

셸 해석과 곡면 모델링의 연동

Integration of Shell Analysis and Surface Modeling

조 맹 효† 최 진 복* 노 희 열**

Cho, Maenghyo Choi, Jinbok Roh, Hee-Yuel

(논문접수일 : 2006년 9월 6일 ; 심사종료일 : 2007년 4월 2일)

요 지

본 연구에서는 NURBS곡면식을 바탕으로 하는 곡면 모델링과 셸 유한요소해석의 효율적인 연동체계를 개발하고자 한다. 기하학적으로 정확한 셸 유한요소해석에서 정확한 기하량의 계산은 필수적이며, 따라서 곡면을 표현하는 일반적인 방법인 NURBS곡면식으로 부터 필요한 기하량을 직접 계산한다면 보간에 의해 발생할 수 있는 기하학적 오차를 줄임으로써 해의 수렴성을 높일 수 있다. 아울러 기하학적으로 정확한 셸 유한요소를 일반적인 곡면에 적용하기 힘들었던 한계점을 극복하여 수학적으로 표현 가능한 단순한 곡면들 뿐만 아니라, NURBS곡면식으로 표현 가능한 일반적인 곡면의 해석이 가능하게 되어 적용범위를 확장할 수 있다. 본 연구에서는 곡면을 생성함에 있어 주어진 데이터 점들을 보간하여 NURBS곡면을 생성하는데, 이러한 데이터들은 일반적으로 곡면의 스캐닝을 통해 얻을 수 있다. 곡면을 보간하여 NURBS곡면을 생성하는 과정에서 사용되는 매개변수 정의방식에 따라 생성된 곡면의 정확성이 차이를 보이므로 곡면의 형상에 따라 적합한 방식을 사용하여 곡면을 보간 할 필요가 있다. 몇 가지 잘 알려진 수치예제를 통하여 개발된 연동체계의 성능과 정확성을 검증하고 그 결과를 비교 분석하였다.

핵심용어 : 셸, 유한요소해석, NURBS곡면식, 해석과 설계의 통합

Abstract

The linkage framework of surface geometric modeling based on the NURBS and shell finite element analysis is developed in this study. In the geometrically exact shell finite element analysis, the accuracy of the analysis strongly depends upon the accurate computation of the surface geometric quantities. Therefore if we obtain the necessary geometric quantities from the NURBS surface equation, it's possible to construct the effective linkage framework of surface modeling in the CAD systems and shell finite element analysis using geometrically exact shell finite element. Besides, the linkage framework can be applied to the analysis of general and complex surfaces as well as simple surfaces. In this study, the shell surfaces are generated by interpolating given set of data points based on the NURBS surfaces. These data points usually can be obtained from surface scanning. But the representations of the generated NURBS surface are not same to one another. The accuracy depends on the chosen parameterization methods used in NURBS. Therefore, it is needed to select the suitable parameterization method according to the geometry of the surfaces. To verify the performance and accuracy of our developed linkage framework, we solve several well-known benchmark problems and assess the performance of the developed method.

Keywords : shell, finite element analysis, NURBS surface, integration between shell analysis and surface modeling

1. 서 론

현재까지 개발된 셸 유한요소의 범주를 크게 두분류로 나누어 보면 3차원 감절점 셸 유한요소와 2차원 셸이론에 근거한 셸 유한요소로 나누어질 수 있다.

Ahmad S, Irons BM, Zienkiewicz OC.(1970) 등에 의해 제안된 감절점 셸 요소는 복잡한 고전 셸 이론에 비하여 부분적으로 정식화가 간단하고 연속체 역학의 기본적인 식들로부터 직접 유도가 되며 따라서 유한요소 구현 과정이 직접적이고 비교적 간단하다. 이러한 편의성 때문에 감절점

† 책임저자, 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수
Tel: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1693
E-mail: mhcho@snu.ac.kr

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

** 삼성전자 디지털프린팅사업부

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

셀 요소의 개발에 대한 연구가 그간 주종을 이루어 왔다. 그러나 감절점 셀 요소는 요소 내에서의 기하학적인 셀의 형상을 근사를 통해 보간 하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 셀을 효율적으로 해석하는 데에는 그 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적인 형상을 고려한 셀 이론에 근거한 유한요소의 개발이 J.C. Simo, D.D. Fox(1989) 등에 의해 수행되었다.

한편 현재 CAD 시스템에 사용되는 기하학적 모델링은 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)방법이 널리 채택되고 있다. 일반적으로 NURBS를 사용하면 곡면을 2개의 매개 변수로 표현 가능하며, 일반 곡선 좌표계에 기초한 셀 유한요소 또한 2개의 매개 변수로 일반 곡면을 표현하게 됨으로 CAD에서 주어지는 곡면식과 동일하여 CAD에서 생성된 곡면을 직접 셀 유한요소해석에 사용할 수 있다. 즉 곡면을 생성하기 위해 동일한 표현식을 모델링과 해석에 사용하게 된다. 그러므로 셀 구조해석을 위해 곡면을 다시 근사하는 번거로움과 곡면의 재근사에서 나타나는 기하 오차는 발생하지 않는다.

본 연구자들에 의해 셀 곡면의 기하정보를 정확히 적용할 수 있는 셀 요소가 개발 되었고(Cho 등, 2003), 이 셀 요소를 B-Spline곡면과 연동시켰으며(Roh 등, 2004), B-Spline 환경하에서 곡면 모델링과 해석을 통합한 연구(Roh 등, 2005)를 발표하였다. 본 연구에서는 보다 일반적인 곡면의 표현방식인 NURBS곡면식을 사용하여 셀 곡면을 생성하고 해석에 필요한 기하학적인 정보를 추출함으로써 곡면 모델링과 해석의 통합체계를 개발하고자 한다.

NURBS곡면식을 사용해 주어진 기하학적인 데이터 점들을 보간(interpolation)하거나 근사(approximation)하여 곡면을 생성할 수 있다. 본 연구에서는 셀 유한요소해석을 위한 곡면생성을 주어진 곡면의 기하학적인 데이터 포인트들을 보간(interpolation)하여 곡면을 생성한다. 이때 곡면의 매듭(knot)벡터를 선택하는 방법에 따라 곡면의 형상과 parameterization이 달라지게 된다. NURBS곡면의 매개변수화 방법에는 일반적으로 uniform, chord-length 그리고 centripetal방법이 있다. 본 연구에서는 개발된 연동체계의 성능 및 해의 정확성을 검증하기 위하여 몇 가지 잘 알려진 셀 곡면에 대하여 곡면 위에 데이터 점을 생성하여 그 데이터 점들을 전술한 방식에 따라 보간하여 근사 곡면을 생성하고 생성한 근사 곡면에 대하여 유한요소 메쉬를 생성하여 해석 결과를 비교하였다.

2. NURBS 곡면생성

2.1 NURBS곡면의 정의

u 방향으로 p 차, v 방향으로 q 차의 차수를 갖는 NURBS 곡면식은 다음과 같이 주어진다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{P}_{i,j}$ 는 u, v 두 방향의 조정점 망(control net)이고, $w_{i,j}$ 는 가중치(weights)이며, $N_{i,p}(u)$ 와 $N_{j,q}(v)$ 는 각각 B-spline 기저함수들이다. 기저함수 $N_{i,p}(u)$ 는 다음과 같이 정의 되며, $N_{j,q}(v)$ 역시 같은 형태로 정의된다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases} \quad (2a)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2b)$$

이 기저함수는 아래와 같은 매듭(knot) 벡터 영역에서 정의 된다.

$$U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \\ V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{r-q-1}, 1, \dots, 1\} \quad (3)$$

여기서 u, v 각 방향으로의 차수(p 또는 q), 매듭의 수(r 또는 s) 그리고 조정점의 개수(n 또는 m)사이에는 관계식 $r = n + p + 1$, $s = m + q + 1$ 이 성립한다. 식 (1)의 NURBS곡면식은 모든 가중치 값($w_{i,j}$)들이 같을 때, B-spline 곡면식이 되고 가중치값들이 같지 않으며 내부 매듭이 존재하지 않을 때 rational Bezier 곡면이 된다. 따라서 NURBS곡면은 이들을 포함하는 일반적인 곡면 식이라 할 수 있다. 또한 NURBS곡면식은 2차 곡면을 수학적으로 정확하게 표현할 수 있다는 장점을 가진다. 대부분의 실제적인 CAD 모델링에서 사용되는 곡면이 2차 곡면이기 때문에 이러한 특성은 매우 유용하다.

2.2 보간에 의한 NURBS곡면생성

전술한 바와 같이 본 연구에서는 셀 유한요소해석을 위하여 주어진 데이터 포인트들로부터 NURBS곡면식을 이용해 보간하여 생성한다. 일반적으로 이러한 곡면상의 특정 점들의 좌표 정보는 3차원 디지털 스캐너 등의 장비를 통해 얻어

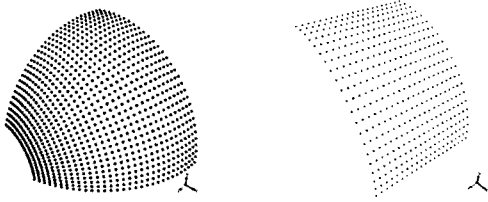


Fig.1 Surface scanning data: coordinate values

질 수 있다.

Fig. 1은 곡면의 3차원 좌표 데이터를 도시하고 있다. 일반적으로 데이터 점들을 보간 하는 알고리즘은 전역(global)적인 방법과 국부(local)적인 방법이 있는데, 본 연구에서는 전역적인 방식으로 데이터 점들을 보간 하여 NURBS곡면을 생성한다. 만일 보간 하고자 하는 곡면의 $(n+1) \times (m+1)$ 의 데이터 점들 $\{Q_{k,l}\}$, $k=0, \dots, n$ 그리고 $l=0, \dots, m$ 이 주어졌다고 가정한다면 다음과 같이 곡면을 보간 하게 된다.

$$Q_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \quad (4)$$

먼저, 적당한 (\bar{u}_k, \bar{v}_l) 의 값들과 매듭벡터(knot vector) U, V 를 구해야 한다. 일반적으로 (\bar{u}_k, \bar{v}_l) 를 구하는 방식은 크게 세가지가 있는데, 어떤 방식을 택하느냐에 따라 곡면의 형상 및 곡면의 parameterization이 달라지게 된다.

첫 번째 방법은 등 간격(uniform)으로 (\bar{u}_k, \bar{v}_l) 를 계산하는 방식이다. 편의상 \bar{u}_k 에 대해서만 설명하며 \bar{v}_l 의 계산 역시 같은 과정을 통해 계산 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 \quad \bar{u}_n = 1 \\ \bar{u}_k &= \frac{k}{n} \quad k=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (5)$$

그러나 이 방법은 보간 할 데이터 점들이 균일하게 분포되어 있지 않을 경우에 예상치 못한 곡면을 만들어 낼 수도 있기 때문에 권장되지 않는다.

두 번째로 chord length 방법이 있다. 다음과 같이 전체 chord length를 구하고

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (6)$$

다음과 같이 \bar{u}_k 를 계산 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 \quad \bar{u}_n = 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} \quad k=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (7)$$

이 방법은 일반적으로 널리 사용되는 방법이며 대부분의

곡면을 보간 하는데 적합하다.

세 번째로 centripetal 방법이 있다(Lee 등, 1989).

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|} \quad (8)$$

위와 같이 전체 chord length를 구하고 아래와 같이 \bar{u}_k 를 계산한다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 \quad \bar{u}_n = 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} \quad k=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (9)$$

이 방법은 곡면상에 뾰족한 돌출 부위가 있는 경우 chord length 방법보다 나은 결과를 보여준다.

이렇게 계산되어진 파라미터(\bar{u}_k)들로부터 매듭(knot)을 계산할 때에는 일반적으로 다음과 같이 평균을 취하는 기법을 사용한다.

$$\begin{aligned} u_0 &= \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} &= \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j=1, \dots, n-p \end{aligned} \quad (10)$$

이 방법을 통해 계산된 매듭(knot)은 \bar{u}_k 의 분포를 적절히 반영하고, 아울러 식 (7)이나 (9)와 함께 식 (10)은 positive이며, 밴드 폭이 p, q 이하인 band 시스템을 구성한다(De Boor, 1978). 즉,

$$N_{i,p}(\bar{u}_k) = 0 \text{ if } |i-k| \geq p \quad (11a)$$

$$N_{j,q}(\bar{v}_l) = 0 \text{ if } |j-l| \geq q \quad (11b)$$

따라서 가우스 소거법 등으로 식 (4)를 간단하게 계산할 수 있다.

본 연구에서는 몇 가지 잘 알려진 쉘 문제에 대해 각각의 방법으로 보간하여 곡면을 생성했을 때의 해석결과를 비교하기로 한다.

3. Naghdi 쉘 이론과 유한요소

3.1 쉘의 변형

Naghdi의 쉘 모델에서 변위 벡터 \vec{d} 는

$$\vec{d} = (u_\alpha + \theta^3 \psi_\alpha) \vec{a}^\alpha + w \vec{a}_3 \quad (12)$$

로 가정한다.(Naghdi P.M. 1963; Green 등, 1968) 여기서 u, ψ, w 는 각각 면내 변위, 회전각 변위, 수직 변위이며, \vec{a}_α 는 쉘 중앙면에서 곡면을 따라가는 일반 곡선 좌표계

의 기저벡터이고, \vec{a}_3 는 곡면의 접평면에 수직인 기저벡터이다. 또, 전단 변형률 γ_α 는 두께방향 θ^3 를 통해서 일정하다고 가정한다. 주어진 변위장으로부터 인장, 굽힘, 전단 변형률은 다음과 같이 셸 중앙면에서의 변위(u, ψ, w)와 곡률(b_β^a)로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha\parallel\beta} + u_{\beta\parallel\alpha} - 2b_{\alpha\beta}w) \quad (13a)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\psi_{\alpha\parallel\beta} + \psi_{\beta\parallel\alpha} - b_\alpha^i(u_{i\parallel\beta} - b_{i\beta}w) - b_\beta^i(u_{i\parallel\alpha} - b_{i\alpha}w)] \quad (13b)$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{3\alpha} = w_{,\alpha} + \psi_\alpha + b_\alpha^i u_{i,\alpha} \quad (13c)$$

여기서 \parallel 는 2차원 곡면에서의 공변미분을 나타낸다.

3.2 유한요소 정식화

유한요소 정식화를 위한 변위와 변형률 가정식은 다음과 같다.

$$(u_\alpha, w, \psi_\alpha) = \sum (u_{ai}, w_i, \psi_{ai}) N_i + (u_a, w, \psi_a)_b N_b \quad (14a)$$

$$(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha) = (P_1 \vec{\alpha}, P_2 \vec{\beta}) \quad (14b)$$

여기서 N_i 는 형상함수, N_b 는 거품함수 형태의 형상함수이고 $P_1, P_2, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 는 가정 변형률장과 그 매개변수들이다.

부분혼합 범함수와 가정 변형률 매개변수를 이용하여 유한요소 이산화를 수행하면 이산화된 범함수는 다음과 같이 표현할 수 있다(Roh 등, 2004).

$$\Pi^p(\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^T G_m \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H_m \vec{\alpha} + \vec{\beta}^T G_\gamma \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\beta}^T H_\gamma \vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{d}^T K_b \vec{d} - \vec{d}^T \cdot \vec{f} \quad (15)$$

여기서,

$$G_m = \int_\Omega P_1^T D_m B_m \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2, \quad H_m = \int_\Omega P_1^T D_m P_1 \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$$

$$G_\gamma = \int_\Omega P_2^T D_\gamma B_\gamma \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2, \quad H_\gamma = \int_\Omega P_2^T D_\gamma P_2 \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$$

$$K_b = \int_\Omega B_b^T D_b B_b \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$$

이고, \vec{f} 는 외력에 의해 요소에 가해지는 하중 벡터, \vec{d} 는 요소의 자유도 벡터, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 는 미지 변형률 벡터이다. 문자에 사용된 하첨자 m, b, γ 는 각각 인장, 굽힘, 전단 변형을 표시한다.

부분혼합 범함수를 $\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 에 대하여 변분을 취하면

$$K^e \vec{d} = \vec{f} \quad (16)$$

식 (16)과 같은 요소 평형 방정식을 얻을 수 있고, 여기서 요소 강성 행렬 K^e 는

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_\gamma^T H_\gamma^{-1} G_\gamma \quad (17)$$

로 표시된다.

4. 셸 곡면 생성과 해석의 연동

본 연구를 통해서 개발된 셸 곡면의 모델링과 해석의 연동 체계는 NURBS곡면식에 기반하여 주어진 곡면의 기하학적 좌표 데이터를 보간하여 셸 해석을 위한 곡면을 생성하고, 생성된 NURBS 곡면으로부터 셸 유한요소 해석에 필요한 기하량을 직접 계산함으로써 평판 셸 요소가 필연적으로 가질 수 밖에 없는 기하학적 오차를 현저히 줄임으로써 해석의 효율성과 정확성을 높일 수 있다.

Fig. 2에서 보는 바와 같이 곡면 생성부에서는 주어진 곡면의 좌표 데이터를 보간하여 셸 해석을 위한 곡면을 생성하게 된다. 이 과정은 초기 과정에서 한번만 수행하게 되고 해석과정에서 곡면생성부와 지속적으로 데이터 교환을 할 필요가 없으므로 효율적이다. 앞서 설명한 바와 같이 NURBS곡면식을 이용해 데이터 점들을 보간하여 곡면을 생성할 경우 parameterization 방식에 따라 생성되는 곡면의 형상이 달

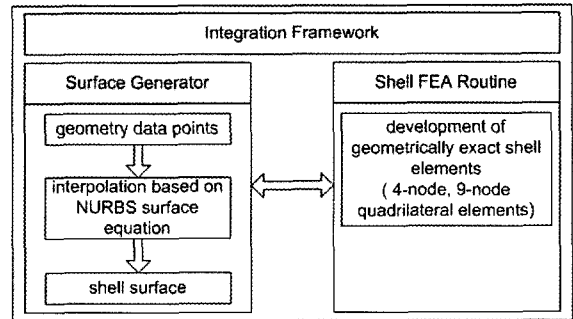


Fig. 2 The integration framework of shell surface generation and analysis

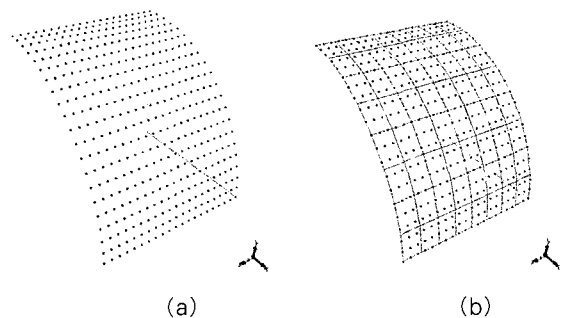


Fig. 3 (a) Surface geometry data points. (b) NURBS surface generation by interpolating given data points

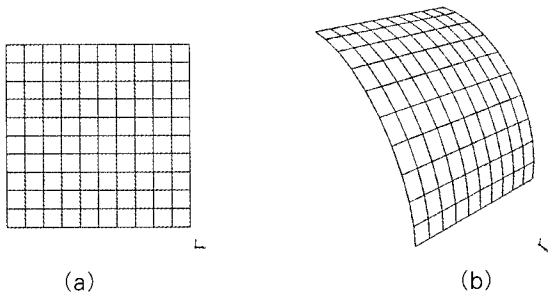


Fig. 4 (a) Mesh generation on the (u,v) parametric domain. (b) Mapping to original surface

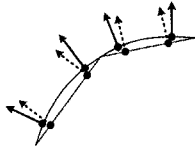


Fig. 5 Difference between the directly computed normal vectors and normal vectors of flat facet shell element

라지게 된다.

Fig. 3(a)는 실린더 곡면에 대하여 주어진 좌표 데이터 점들을 도시하며 Fig. 3(b)는 주어진 데이터 점들을 보간하여 NURBS곡면을 생성한 결과를 도시한 것이다. 식 (1)에서 보는 바와 같이 NURBS곡면식 $S(u,v)$ 는 곡면을 2차원 (u,v) 매개변수 영역으로 사상하여 표현 할 수 있다. Fig. 4(a)는 매개변수 영역에서 유한요소해석을 위한 사각형 격자생성 결과를 보여주고 있으며 좀 더 세밀한 격자정보 역시 매개변수 영역에서 이미 생성된 격자 정보를 세밀하게 분할함으로써 얻어지게 된다. (u,v) 매개 변수 영역에서 생성된 격자정보는 사상관계를 통해 Fig. 4(b)와 같이 3차원 공간상의 곡면으로 사상된다.

셸 곡면의 기하학적 특성을 정확히 표현할 수 있는 기하학적으로 정확한 4절점과 9절점 사각형 셸 유한요소는 선행 연구에서 개발하였다. 기하학적으로 정확한 셸 유한요소의 구현을 위해서는 곡면의 기저벡터(\vec{a}_α), 수직벡터(\vec{a}_3), 계량텐서($a_{\alpha\beta}$), 곡률텐서($b_{\alpha\beta}$), 2중 christoffel기호($\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$) 등의 기하량을 정확히 계산하여야 한다. 본 연구에서는 곡면상의 임의의 원하는 점에서 이러한 기하량들을 NURBS곡면식으로부터 직접 계산하게 되므로 평판 셸 요소를 사용하여 곡면을 근사하고 절점의 값들을 보간하여 가우스 적분점에서의 기하량을 계산하는 과정에서 발생할 수 있는 기하학적 오차를 크게 줄일 수 있다(Fig. 5).

이러한 기하량들은 곡면이 NURBS곡면식으로 표현되면 u,v 각 방향으로의 식 (1)의 NURBS곡면식을 미분함으로써 곡면의 접선벡터 및 수직 벡터를 구할 수 있다. NURBS곡면식 $S(u,v)$ 에서 (u,v) 값이 정해지면 다음 식과 같이 미분

가능하다.

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial u^k \partial v^l} S(u,v) \quad 0 \leq k+l \leq d \quad (18)$$

여기서 k 와 l 은 곡면 $S(u,v)$ 를 u,v 각 방향으로 k,l 번 미분하는 미분 차수를 나타내며, d 는 차수를 나타낸다. u,v 방향에 대한 NURBS곡면식 $S(u,v)$ 의 u,v 각 방향에 대하여 미분을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial u} = \frac{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial N_{i,p}(u)}{\partial u} N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \\ = \frac{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial N_{i,p}(u)}{\partial u} N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \quad (19a)$$

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial v} = \frac{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \frac{\partial N_{j,q}(v)}{\partial v} w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \\ = \frac{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j} \right) \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) \frac{\partial N_{j,q}(v)}{\partial v} w_{i,j} \right)}{\left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \right)^2} \quad (19b)$$

여기서 B-spline 기저함수의 미분은 다음과 같이 주어진다.

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (20)$$

여기서 $N_{i,p}^{(k)}(u)$ 는 B-spline 기저함수의 $N_{i,p}(u)$ 의 k 차 미분을 나타낸다. $N_{j,q}^{(l)}$ 또한 같은 형태로 표현된다. 따라서 (u,v) 파라미터 값이 주어지면 곡면상의 특정위치에서 곡면의 u,v 각 방향으로의 미분값들을 계산할 수 있고, 접평면상에서 접선벡터(\vec{a}_α)와 수직벡터(\vec{a}_3)를 구할 수 있다. Fig. 6은 요

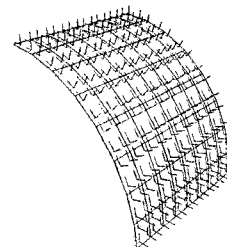


Fig. 6 Computed basis vectors at gauss points

소의 가우스 적분점에서 NURBS곡면식으로부터 계산된 곡면의 기저 벡터를 도시하고 있다.

5. 수치예제

개발된 셀 곡면 생성과 해석의 연동 시스템의 성능과 정확성을 검증하기 위하여 몇 가지 잘 알려진 벤치마크 문제를 해석하여 보기로 한다. 각 결과 그래프에서 횡축은 Fig. 4(b)에서 보는 바와 같이 한 면에 대한 격자의 개수를 나타낸다.

5.1 보간에 의해 생성된 NURBS 곡면

5.1.1 집중하중이 가해지는 실린더 셀

양단에 막(diaphragm)경계조건이 주어진 원통형 셀에 대하여 해석을 수행하였다. Fig. 7에서와 같은 형상과 물성치 조건에서 최대 변위의 정해는 1.8451×10^{-5} 이다. 셀 곡면은 곡면의 데이터 점들을 보간 함으로써 얻어질 수 있고, 곡면 생성 시 사용되는 parameterization에 따라 해석 결과의 차이가 나타남을 확인할 수 있었다. 일반적으로 chord length나 centripetal parameterization 방법이 uniform 방식에 비해 곡면 형상을 정확하게 표현한다고 알려져 있으나, 이 예제의 경우에는 uniform parameterization 방식으로 NURBS곡면을 생성하여 해석을 수행하였을 경우(Fig. 8(a))가 여타의 방법들을 사용하여 곡면을 생성하였을 경우(Fig. 8(b)(c))보다 더 좋은 결과를 보여 주었다. 이 예제의 경우 u, v 각 방향으로 곡률의 변화가 없으며 매개변수영역에서 격자정보를 본래 곡면으로의 사상 시 격자형상이 일정하게 유지되기 때문에 uniform parameterization 방법을 쓰더라도 큰 무리가 없는 것으로 판단된다. 본 예제의 실린더와 같은 단순 곡면은 식 (21)과 같은 수학적 식으로 표현 가능하므로

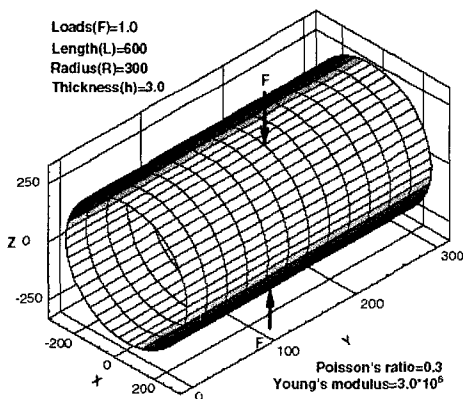
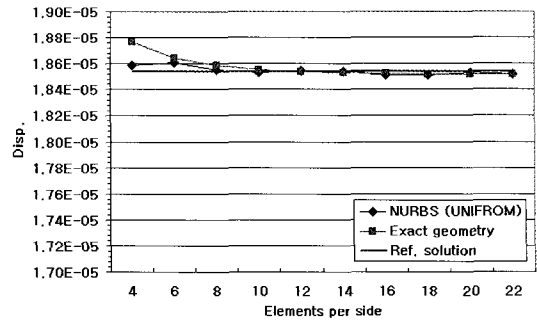
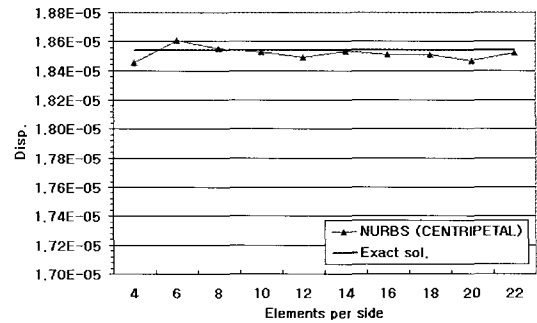


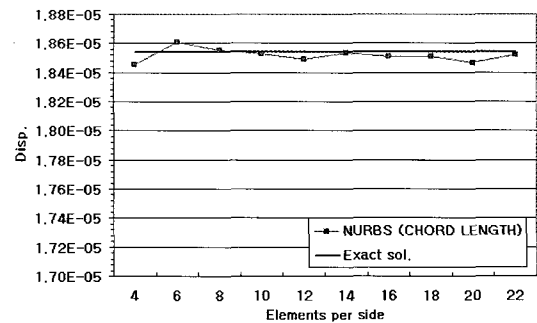
Fig. 7 Geometry and material properties of pinched cylinder problem



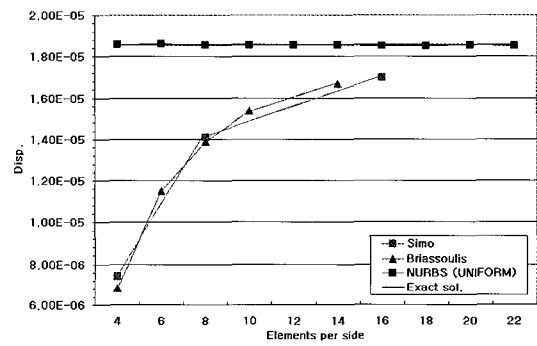
(a) Uniform parameterization



(b) Centripetal parameterization



(c) Chord length parameterization



(d) Comparison of convergence rate
Fig. 8 Analysis results of cylinder problem

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$x(\theta^1, \theta^2) = r \cos(\theta^1), y(\theta^1, \theta^2) = r \sin(\theta^1), z(\theta^1, \theta^2) = \theta^2 \quad (21)$$

Fig. 9(a)의 그래프에서 Exact geometry는 곡면을 나타내는 식을 사용하여 곡면을 생성하고 해석을 수행한 결과이다. Fig. 8(a)의 그래프에서 보는 바와 같이 본 연구에서

NURBS곡면식을 사용하여 해석을 수행하였을 경우 적은 요소를 사용하더라도 빠르게 수렴함을 확인할 수 있다. 또한 Fig. 8(d)에서 보는 바와 같이 이미 보고된 해석 결과와 비교하였을 때 적은 수의 요소를 사용하더라도 그 수렴성이 월등함을 확인할 수 있다. 이는 기존의 평면 쉘 요소는 곡면의 기하학적 정보를 보간을 통해 구하게 되므로 곡면의 기하학적 형상 및 특성을 정확히 표현하기 위해서는 많은 수의 요소를 사용해야 함에 반해 본 연구에는 NURBS곡면식으로 곡면을 표현하는 경우에는 곡면식으로부터 기하량을 직접 계산하게 됨으로써 기하학적 오차를 최소화 할 수 있기 때문이다.

5.1.2 집중 하중이 주어진 반구 예제

상단에 18°의 구멍이 뚫린 반구 예제에 대하여 해석을 수행하였다. 하단은 변위에 대한 경계조건이 없는 자유로운 상태이다. 이 예제는 멤브레인 파트의 잠김 현상과 정확한 강체 모드를 테스트하기 위해 고안되었으며 최대 변위의 정해는 0.094이다. 이 예제의 경우에는 Fig. 10(b)(c)에서 보는 바와 같이 centripetal 또는 chord length 방법을 이용하여 곡면을 생성하여 해석한 경우가 uniform parameterization을 사용하여 곡면을 생성하고 해석한 경우보다 좋은 결

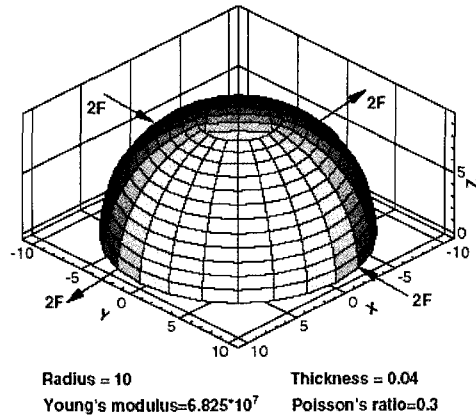
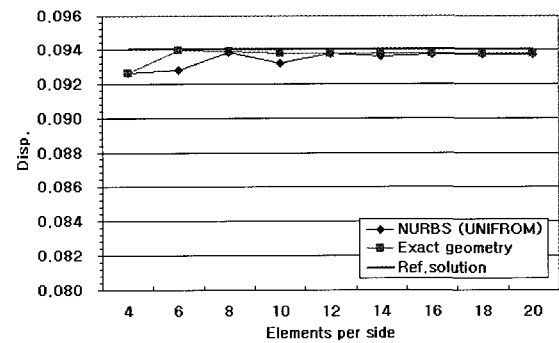


Fig. 9 Geometry and material properties of pinched hemi-sphere problem

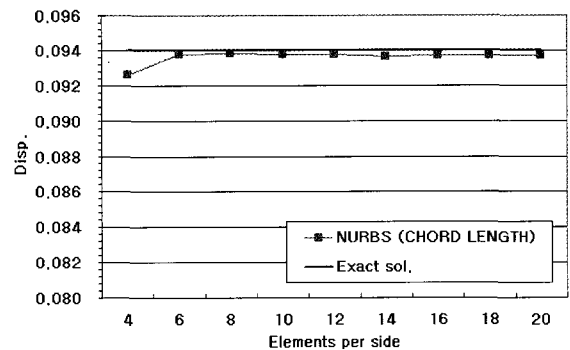
과를 보여 주었다. 게다가 Fig. 10(d)에서 확인할 수 있듯이 이미 발표된 해석 결과와 비교하여 볼 때 적은 수의 요소를 사용함에도 매우 빠른 수렴성을 보여주고 있다.

5.2.3 멕시코 모자(Mexican hat) 예제

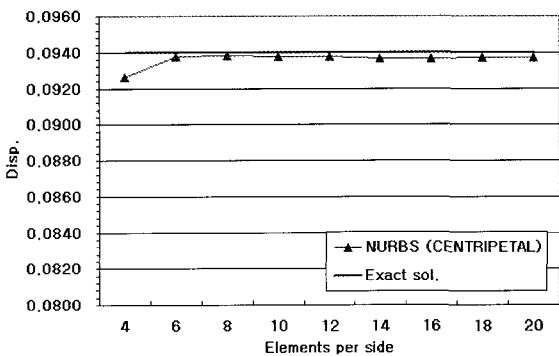
이 예제는 매우 급격하게 변하는 곡률을 가진 곡면 형상에 대한 예제로서 다음과 같은 식으로 곡면을 수학적으로 표현



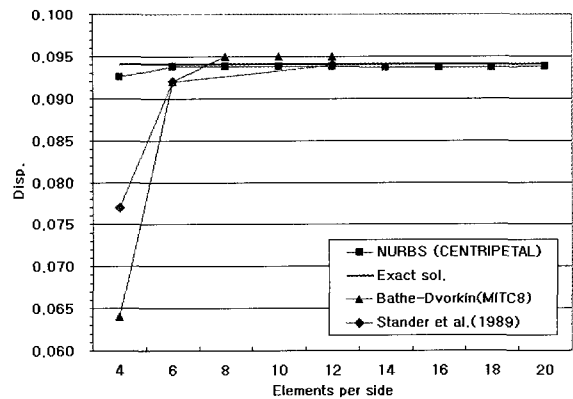
(a) Uniform parameterization



(b) Chord length parameterization



(c) Centripetal parameterization



(d) Comparison of convergence rate

Fig. 10 Analysis results of hemi-sphere problem

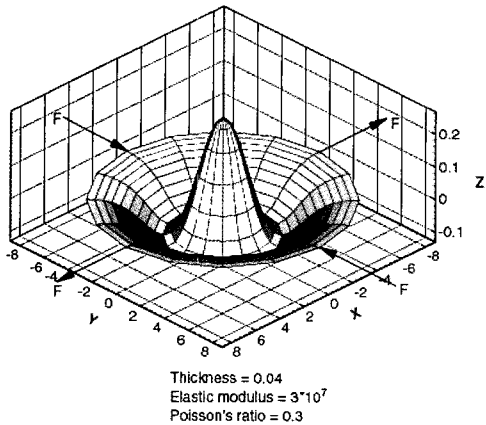
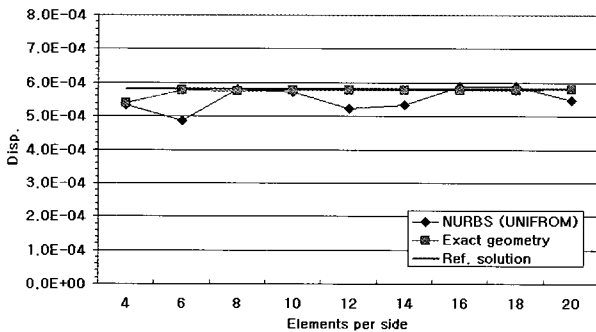
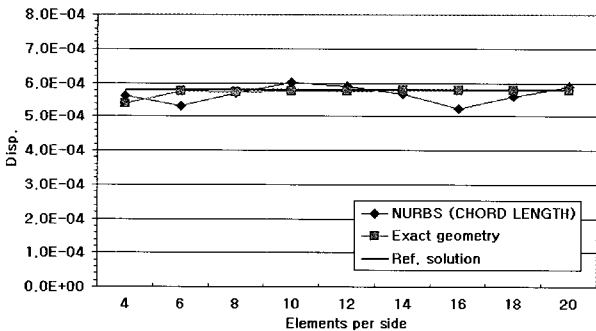


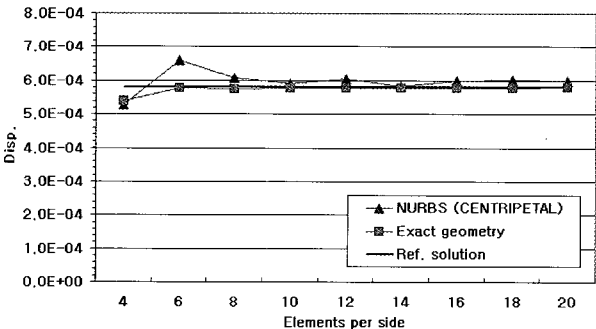
Fig. 11 Geometry and material properties of pinched Mexican-hat problem



(a) Uniform parameterization



(b) Chord length parameterization



(c) Centripetal parameterization

Fig. 12 Analysis results of Mexican-hat problem

할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta^1, \theta^2) &= x(\theta^1, \theta^2)\vec{e}_x + x(\theta^1, \theta^2)\vec{e}_y + x(\theta^1, \theta^2)\vec{e}_z \\ x(\theta^1, \theta^2) &= \theta^1 \cos(\theta^2) \\ y(\theta^1, \theta^2) &= \theta^1 \sin(\theta^2) \\ z(\theta^1, \theta^2) &= \left(\frac{\sigma^2 - (\theta^1)^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(\frac{-(\theta^1)^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

곡률은 변수 σ 값에 따라 변하게 되며 이 문제에서는 σ 의 값을 1로 정하였다.

수렴값(5.7879×10^{-4})은 NASTRAN QUAD4 요소를 사용하여 해석한 결과로 하였다. 해석결과에서 볼 수 있듯이 이 예제의 경우 uniform parameterization으로 NURBS 곡면을 생성하였을 경우 좋지 않은 결과(Fig. 12(a))를 보였으며 centripetal parameterization 방법으로 곡면을 생성하여 해석을 수행하였을 경우 가장 좋은 결과(Fig. 12(c))를 보여 주었다. 이는 앞서 언급한 바와 같이 곡면에 뾰족한 돌출부가 있는 경우 chord length보다 centripetal parameterization을 사용할 경우 곡면을 가장 정확하게 근사하기 때문이다.

5.2 수학적으로 정확한 2차 NURBS곡면

전술한 바와 같이 NURBS곡면은 2차곡면을 수학적으로 정확하게 표현할 수 있는 장점을 가지고 있다. 실제로 설계 시 대부분의 곡면이 2차 곡면들의 조합으로 이루어지기 때문에 이러한 특성은 유용하다 할 수 있다.

5.2.1 집중하중이 가해지는 실린더 셸

앞서 살펴본 예제의 실린더 곡면을 곡면의 좌표 데이터를 보관하지 않고 정확한 조정점의 좌표(P_i)와 해당되는 가중치 값(w_i)을 부여하여 수학적으로 정확한 NURBS곡면 (Fig. 13)을 생성하여 해석한 결과와 식 (21)의 곡면의 식을 사용하

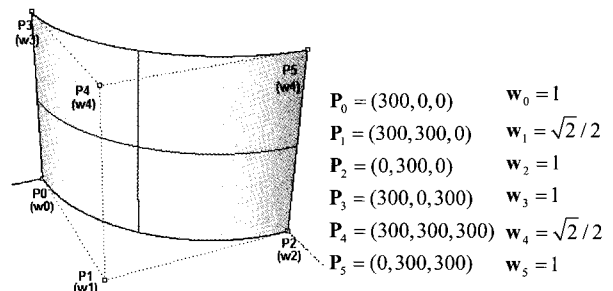


Fig. 13 Control points and weights for the exact NURBS surface

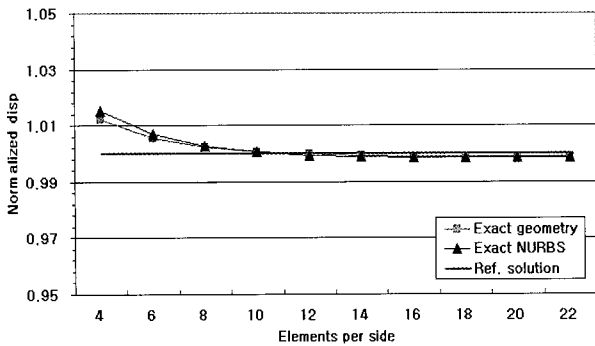


Fig. 14 Convergence of normalized radial displacement

여 생성한 곡면으로 해석을 수행한 결과를 비교 하여 보았다.

Fig.14에서 보는 바와 같이 수학적인 곡면식을 이용하여 곡면을 생성하고 해석을 수행한 결과(Exact geometry)와 적절한 조정점 및 가중치를 부여하여 수학적으로 정확한 2차 NURBS곡면을 생성하고 해석한 결과(Exact NURBS)가 거의 일치함을 확인할 수 있다.

5.2.2 집중하중이 주어진 반구 예제

5.1.2의 반구 예제 역시 2차 곡면이므로 적절한 조정점

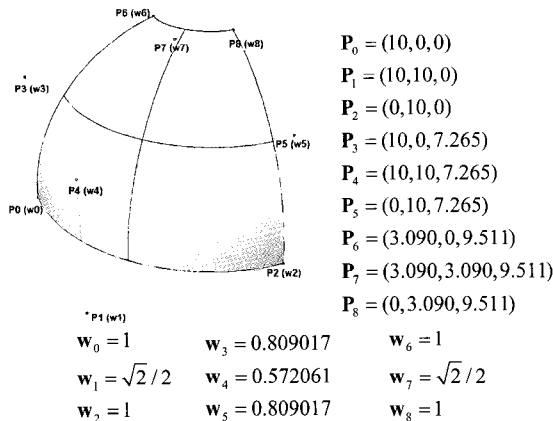


Fig. 15 Control points and weights for the exact NURBS surface

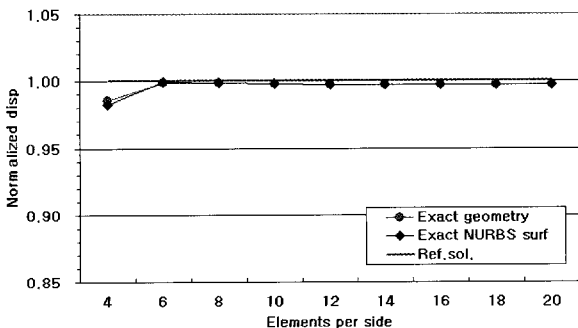


Fig.16 Convergence of normalized radial displacement

좌표(P_i)와 가중치(w_i)를 부여하게 되면 수학적으로 정확한 NURBS곡면 생성이 가능하다.

Fig.16에서 보는 바와 같이 역시 수학적인 곡면식을 이용하여 곡면을 생성하고 해석을 수행한 결과(Exact geometry)와 적절한 조정점 및 가중치를 부여하여 수학적으로 정확한 2차 NURBS곡면을 생성하고 해석한 결과(Exact NURBS)가 일치함을 확인할 수 있다.

6. 결 론

본 연구를 통해 일반 곡선 좌표계에 기초한 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소를 이용한 쉘 구조물의 해석과 NURBS 곡면을 이용한 기하 모델링의 연동을 가능하게 하는 프레임 워크를 구현하였다. 임의의 형상의 곡면에 대한 효과적인 해석을 위하여 기하학적으로 정확한 쉘 요소를 사용하였고 잠김 현상을 해결하기 위하여 가정된 변형률 방법과, 격자 뒤틀림에 민감하지 않도록 거품함수를 도입하였다. 매개화된 쉘 곡면의 생성을 위하여 주어진 곡면의 좌표 데이터들을 보간하여 NURBS곡면을 생성하였다. 쉘 유한요소해석 시 절점에서의 기하량을 보간하여 사용하지 않고 NURBS곡면식으로부터 필요한 기하량을 직접 계산함으로써 기하학적 오차를 크게 줄일 수 있었고, 몇 가지 잘 알려진 벤치마크 쉘 구조에 대한 해석을 통해 개발된 프레임워크의 효율성 및 성능을 검증하였다. 아울러 주어진 데이터 점들을 보간하여 NURBS곡면을 생성할 시에 사용되는 parameterization 방식에 따라 생성되는 곡면의 형상 및 정확도에 차이가 생기며 각각의 방식으로 곡면을 생성하여 해석을 수행함으로써 그 차이점을 확인할 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 2006년도 산업자원부에 의해 지원되었으며, 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1970), Analysis of thick and shell structures by curved finite element., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, pp.419~459.

Budiansky, B., Sanders, J.L. Jr. (1963) On the "best" First-Order Linear Shell Theory. *Prog. Appl. Mech.* 20, pp.129~140.

Cho, M., Roh, H.Y. (2003), Development of Geome-

- trically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(1), pp.81~115.
- Green, A.E., Zerna, W.** (1968), *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press.
- Lee, E.T.Y.** (1989), Choosing nodes in parametric curve interpolation, *CAD*, 21, pp.363~370.
- Les. Piegl, Wayne. T.** (1997), *The NURBS Book*, Springer-Verlag, New York, NY Second Edition.
- Naghdi. P.M.** (1963), *Foundations of Elastic Shell Theory. Progress in Solid Mechanics* 4, Edited by Sneddon, I.N. North-Holland.
- Roh. H.Y., Cho. M.** (2004), The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces, *Computer Meth. Applied Mech and Engrg.* 193, pp.2261~2299.
- Roh. H.Y., Cho. M.** (2005), Integration of geometric design and mechanical analysis using B-spline functions on surface, *Int.J.Numer.Meth.Engng*, 62, pp.1927~1949.
- Simo. J.C., Fox. D.D.** (1989), On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 73, pp.267~304.
- Simo. J.C., Fox. D.D.** (1989), S. Rafia, On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 73 pp.53~92.