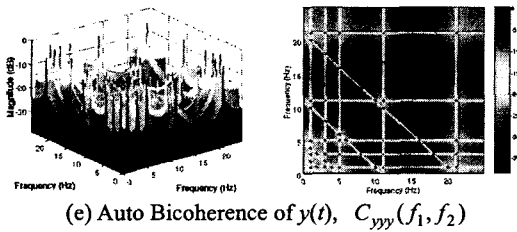
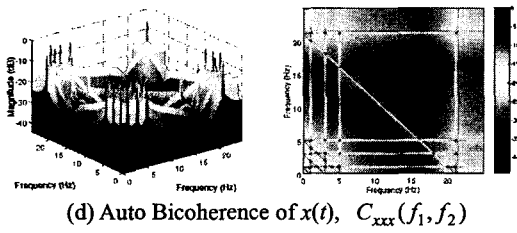
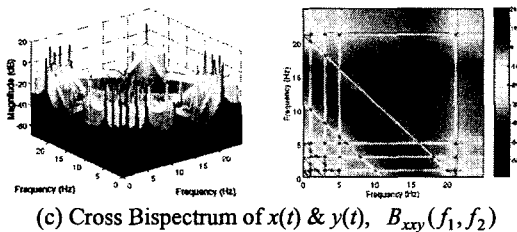
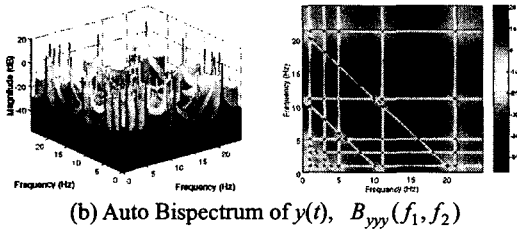


Fig. 6의 좌측은 3차원 표면에 바이스펙트럼의 크기를 나타낸 것이고, 우측은 이것을 등고선으로 나타낸 것이다.

(a)와 (b)는 각각 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 자기 바이스펙트럼이다. 예상했던 바와 같이 각 주파수 성분 별로 f_1 과 f_2 그리고 $f_1 + f_2$ 인 세 개의 직선이 나타났으며 각 대역의 교점에서 피크가 나타났다. 그리고 (b)에서는 (a)에 없는 11 Hz 성분이 세 개의 직선으로 뚜렷이 나타난 것을 알 수 있다.

(c)는 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 상호 바이스펙트럼이다. 상호 바이스펙트럼은 식 (20)에서도 알 수 있듯이 $x(t)$ 의 f_1 과 f_2 성분, 그리고 $y(t)$ 의 $f_1 + f_2$ 성분으로 정의되어 있다. 따라서 $y(t)$ 의 11 Hz 성분은 $f_1 + f_2$ 가 11 Hz인 사선에서만 나타났다.

(d)와 (e)는 각각 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 자기 바이코히어런스이다. 자기 바이스펙트럼을 정규화한 자기 바이코히어런스는 위상결합이 우세한 곳에서 큰 값을 나타낸다. 따라서 자기 바이코히어런스를 신호에 적용하면 위상결합 정보를 알 수 있다.

(f)는 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 상호 바이코히어런스이다. 상호 바이스펙트럼을 정규화한 상호 바이코히어런스 역시 위상결합이 우세한 곳에서 큰 값을 나타낸다. 따라서 상호 바이코히어런스를 적용하면 두 신호에 대한 위상결합 정보를 알 수 있다.

(g)는 바이코히어런스 잔여이다. 바이코히어런스 잔여는 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 상호 바이스펙트럼을 $x(t)$ 의 자기 바이스펙트럼으로 정규화한 것이다. 따라서 $f_1 + f_2$ 가 11 Hz인 사선만 나타나는데, 이것으로부터 바이코히어런스 잔여가 $y(t)$ 의 주파수 성분 중 $x(t)$ 에 포함되지 않은 주파수 성분을 추출할 때 유용함을 알 수 있다.

본 연구에서는 자기 바이코히어런스와 바이코히어런스 잔여를 Fig. 3의 Case I ~ Case VI에 적용하여 신호가 주기배가분기를 거쳐 카오스가 되어가는 과정에서의 위상결합 정보 및 생성된 주파수대역을 분석하고자 한다.

4. 카오스 신호의 바이스펙트럼 해석

4.1 자기 바이코히어런스(Auto Bicoherence)

바이스펙트럼의 정규화 방법 가운데 하나인 바이코히어런스 함수는 기존의 파워스펙트럼에서의 기여도 함수(coherence function)가 시스템의 입력과 출력 신호의 주파수영역 상관도를 해석하는 것⁽¹⁸⁾과는 달리 한 신호 상에 혼합되어 있는 두 주파수 성분의 상관도를 해석할 수 있다. 즉 바이코히어런스의 크기는 주파수 성분들 사이의 위상결합을 해석할 수 있으며 이러한 위상결합에 대한 정보는 신호의 비선형성을 검출하는데 바이코히어런스가 유용함을 뜻한다. 따라서 바이코히어런스가 카오스 신호의 비선형성을 분석하는데 유용한지를 알아보기 위해 대표적인 카오스 신호인 로지스틱 방정식의 거동에 적용하여 Fig. 7에 나타내었다.

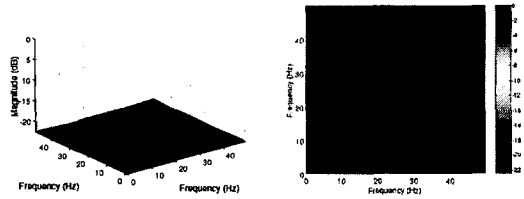
(a)는 $r = 0.4, X_1 = 0.6$ 일 때의 자기 바이코히어런스이다. Table 1에 나타난 바와 같이 이 때의 거동은 초기에 0으로 수렴하므로 어떠한 주파수대역도 나타나지 않는 것을 볼 수 있다.

(b)와 (c)는 각각 $r = 1.4, X_1 = 0.5$ 일 때와 $r = 2.4, X_1 = 0.1$ 일 때의 자기 바이코히어런스이다. Table 1에 나타난 바와 같이 이 때의 거동은 $1-1/r$ 로 수렴한다. 따라서 0이 아닌 특정한 값으로 수렴하기 때문에 이것의 스펙트럼은 충격함수(impulse)와 같은 형태로 나타난다. 그렇기 때문에 0 Hz 근방에서 피크(peak)가 나타나는 것이다.

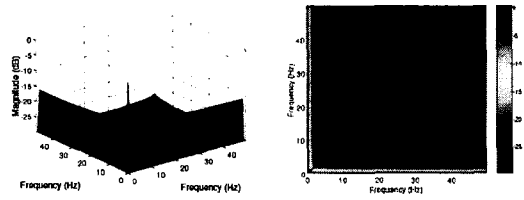
(d)는 $r = 3.449489, X_1 = 0.4$ 일 때의 자기 바이코히어런스이다. Table 1에 나타난 바와 같이 이 때의 거동은 2주기에 접근한다. 이 구간부터 위상결합 현상이 나타나게 되며 피크는 $f_1 = 25$ Hz, $f_2 = 25$ Hz 그리고 $f_1 + f_2 = 50$ Hz 인 세 개의 직선이 교차하는 지점에서 발생한다.

(e)는 $r = 3.569945, X_1 = 0.8$ 일 때의 자기 바이코히어런스이다. Table 1에 나타난 바와 같이 이 때의 거동은 주기배가를 거듭하게 된다. 주기배가가 가속되면서 이전 주파수대역의 사이사이에 새로운 주파수대역들이 프랙탈(fractal)하게 등간격으로 생성되고 이러한 주파수대역들로 인해 위상결합 현상이 더욱 가속화되는 것을 볼 수 있다.

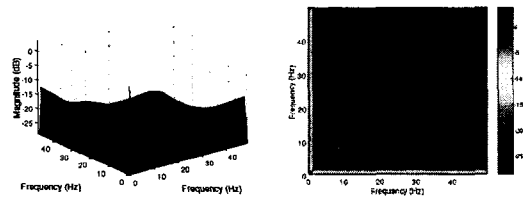
(f)는 $r = 4, X_1 = 0.7$ 일 때의 자기 바이코히어런스이다. Table 1에 나타난 바와 같이 이 때의 거동은 전형적인 카오스가 나타나게 된다. 따라서 (e)와 같은 주기성이 없어지며 위상결합이 전 주파수대역에 걸쳐서 나타나 비선형성이 극대화되는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 카오스 신호는 위상결합이 무작위적이며 동시 다발적으로 발생한다.



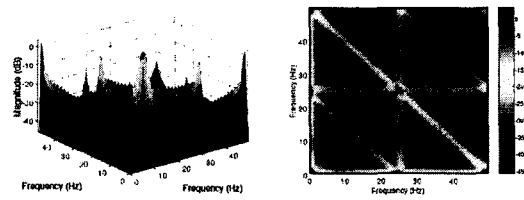
(a) Case I ($r = 0.4, X_1 = 0.6$)



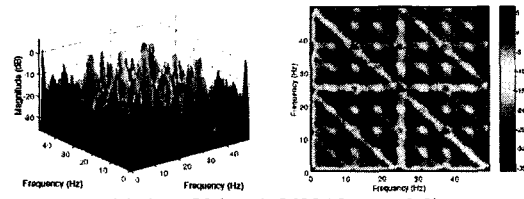
(b) Case II ($r = 1.4, X_1 = 0.5$)



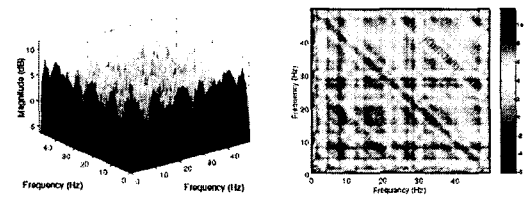
(c) Case III ($r = 2.4, X_1 = 0.1$)



(d) Case IV ($r = 3.449489, X_1 = 0.4$)



(e) Case V ($r = 3.569945, X_1 = 0.8$)



(f) Case VI ($r = 4, X_1 = 0.7$)

Fig. 7 Auto Bicoherence of Case I ~ Case VI

4.2 바이코히어런스 잔여(Bicoherence Residue)

바이코히어런스 잔여는 한 신호 $y(t)$ 의 주파수 성분 중 $x(t)$ 에 포함되지 않은 주파수 성분을 추출할 때 유용하다. 즉 $x(t)$ 가 입력이고 $y(t)$ 가 출력일 때, 바이코히어런스 잔여가 출력 $y(t)$ 에서 새로 생성된 주파수대역을 추출할 수 있으며 이러한 주파수대역에 대한 정보는 신호의 비선형성을 검출하는데 유용함을 뜻한다. 따라서 바이코히어런스 잔여가 카오스 신호의 비선형성을 분석하는데 유용한지를 알아보기 위해 Fig. 7의 Case I ~ Case VI 에 적용하여 매개변수 r 에 따른 바이코히어런스 잔여의 변화를 Fig. 8 에 나타내었다.

(a)는 Case I($r = 0.4, X_1 = 0.6$)과 Case II($r = 1.4, X_1 = 0.5$)의 시계열에 대한 바이코히어런스 잔여이다. 매개변수 r 이 0.4 에서 1.4 로 변화하면서 0 Hz 근방의 피크가 새로 생성된 것을 볼 수 있다. 이것은 앞에서 설명했듯이 Case II가 0 이 아닌 특정한 값으로 수렴하기 때문에 생긴 결과이다.

(b)는 Case II($r = 1.4, X_1 = 0.5$)와 Case III($r = 2.4, X_1 = 0.1$)의 시계열에 대한 바이코히어런스 잔여이다. 매개변수 r 이 1.4 에서 2.4 로 변화했지만 이 구간에서는 Fig. 2 에 나타난 바와 같이 단지 수렴하는 값만 다를 뿐 여전히 주기성이 나타나지 않으므로 바이코히어런스 잔여의 대역이 나타나지 않는다.

(c)는 Case III($r = 2.4, X_1 = 0.1$)과 Case IV($r = 3.449489, X_1 = 0.4$)의 시계열에 대한 바이코히어런스 잔여이다. 매개변수 r 이 3 을 넘어서면서 주기성이 나타나는데 이러한 주기성은 $f_1 + f_2 = 25$ Hz 인 대각선과 $f_1 + f_2 = 50$ Hz 인 대각선으로 뚜렷이 나타난다. 따라서 25 Hz 과 50 Hz 의 주파수 성분이 생성되었음을 알 수 있다.

(d)는 Case IV($r = 3.449489, X_1 = 0.4$)과 Case V($r = 3.569945, X_1 = 0.8$)의 시계열에 대한 바이코히어런스 잔여이다. 매개변수 r 이 3.449489... 을 넘어서면 주기배가분기를 거듭하여 이전 주파수대역의 사이사이에 새로운 주파수대역들이 생성된다. 따라서 주기배가가 일어날 때마다 더 많은 주파수대역이 생성되며 이에 따라 바이코히어런스 잔여에 더 많은 대각선이 생성된 것을 볼 수 있다.

(e)는 Case V($r = 3.569945, X_1 = 0.8$)과 Case VI($r = 4, X_1 = 0.7$)의 시계열에 대한 바이코히어런스 잔여이다. 매개변수 r 이 3.5699456... 을 넘어서면서 카오스가 되는데, 새로운 주파수대역이 전 주파수대역에서 생성되어 대각선이 무작위로 분포된 것을 볼 수 있다. 이처럼 카오스 신호는 백색잡음(white noise)과 같이 전 주파수대역에 걸쳐서 피크를 갖고 있음을 알 수 있다.

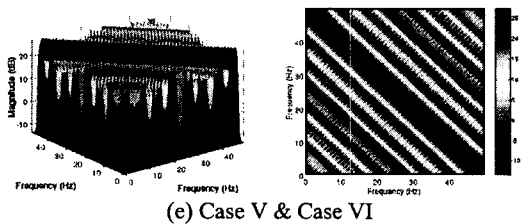
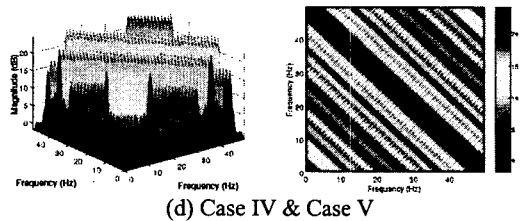
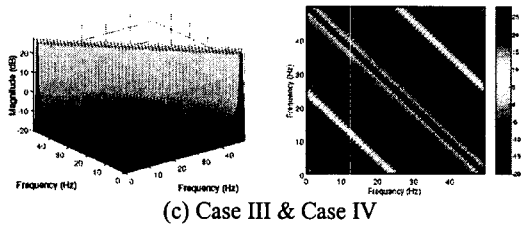
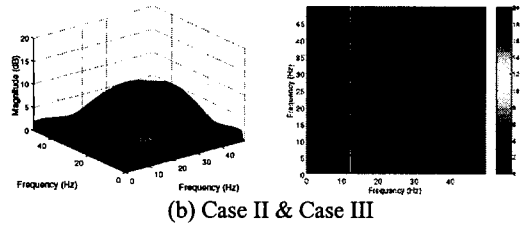
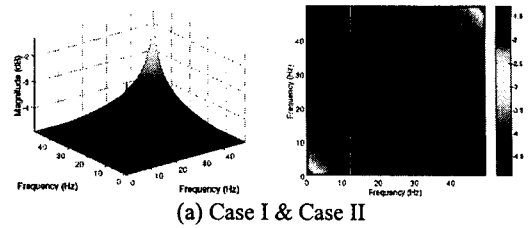


Fig. 8 Bicoherence Residue of Case I ~ Case VI

5. 결론

본 연구에서는 대표적인 카오스 신호인 로지스틱 사상 시계열에 바이스펙트럼 해석법을 적용하여 신호가 주기배가분기를 거쳐 카오스가 되어가는 과정에서의 자기 바이코히어런스 및 바이코히

어런스 잔여의 변화를 관찰하였고, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 로지스틱 사상 시계열이 카오스 상태가 되었을 때 자기 바이코히어런스는 주기성이 없으며 위상결합이 전 주파수대역에 걸쳐서 나타나는 것을 볼 수 있었다. 따라서 카오스 신호는 비선형성이 극대화되어 위상결합이 무작위적이며 동시에 다발적으로 발생함을 알 수 있었다.

(2) 로지스틱 사상 시계열이 카오스 상태가 되었을 때 바이코히어런스 잔여는 새로운 주파수대역이 전 주파수대역에서 생성되어 대각선이 무작위로 분포된 것을 볼 수 있었다. 따라서 카오스 신호는 백색잡음과 같이 전 주파수대역에 걸쳐서 피크를 갖고 있음을 알 수 있었다.

(3) 본 연구를 통하여 바이스펙트럼 해석법이 카오스 신호를 스펙트럼 해석하는데 유용함을 확인하였고, 전통적인 선형 시스템 해석법에서는 알 수 없었던 정보를 얻을 수 있었다. 따라서 선형 시스템 해석법과 바이스펙트럼 해석법을 병행하여 카오스 현상이 나타나는 실제 비선형 시스템에 적용하면 더 정확한 시스템 해석이 가능할 것이다.

후 기

본 연구는 한국과학기술원 특장기초연구(R01-2005-000-10866-0)지원으로 수행되었음.

참고문헌

(1) Lorenz, E.N., 1963, "Deterministic Nonperiodic Flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130~141.
 (2) Rao, T. S. and Gabr, M. M., 1988, "The Estimation of the Bispectral Density Function and the Detection of Periodicities in a Signal," *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 27, Issue. 2, pp. 457~477.
 (3) Kim, E. S. and Lee, Y. J., 1999, "Analysis of Nonlinear Time Series by Bispectrum Methods and Its Applications," *Trans. of the KIPS*, Vol. 6, No. 5, pp.

1312~1322.
 (4) Hinich, M. J., 1982, "Testing for Gaussianity and linearity of a Stationary Time Series," *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 3, No. 3, pp.169-176.
 (5) Gleick, J., 1987, "Chaos-Making a New Science," *Viking*, New York.
 (6) Li, T. Y. and Yorke, J. A., 1975, "Period Three Implies Chaos," *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, pp. 985~992.
 (7) May, R. M., 1976, "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics," *Nature*, Vol. 261, pp. 459~467.
 (8) May, R. M., 1995, "Necessity and Chance: Deterministic Chaos in Ecology and Evolution," *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 32, No. 3, pp. 291~308.
 (9) Feigenbaum, M. J., 1983, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Physica 7D*, pp. 16~39.
 (10) Peitgen, H. O., Jürgens, H. and Saupe, D., 1992, "Chaos and Fractals-New Frontiers of Science," *Springer-Verlag*, New York.
 (11) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1993, "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis," *John Wiley & Sons*, New York.
 (12) Oh, J. E. and Lee, J. C., 1995, "A Study on the Fault Diagnosis of Rotating Machinery Using Neural Network with Bispectrum," *Trans. of the KSAE*, Vol. 3, No. 6, pp. 262~273.
 (13) 日野幹雄, 1977, "스펙트럼解析," 朝倉書店.
 (14) Lee, J. C., Jung, J. H. and Oh, J. E., 1990, "A Study of Rotating Machine Using Bispectrum Analysis Method," *Trans. of the KICS*, Vol. 15, No. 7, pp. 581~601.
 (15) Ha, J., 2006, "A Study on the Evaluation of the Interfacial Micro-delamination in a Semiconductor by Using Nonlinearity," *Hanyang University*.
 (16) Cooley, J. W. and Tukey, J. W., 1965, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297~301.
 (17) Jhang, K. Y., Demin, I. Y. and Sato, T., 1993, "Measurement of Nonlinear Propagation Characteristics of Vibration in the Tissue Using Bispectral Analysis," *Journal of the KOSOMBE*, Vol. 14, No. 1, pp. 31~40.
 (18) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 2000, "Random Data-Analysis and Measurement Procedures, Third Edition," *John Wiley & Sons*, New York.