

비동질 반무한 평면에서의 비례경계유한요소법

Scaled Boundary Finite Element Methods for Non-Homogeneous Half Plane

이 계 희†

Lee, Gye-Hee

(논문접수일 : 2006년 7월 8일 ; 심사종료일 : 2007년 2월 2일)

요 지

본 논문에서는 비동질 반무한 평면에 대한 비례경계유한요소법의 식을 유도하고 수치예제를 해석하였다. 비례경계유한요소법은 편미분 방정식을 경계방향으로는 유한요소와 같은 근사를 통해서 약화시키고 방사방향으로는 정확해를 사용하는 반 해석적인 방법으로, 방사방향으로 멱함수를 따라 탄성계수가 변화되는 반무한 평면에 대해서 관계식을 가상일의 원리에 근거하여 새로이 유도하였다. 이 과정에서 반무한평면의 거동이 Euler-Cauchy방정식을 따름을 보이고, 기존의 동질 반무한평면의 해석시 도입되던 로그모드가 비동질 반무한 평면의 해석에는 유효하지 않음을 보였다. 수치예제를 통하여 유도된 식이 타당한 거동을 보임을 증명하고 이 접근법이 실제 공학적 문제의 해결에 있어서 유용함을 보였다.

핵심용어 : 비례경계유한요소법, 비동질반무한 평면, Euler-Cauchy 방정식, 가상일의 원리

Abstract

In this paper, the equations of the scaled boundary finite element method are derived for non-homogeneous half plane and analyzed numerically. In the scaled boundary finite element method, partial differential equations are weakened in the circumferential direction by approximation scheme such as the finite element method, and the radial direction of equations remain in analytical form. The scaled boundary equations of non-homogeneous half plane, its elastic modulus varies as power function, are newly derived by the virtual work theory. It is shown that the governing equation of this problem is the Euler-Cauchy equation, therefore, the logarithm mode used in the half plane problem is not valid in this problem. Two numerical examples are analysed for the verification and the feasibility.

Keywords : Scaled boundary finite element method, non-homogeneous half plane, Euler-Cauchy equation, Virtual work theory

1. 서 론

지반과 같은 무한영역(unbounded domain)의 해석은 공학적인 문제에서 자주 발생하는 난제중의 하나이다. 전산기가 발달하기 전까지는 주로 해석적인 접근에 의해서 무한영역을 고려하고 이의 거동을 추정하였지만, 이 과정은 실제 지반을 적절한 미분방정식으로 나타내기 위하여 여러가지 가정과 해석영역의 형상에 대한 가정이 필수적이었다. 전산역학이 발달하면서 유한요소법이나 경계요소법 등의 해석법이 정립되고, 이에 따라 다양한 조건에 대한 공학적인 접근을 이룰 수 있었으나 무한영역의 처리는 근사해법이나 큰 해석영역을 가정하

여 해석할 수 밖에 없었다. 이외에도 무한요소(이완훈 등, 2001)나 다른해석법과의 조합(김재민 등, 2000)등 다양한 수치해석법들이 이러한 문제를 해결하기 위하여 개발되었다.

비례경계유한요소법(scaled boundary finite method)은 비교적 최근에 개발된 전산해석기법(Wolf 등, 1996a; Wolf 등, 1996b)으로 원래는 동적지반 구조물 상호작용의 해석을 위하여 개발된 방법이다. 그러나 이 해석법이 갖는 장점이 부각되면서 이를 다양한 문제에 적용하려는 시도(Song 등, 1999; Deeks 등, 2003)가 계속되었고, 특히 정적인 문제에서는 해석법이 갖는 여러가지 특성들을 이용한 해석법(Deeks, 2003; Deeks 등, 2003)이 제시되었고, 적

† 책임저자. 정회원 · 목포해양대학교 해양시스템공학부 조교수
Tel: 061-240-7237 ; Fax: 061-240-7284
E-mail: lghlsk@mmu.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

응적 해석(Deeks 등, 2002c; Deeks 등, 2002d; Vu 등)이나 유사경계를 갖는 경우의 해석(2003) 등이 시도되었다. 그러나 전반적으로 볼 때 비례경계유한요소법은 아직도 개발 과정에 있는 해석법이며, 이러한 점에서 다양한 공학적인 문제에 적용하기 위한 접근법이 개발되어야 할 필요성이 상존하고 있다. 이 중 하나가 비동질 반무한공간에 대한 적용이며, 이는 깊이가 증가할수록 강도가 커지는 지반의 특성을 나타낼 수 있는 중요한 접근법이다. 일반적으로 유한요소법은 세분화된 요소망에서 각 요소의 탄성계수를 달리 부여하여 이를 반영하지만, 비례경계유한요소법은 비례중심에서 방사방향에 대해서는 이와 같은 현상을 수식적으로 표현할 수 있다. 이러한 비동질 무한영역에 대한 비례경계유한요소법의 적용은 Doherty 등(2003)에 의해서 처음 시도되었다. 이 연구에서는 해저면에 매입되는 원형의 기초를 해석하기 위하여 축대칭영역을 가정하고 식을 유도하였다. 그러나 실제 공학적인 해석에 널리 사용되는 반무한평면에 대해서는 아직 비동질을 고려한 연구가 수행되지 않았고, 또한 무한평면의 해석시 사용되는 로그모드(Deeks 등, 2002b)와의 상관관계도 규명되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 비동질 반무한평면에 대한 비례경계유한요소법의 기본식을 유도하고 무한평면의 해석에 사용되는 로그모드와의 관계를 규명하였다.

본 논문의 구성은 2절에서 비례경계변환과 비례경계유한요소법의 기본식을 간략히 설명하고, 3절에서는 비동질 반무한평면에 대한 비례경계유한요소법의 기본식을 가상의 원리에 의해서 유도하고 비동질 반무한 평면과 로그모드와의 관계를 설정하였다. 4절에서 본 논문에서 유도된 식의 타당성을 수치예제를 통하여 설명하였다. 5절에서는 결론을 제시하였다.

2. 비례경계유한요소법

비례경계유한요소법(scaled boundary finite element method)은 해석영역의 경계방향(circumferential direction)이 유한요소법과 같은 방식으로 이산화되고, 비례중심을 기준으로한 방사방향(radial direction)으로는 비례계수를 이용하여 나타낸다. 직교좌표계를 비례경계좌표계로 바꾸는 것은 비례경계변환(scaled boundary transformation)이라 부르며 기본적으로 이 과정은 닳은 꼴을 이용한 것이다. 경계에 대한 이산화는 임의의 형태를 가진 경계에 대하여 불연속적인 경계조건의 도입을 가능하게 한다.

직교좌표계 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 는 경계조건이 부여되어야 하는 경계를 일정한 값으로 나타낼 수 없기 때문에 경계를 따르는 수치적인 이산화에는 적절하지 않다(그림 1). 경계방향의 좌표인

η, ζ 가 경계이거나, 경계에 평행한 국부좌표계 ξ, η, ζ 를 가정하는 것이 모델링에 더 유리하다. 따라서 비례중심으로부터의 좌표인 ξ 를 방사방향 좌표로 나타내어 해석적으로 풀고 경계방향인 η, ζ 에 대하여 유한요소법과 같이 가중잔여치법에 바탕을 두고 수치적으로 푼다. 이를 통해 편미분 방정식(partial differential equations)을 방사방향의 좌표 ξ 에 대한 상미분방정식(ordinary differential equation)으로 변환시킬 수 있다. 이 때 상미분방정식의 계수들은 경계방향의 유한요소에 의해서 결정된다. 상미분방정식은 미지수가 하나이기 때문에 편미분방정식에 비하여 해석적으로 쉽게 풀 수 있다. 이러한 장점을 취하여 비례경계 유한요소법이 개발되었고, 이는 수치적인 기법과 해석적인 기법의 장점을 취할 수 있는 바탕이 되었다. 따라서 이 방법은 편미분방정식을 해석하기 위한 준해석적(semi-analytic)방법이다. 경계와 평행한 경계방향에서의 거동은 일반적으로 매끈하며 유한요소법과 같은 가중잔여치법으로 근사한다. 유한영역(bounded domain)에 대해서는 경계에서 영역의 내측으로 방사좌표방향으로는 응력집중이나 특이점이 허용되고, 이를 해석적인 방법으로 풀 수 있다. 무한영역의 경우에서는 방사방향의 좌표가 경계에서 무한대 방향으로 증가하며, 무한점에서의 경계조건(방사조건: radiational condition)을 해석적으로 만족시킬 수 있다.

비례경계좌표계의 중심은 비례중심(scaling center)이라고 불리며, 이 비례중심과 경계사이에는 다른 경계가 있어서는 안된다. 그림 1에서는 편의상 직교좌표계의 중심과 비례중심을 일치시켰다. 유한영역에서 비례중심은 영역내에 존재하고 경계의 한 점으로 선택할 수도 있다. 이 경우 해석영역의 비례중심과 경계를 연결하는 선상에 있는 측면(side face)과 이산화된 경계의 내부이다. 무한영역의 경우에 비례중심은 영역밖에 있으며 이 경우도 비례중심과 경계를 잇는

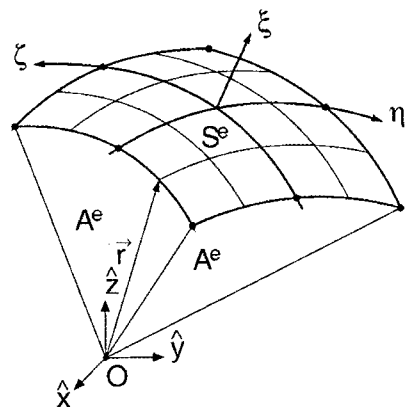


그림 1 3차원공간에 대한 비례경계변환(Wolf, 2003)

측면경계가 발생할 수 있다. 여기서 측면경계를 제외한 경계 S 만 유한요소와 같은 방법으로 이산화 된다. 이 유한요소를 비례경계유한요소라 부른다. 전형적인 유한요소는 그림 1에 나타내었다. 경계상의 임의점 x, y, z 를 나타내기 위하여 국부좌표계 η, ζ 로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} x(\eta, \zeta) &= [N(\eta, \zeta)]\{x\} \\ y(\eta, \zeta) &= [N(\eta, \zeta)]\{y\} \\ z(\eta, \zeta) &= [N(\eta, \zeta)]\{z\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $[N(\eta, \zeta)]$ 는 상사함수이고, $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ 는 좌표벡터이다. 3차원 영역은 비례경계좌표계로 다음과 같이 비례중심으로부터의 무차원 거리 ξ 를 이용하여 나타낸다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi x(\eta, \zeta) \\ \hat{y}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi y(\eta, \zeta) \\ \hat{z}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi z(\eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

경계에서는 $\xi = 1$ 이고, 비례중심에서는 $\xi = 0$ 이다. 유한영역에 대해서는 $0 \leq \xi \leq 1$ 이고, 무한영역에 대해서는 $1 \leq \xi \leq \infty$ 이다. 이 좌표계는 ξ 와 다른 두개의 경계방향 좌표 η, ζ 로 구성되어 있다. 경계에서의 변위는 유한요소의 형상함수 $[N(\eta, \zeta)]$ 를 이용하여 나타낸다. 이 형상함수는 일반적인 유한요소에서 사용되는 것과 동일한 것이다. 이러한 이산화는 경계에만 국한되고 다른 동일한 ξ 값을 선상에서의 변위 $\{u(\xi)\}$ 는 경계와 동일한 형상함수로 보간한다.

$$\{u(\xi, \eta, \zeta)\} = [N(\eta, \zeta)]\{u(\xi)\} \quad (3)$$

경계와 비례중심을 잇는 선상에서의 변위 $\{u(\xi)\}$ 는 방사좌표 ξ 의 대한 함수이다. 이는 적절한 상미분방정식을 이용하여 해석적으로 구할 수 있다. 경계방향으로는 경계의 형상을 정의하는데 사용했던 형상함수와 동일한 함수를 사용하여 변위를 보간한다(식 (1)). 식 (3)에 의해 결정되는 근사해는 일반적인 경계방향좌표 η, ζ 와 변위 ξ 간의 변수분리법으로 이해될 수 있다. 식 (3)은 비례경계변환(식 (1), 식 (2))을 구성하고, 비례경계유한요소법의 기초가 된다. 참고적으로 일반적인 유한요소변환(식 (4))에서는 $\{u\}$ 가 영역전체에 걸쳐 보간된다.

$$\{u(\xi, \eta, \zeta)\} = [N(\xi, \eta, \zeta)]\{u\} \quad (4)$$

식 (2)는 닳은 꼴의 중심인 비례중심과 임의점에서의 닳은 비인 ξ 를 나타내고 있다. 일정한 ξ 를 가지는 점들이 이루는 면은 경계와 같은 방법으로 보간한다. 비례경계변환에서 일정한 η, ζ 에 대해서 방사방향의 좌표는 ξ 만의 함수이다(식 (3)). 질량행렬이나 탄성계수행렬같은 재료특성은 일반적인 유한요소법과 같이 경계방향으로 변화가 가능하다.

비례경계유한요소법에서는 경계만 이산화되기 때문에 유한요소법의 개념을 경계요소법에 도입했다고 할 수 있다. 요약하면 비례경계유한요소법은 준해석적인 유한요소법에 기초를 둔 기본해가 필요없는 경계요소법이라 할 수 있다.

3. 비동질반평면에서의 비례경계 유한요소법의 유도

3.1 비동질반평면의 물성치

비동질반무한평면을 고려하기 위하여 그림 2와 같은 반무한 평면과 경계를 생각한다. 무한영역의 비례중심이 좌표 $(0, y_1)$ 에 있다고 가정하고 반무한평면의 물성치가 다음과 같은 멱함수(power function)를 따른다고 가정하자.

$$E = m_E y^\alpha \quad (5)$$

여기서 m_E 은 상수이고, α 는 반무한 평면의 비동질을 나타내는 계수이다. 따라서 무한평면에서의 탄성계수는 두 개의 변수 y_1 와 α 에 의해서 결정된다.

$$E_0 = m_E y_1^\alpha \quad (6)$$

임의점의 탄성계수를 비례경계좌표식으로 나타내면 다음과 같다.

$$E(\xi, s) = m_E (\xi y(s))^\alpha = m_E \xi^\alpha (y(s))^\alpha \quad (7)$$

여기에서 s 는 경계방향을 따르는 좌표이다. $\xi = 1$ 인 경계를 지나는 선분을 가정하면 깊이 y 에서의 탄성계수는 다음과 같은 비례식에 의해서 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\xi} = \frac{y_1}{y} \quad (8)$$

$$y(s) = y_1 = \frac{y}{\xi} \quad (9)$$

$$E = m_E \xi^\alpha \left(\frac{y}{\xi}\right)^\alpha = m_E y^\alpha \quad (10)$$

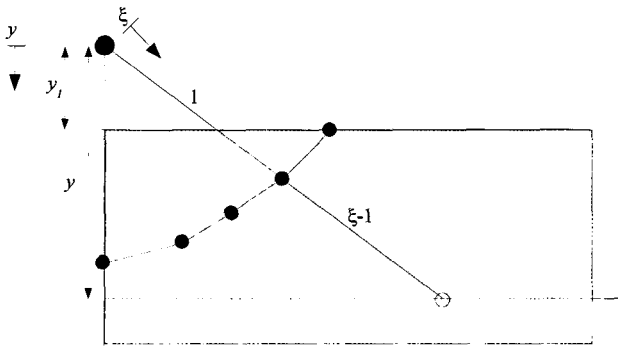


그림 2 수직방향으로 물성치가 변하는 반무한평면

식 (10)에서 임의깊이 y 의 탄성계수는 y 만의 함수임을 알 수 있다. 즉 동일한 깊이에서는 ξ 값에 상관없이 동일한 탄성계수가 산정된다. 따라서 본 연구의 대상이 되는 무한평면은 수평방향으로는 일정한 값을 가지고 수직방향으로는 깊이의 역함수로 변하는 물성치를 가진다. 따라서 본 논문에서 대상으로 하는 지반은 단일지층을 대상으로 하며 지층에 따라 불연속으로 변하는 경우는 해당되지 않는다.

3.2 비례경계유한요소법의 정식화

탄성영역에서 응력의 근사값은 다음과 같이 나타낸다 (Wolf, 1996a).

$$\begin{aligned} \{\sigma_h(\xi, s)\} &= [D(s)] \xi^\alpha \{\varepsilon_h(\xi)\} \\ &= [D(s)] \xi^\alpha \left\{ [B^1(s)] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(s)] \{u_h(\xi)\} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $D(s)$ 는 경계에서의 탄성계수 행렬이고, $[B^1(s)]$, $[B^2(s)]$ 는 각각 변위-변형률관계를 나타내는 행렬이다. 이에 상응하는 가상변형률은 다음과 같다.

$$\{\delta\varepsilon(\xi, s)\} = \left\{ [B^1(s)] \{\delta u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(s)] \{\delta u(\xi)\} \right\} \quad (12)$$

유도과정의 편의를 위해서 유한영역을 가정하고 ($0 \leq \xi \leq 1$) 측면하중(side face load)과 체적력(body load)이 없는 경우를 생각하자. 무한평면의 정적해석의 경우에는 측면하중과 체적력이 무시된다. 측면하중에 대한 고려는 뒷 부분에 다시 정리하였다.

임의의 영역에 작용하는 정적하중에 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_V \{\delta\varepsilon(\xi, s)\}^T \{\sigma_h(\xi, s)\} dV - \int_S \{\delta u(s)\}^T \{t(s)\} ds = 0 \quad (13)$$

여기서 $dV = |J| \xi d\xi ds$ 이고, $|J|$ 는 경계요소의 자코비안이다. 식 (13)에서 첫 번째 항은 내부일을 나타내고 두 번째 항은 외부일을 나타낸다.

식 (11), 식 (12), 식 (13)에 대입하면 내부일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_V \{\delta\varepsilon(\xi, s)\}^T \{\sigma_h(\xi, s)\} dV \\ &= \int_s^1 \left\{ [B^1(s)] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(s)] \{u_h(\xi)\} \right\}^T \\ & \quad \times [D(s)] \xi^\alpha \left\{ [B^1(s)] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(s)] \{u_h(\xi)\} \right\} \xi d\xi ds \\ &= \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \\ & \quad + \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^\alpha [E^1] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^{\alpha-1} [E^2] \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 계수행렬은 다음과 같이 정의한다.

$$[E^0] = \int_s [B^1(s)]^T D(s) [B^1(s)] |J| ds \quad (15)$$

$$[E^1] = \int_s [B^2(s)]^T D(s) [B^1(s)] |J| ds \quad (16)$$

$$[E^2] = \int_s [B^2(s)]^T D(s) [B^2(s)] |J| ds \quad (17)$$

식 (14)에서 $\{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T$ 을 포함하는 항을 ξ 에 대하여 부분적분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}_{,\xi}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \\ &= \{\delta u\}^T \left[[E^0] \{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u_h\} \right] \\ & \quad - \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + (\alpha+1) \xi^\alpha [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \right] d\xi \\ & \quad - \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[\xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\}_{,\xi} + \alpha \xi^{\alpha-1} [E^1]^T \{u_h(\xi)\} \right] d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

식 (13)에서 외부일에 대한 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_s \{\delta u(s)\}^T \{t(s)\} ds = \{\delta u\}^T \int_s \{N(s)\}^T \{t(s)\} ds \quad (19)$$

식 (19)의 좌변은 표면력에 의한 등가절점하중 $\{P\}$ 로 나타낼 수 있다. 식 (14)과 식 (18), 식 (19)를 가상일의 원리인 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \{\delta u\}^T \left[[E^0] \{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u_h\} \right] - \{\delta u\}^T \{P\} \\ & + \int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \left[-\xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} - (\alpha+1) \xi^\alpha [E^0] - \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \right. \\ & \quad \left. - \xi^\alpha [E^1]^T \{u_h(\xi)\}_{,\xi} - \alpha \xi^{\alpha-1} [E^1]^T \{u_h(\xi)\} + \xi^\alpha [E^1] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \right. \\ & \quad \left. + \xi^{\alpha-1} [E^2] \{u_h(\xi)\} \right] d\xi = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $\{\delta u(\xi)\}^T$ 는 임의의 함수이므로 모든 $\{\delta u(\xi)\}^T$ 에 대하여 위 식을 만족시키려면 다음과 같은 조건이 충족되어야 한다.

$$\{P\} = \left[[E^0] \{u_h\}_{,\xi} + [E^1]^T \{u_h\} \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \xi^{\alpha+1} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} \\ & + [(\alpha+1)[E^0] + [E^1]^T - [E^1]] \xi^\alpha \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \\ & + [\alpha [E^1]^T - [E^2]] \xi^{\alpha-1} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

벡터 $\{F_i(\xi)\}$ 가 ξ 방향 측면하중의 변화를 나타낸다면 측면하중에 의한 추가적인 외부일은 다음과 같다.

$$\int_0^1 \{\delta u(\xi)\}^T \{F_i(\xi)\} d\xi \quad (23)$$

식 (23)을 식 (20)에 추가하고 식 (22)의 양변에 ξ 를 곱하면 비동질 반평면문제에 대한 변위방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \xi^{\alpha+2} [E^0] \{u_h(\xi)\}_{,\xi\xi} + \xi^{\alpha+1} [(\alpha+1)[E^0] + [E^1]^T - [E^1]] \{u_h(\xi)\}_{,\xi} \\ & + \xi^\alpha [\alpha [E^1]^T - [E^2]] \{u_h(\xi)\} + \xi \{F_i(\xi)\} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

3.3 해의 산정과정

식 (24)의 일반해는 측면하중을 무시하는 경우 ($\{F_i(\xi) = 0\}$) 제차방정식(homogeneous equation)을 풀어서 얻을 수 있다. 이 일반해는 독립적인 경계(s)상의 절점변위의 변형모드 $\{\phi_i\}$ 를 선형조합하여 얻을 수 있다.

$$\{u_h(\xi)\} = c_1 \xi^{-\lambda_1} \{\phi_1\} + c_2 \xi^{-\lambda_2} \{\phi_2\} + \dots \quad (25)$$

여기서 c_i 는 각각의 변형모드가 전체해에 기여하는 정도를 나타내는 계수이다. 그리고 λ_i 는 방사방향으로 절점변위모드의 형상을 나타내는 지수이다.

각 변형모드는 다음과 같은 형식을 가진다.

$$\{u_h(\xi)\} = \xi^{-\lambda_i} \{\phi_i\} \quad (26)$$

식 (26)을 식 (24)의 제차식에 대입하면 다음과 같은 특성방정식(characteristic equation)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_i^2 [E^0] + \lambda_i ([E^1] - [E^1]^T - \alpha [E^0]) \right. \\ & \quad \left. + (\alpha [E^1]^T - [E^2]) \right] \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (27)$$

등가절점력 $\{q\}$ 는 각 변형모드와 평형을 이루는 각 모드에서의 절점력이다.

$$\{q_i\} = [[E^1]^T - \lambda_i [E^0]] \{\phi_i\} \quad (28)$$

식 (27)에 나타난 2차의 고유치문제는 식 (28)정리하여 식 (27)에 대입하면 1차의 고유치문제로 전환할 수 있다. 그러나 이 과정에서 계산하여야 하는 고유치의 수는 2배가 된다. 식 (28)을 다른 형태로 바꾸면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda_i \{\phi_i\} = [E^0]^{-1} \left[[E^1]^T \{\phi_i\} - \{q_i\} \right] \quad (29)$$

식 (29)을 식 (27)에 대입하고 $\lambda_i \{q_i\}$ 에 대해서 풀면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \lambda_i \{q_i\} = \left[[E^1] [E^0]^{-1} [E^1]^T - [E^2] \right] \{\phi_i\} \\ & \quad + \left[\alpha [I] - [E^1] [E^0]^{-1} \right] \{q_i\} \end{aligned} \quad (30)$$

식 (29)과 식 (30)을 고유치 형태의 행렬로 재배열하면 식 (27)에 대한 1차의 고유치방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다(첨자생략).

$$\begin{bmatrix} [E^0]^{-1} [E^1]^T & -[E^0]^{-1} \\ [E^1] [E^0]^{-1} [E^1]^T - [E^2] & \alpha [I] - [E^1] [E^0]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix} \quad (31)$$

참고적으로 축대칭문제에 있어서 고유치는 다음과 같은 관계식으로 나타난다(Doherty 등, 2003).

$$\begin{bmatrix} [E^0]^{-1}[E^1]^T & -[E^0]^{-1} \\ [E^1][E^0]^{-1}[E^1]^T & (\alpha+1)[I]-[E^1][E^0]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \phi \\ q \end{Bmatrix} \quad (32)$$

측면하중에 대한 특수해(particular solution)를 얻기 위해서는 측면하중을 ξ 의 멱함수로 나타낸다.

$$\{F_i(\xi)\} = \xi^t \{F_i\} \quad (33)$$

식 (24)의 특수해는 다음과 같다.

$$\{u_i(\xi)\} = \xi^{t-\alpha+1} \{\phi_i\} \quad (34)$$

식 (34)를 식 (22)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & [(t^2 + (2-\alpha)t + 1 - \alpha)[E^0] \\ & + (\alpha - 1 - t)[E^1] + (1+t)[E^1]^T - [E^2]] \xi^{t+1} \{\phi_i\} + \xi^{t+1} \{F_i\} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

따라서 측면하중에 대한 변위모드는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\phi_i\} = & [(t+1)(t-\alpha+1)[E^0] - (t-\alpha+1)[E^1] \\ & + (t+1)[E^1]^T - [E^2]]^{-1} \{-F_i\} \end{aligned} \quad (36)$$

참고로 축대칭문제에서 측면하중에 대한 변위모드는 다음과 같이 나타낸다(Doherty 등, 2003).

$$\begin{aligned} \{\phi_i\} = & [(t-\alpha)(t-\alpha+1)[E^0] + (t-\alpha+1)[(\alpha+2)[E^0] \\ & + [E^1]^T - [E^1]] + (\alpha+1)[E^1]^T - [E^2]]^{-1} \{-F_i\} \end{aligned} \quad (37)$$

따라서 측면하중과 경계에서의 하중을 고려한 변위는 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\{u_h(\xi, s)\} = [N(s)] \left(\xi^{t-\alpha+1} \{\phi_i\} + \sum_{i=1}^n c_i \xi^{-\lambda_i} \{\phi_i\} \right) \quad (38)$$

이에 상응하는 영역의 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\sigma_h(\xi, s)\} = & [D(s)] \xi^t [(t-\alpha+1)[B^1(s)] + [B^2(s)]] \{\phi_i\} \\ & + [D(s)] \sum_{i=1}^n c_i \xi^{\alpha-\lambda_i-1} [-\lambda_i [B^1(s)] + [B^2(s)]] \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (39)$$

3.4 로그변형모드의 적합성

그림 3과 같이 $A(x) = A_0(x/x_0)^n$ 인 봉에 축하중이 작용하고, 이 봉의 탄성계수가 x/x_0 의 멱함수로 다음과 같이 변화한다고 가정하자.

$$E(x) = m_E \left(\frac{x}{x_0} \right)^\alpha \quad (40)$$

무차원 좌표 ξ 를 다음과 같이 가정한다.

$$\xi = \frac{x}{x_0} \quad (41)$$

식 (40)를 미소두께에서의 평형방정식을 이용하여 정리하면 다음과 같은 식으로 정리된다 (Deeks 등, 2002b).

$$\xi^2 u(\xi)_{,\xi\xi} + (n+\alpha)\xi u(\xi)_{,\xi} = 0 \quad (42)$$

여기서 $u(\xi)$ 는 변단면무한봉의 축방향 변위이다.

식 (42)에 적용되는 경계조건은 $\xi=1(x=x_0)$ 에서 A_0 에 작용되는 하중에 대한 평형과 무한점($\xi=\infty$)에서의 변위가 0이 되어야 한다는 것이다. 즉 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = -\sigma(x_0)A(x_0) = \frac{m_E A_0}{x_0} u(\xi=1)_{,\xi} \quad (43)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = 0 \quad (44)$$

식 (42)는 Euler-Cauchy방정식이므로 다음과 같은 해를 갖는 것으로 알려져 있다.

$$u(\xi) = \Phi \xi^\lambda + a \quad (45)$$

여기서 Φ 와 a 는 상수이다. 식 (45)과 식 (42)에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 얻는다.

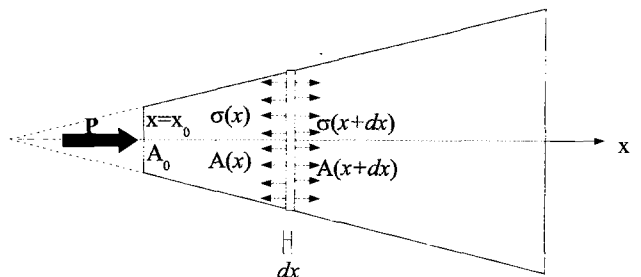


그림 3 멱함수에 따르는 변단면 무한봉

$$(\lambda - 1)\lambda + (n + \alpha)\lambda = 0 \tag{46}$$

λ 가 0인 경우는 식 (45)은 상수가 되어 전체영역이 동일한 변위를 갖는 강체거동을 나타낸다. 따라서 영역에 변형이 발생하는 경우를 가정하면 다음과 같은 변위식을 쓸 수 있다.

$$u(\xi) = \Phi \xi^{1-(n+\alpha)} + a \tag{47}$$

식 (47)을 식 (43)에 적용하면 상수 Φ 를 구할 수 있다.

$$\Phi = \frac{-x_0 P}{(1 - (n + \alpha))m_E A_0} \tag{48}$$

식 (48)을 식 (44)에 대입하고 a 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$a = \frac{x_0 P}{(1 - (n + \alpha))m_E A_0} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{1-(n+\alpha)} \tag{49}$$

$n=1$ 인 경우는 평면문제(평면변형이나 평면응력)를 나타낸다. 만일 해석영역이 동질인 경우($\alpha=0$)라면 평면해석의 경우 식 (48)의 분모가 0이 되고, 따라서 식 (46)은 부정식이 된다. 따라서 이 식을 이용하여 변형을 구할 수 없고 다음의 기본해를 이용하여 해를 다시 구하여야 한다.

$$u(\xi) = \Psi \ln \xi + a \tag{50}$$

따라서 이를 기초로 한 변형모드가 유도되었고(Deeks 등, 2002b), 이는 평면문제에서 가상의 스프링을 부착하여 해를 안정화 시키던 불편을 해소하였다. 그러나 non-homogeneous한 거동을 하는 평면문제($\alpha \neq 0$)에서는 이러한 부정해가 발생하지 않으므로 로그변형모드를 사용할 필요가 없다.

4. 수치예제

4.1 변단면 무한봉 문제

앞 절에서 로그모드에 관한 식을 유도하기 위하여 사용하였던 예제를 비례경계유한요소법을 사용하여 해석하고 이를 정확해와 비교하였다. 주어진 해석영역은 하나의 경계요소를 사용하여 모델링되었다(그림 4). 본 해석에서는 $x_1=1$, $b_0=1$, $p=-1$ 의 값을 사용하였다. 재료의 물성치를 나타내는 값으로 $m_E=100$, $\nu=0.3$, 비동질을 나타내는 계수인 α 는 0.5의 값을 사용하였다. 이 예제는 평면변형의 거동을 하는 것으로 가정하였다.

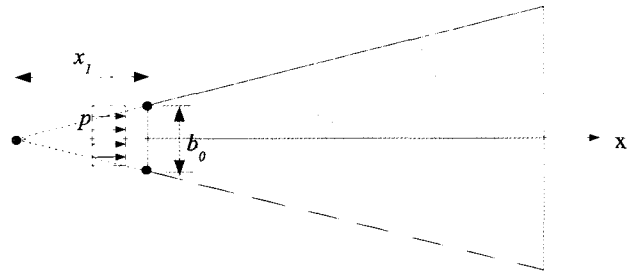


그림 4 변단면 무한봉 문제

해석결과 얻어진 각 변형모드의 고유치와 변형형상은 표 1과 같다. 이 표에서 나타난 고유모드중 고유치의 값이 6.23734인 경우를 제외한 나머지 모드들은 강체운동모드로 해석할 수 있다. 비동질인 수식의 특성상 고유치의 값에 비동질 파라미터 ($\alpha=0.5$)가 추가되어 나타나므로 고유치가 1.5, 0.5, 0.5인 모드는 각각 강체회전모드와 2개의 강체병진모드로 해석할 수 있다. 결국 영역의 탄성변형은 마지막 남은 고유모드에 의해서 결정된다. 얻어진 변위는 y 방향으로서는 좁아지고 x 방향으로서는 동일한 변형을 보이므로 포아슨비의 영향을 나타내는 것으로 해석할 수 있다.

표 1 단일경계요소 모드 해석결과

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	변위
고유치	6.2374	1.5	0.5	0.5	
1-x	-5.321E-05	6.020E-18	2.618E-03	1.544E-02	1.801E-02
1-y	3.872E-04	-8.027E-18	-1.533E-02	1.346E-02	-1.481E-03
2-x	-5.321E-05	-6.020E-18	-2.717E-03	2.078E-02	1.801E-02
2-y	-3.872E-04	-8.027E-18	-1.534E-02	1.721E-02	1.481E-03

이를 해석적인 해와 비교하기 위하여 다음과 같은 해를 구한다. 해석식의 유도에 사용되었던 단일 경사봉의 변위식((47))에서 상수 a 는 두 점사이의 상대적인 변위를 나타내는 경우에는 생략할 수 있다. 계수 Φ 는 본 해석에서 사용된 해석조건인 $x_0=1$, $P=1$, $A_0=1$, $\alpha=0.5$, $n=1$, $m_E=100$ 을 대입하고 하중의 방향을 고려하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi = -\frac{1}{50} \tag{51}$$

따라서 해석적인 변위는 다음과 같다.

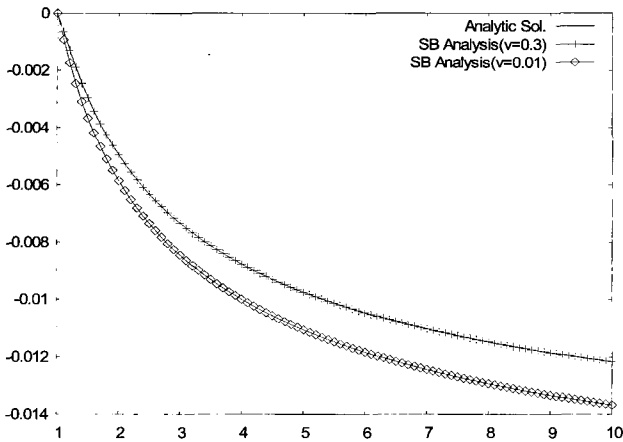


그림 5 무한봉의 축방향변형

$$u(\xi) = -\frac{1}{50} \xi^{-0.5} \quad (52)$$

그러나 이 식을 포아슨비를 고려하지 않은 식이므로 실제 2차원문제에서 포아슨 비를 고려한 경우와는 다른 거동을 보일 것이다. 따라서 해를 검증하기 위하여 포아슨 비 $\nu = 0.01$ 로 하여 해석을 수행하고, 해석영역의 시점을 기준으로 상대변위를 구한 결과를 비교하면 그림 5와 같다. 이 그림에서 보이는 바와 같이 포아슨비를 0.3으로 가정한 경우에는 해석적으로 얻어진 해와 큰 차이를 보이거나 포아슨 비를 수식의 유도시와 같이 0에 가까운 값을 주면 해석적으로 유도된 해와 수치해석에서 얻어진 해가 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서 얻어진 비례경계유한요소법의 식들이 타당함을 확인할 수 있다.

4.2 매입기초

본 연구에서 유도된 비례경계유한요소법의 적용을 시험하기 위해 지반상에 매입된 기초에 강제변위 1을 가할 때 무한영역으로 모델링된 지반의 거동을 관찰하였다. 해석모델의 구성은 그림 6과 같다.

이 모델에서 기초는 유한영역으로 모델링 되었으며 절점은 기초와 지반사이의 경계에 위치하도록 하였다. 강제변위는 유한영역의 측면(side face)에 작용하며, 이 하중은 경계의 절점을 통하여 무한영역에 전달된다. 비례중심은 원점을 기준으로 하였으며 대칭조건을 이용하여 전체영역의 1/2만 모델링하였다. 대칭모델에 따른 경계조건은 측면에 부여된다. 기초의 모델링에 사용된 재료물성치는 $E = 10000$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0$ 이다.

기초를 매입하고 있는 반무한평면은 무한영역을 이용하여 모델링하였으며 비동질 재료로 가정하였다. 무한영역의 모델시 절점은 기초(유한영역)와의 경계에서만 설정되었으므로

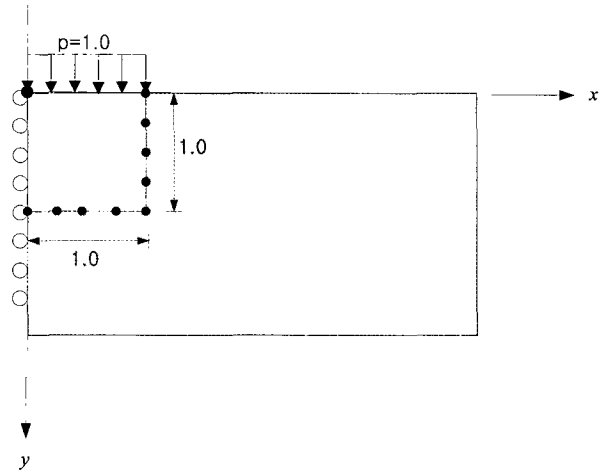


그림 6 반무한 평면에 매입된 기초

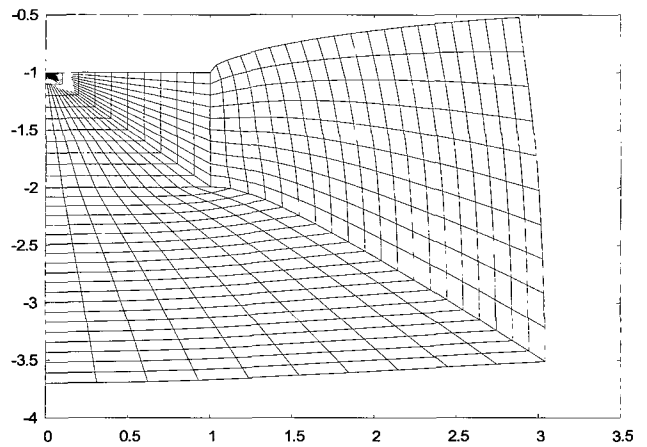


그림 7 반무한평면의 변형형상

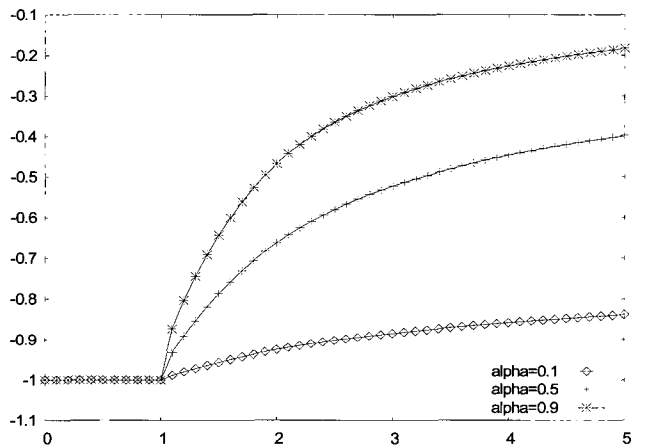
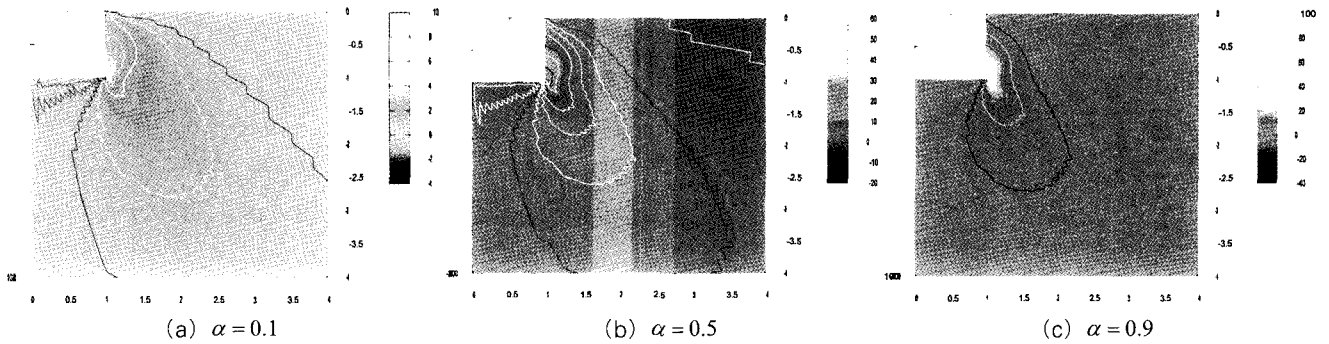


그림 8 α 값에 따른 자유면의 변형형상

자유면은 무한영역의 측면으로 모델링되며 이에 대한 이산화는 필요하지 않다. 따라서 오로지 기초경계상의 자유도만으로 무한영역을 해석할 수 있다. 비례중심은 유한영역과 마찬가지로 설정되었으며 대칭축에서의 경계조건은 유한영역과 마찬가지로 측면에 적용하였다. 기초의 모델링에 사용된 제

그림 9 α 값에 따른 반무한평면의 전단응력분포

료물성치는 $E=100$, $\nu=0.3$ 이고, 재료의 비동질을 나타내는 α 의 값을 파라미터로 하여 해석을 수행하였다.

해석결과 얻어진 해석모델의 변형형상은 그림 7에서 보이는 바와 같다. 이 변형형상에서 요소망처럼 보이는 것은 각 영역에서의 변형형상에 대한 이해를 돕기위한 것으로 실제로는 기초의 경계만 이산화되고, 이외의 영역에서는 경계와 평행한 방향으로 유한요소법과 같은 근사화가 사용되고 방사방향으로는 해석적인 방법으로 해를 구한다. 이 그림에서는 기초의 표면에 부여된 강제변위로 기초의 표면이 상대변형없이 변위를 일으킨 것과 인접한 무한영역의 자유면이 변형을 일으키는 것이 잘 나타나 있다.

비동질 파라미터 α 값의 변화에 따른 표면의 변형형상을 그려보면 그림 8과 같다. 해석결과 동일한 강제변위하중에 대하여 α 값에 따른 표면의 형상이 다르게 나타남을 알 수 있다. 작은 α 값을 가진 경우에는 인접지반의 변위가 강제변위와 유사한 거동을 보이지만 α 값이 커질 수록 지반의 강성이 커져서 변형의 범위가 좁아지는 것을 볼 수 있다.

파라미터 α 값의 변화에 따른 무한영역의 응력분포를 그림 9에 나타내었다. 이 응력도에서 응력의 등고선은 매끈하지 않고 툭날모양을 나타내는 것을 볼 수 있는데, 이는 해석에 사용된 경계방향형상함수가 선형함수이기 때문이다. 이러한 거동은 경계방향으로는 근사식을 사용하는 비례경계유한요소법의 특성을 잘 나타내고 있다. 2차이상의 고차형상함수를 사용할 경우 형상함수의 미분값을 따르는 응력의 특성상 연속된 응력의 등고선을 얻을 수 있을 것이다. 1차의 형상함수를 사용하는 경우에도 적절한 평활화 기법을 사용하여 부드러운 등고선을 얻을 수 있다. 그러나 이는 이 논문의 범위를 벗어나므로 언급하지 않았다. α 값이 증가할 수록 지반의 응력도 증가하는 경향을 보였으며, 낮은 α 값으로 갈수록 응력의 영향범위가 횡방향으로 더 영향을 미치는 것을 볼 수 있다. 이러한 점은 비동질 파라미터 α 가 무한영역의 거동을 지배하는 중요한 파라미터라는 것을 보여준다.

5. 결 론

본 논문에서는 비례경계유한요소법을 이용한 비동질 반무한 평면의 해석을 위하여 관련식을 가상일의 원리를 이용하여 유도하였다. 그 결과로 일련의 비례경계유한요소법에 대한 식을 얻을 수 있었다. 이 식들은 지수항에 비동질 파라미터 α 를 포함하는 식으로 나타났으며 이에 따라 변형모드 및 측면하중에 대한 관계식을 추가적으로 유도하였다. 평면해석에서 해의 안정성을 위해 도입되던 로그모드는 비동질 반무한평면의 경우 의미가 없음을 보였으며 해석적인 해를 갖는 예제와 공학적인 예제를 해석한 결과, 유도된 식들이 타당함을 확인할 수 있었다.

추후 본 연구를 바탕으로 층상지반등 실용적인 공학문제의 적용에 대한 추가적인 연구가 이루어질 것이다.

감사의 글

이 논문은 2005년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2005-214-D00071)에 의하여 연구되었습니다.

참 고 문 헌

- 김재민, 윤정방, 김두기 (2000) 유한요소와 무한요소를 사용한 2차원 선형 지반-구조물계의 지진응답해석법, 한국전산구조공학회논문집, 13(2), pp.231~244.
- 이완훈, 남우준, 최창근 (2001) 무한영역 해석을 위한 무한소스의 개발, 대한토목학회논문집, 21(2-A), pp.225~233.
- Deeks, A.J. (2002) Semi analytical analysis of two-dimensional domains with similar boundaries, *Structural Engineering and Mechanics*, 14(1), pp.99~118.
- Deeks, A.J. (2003) Prescribed side face displacements in the scaled boundary finite element method, *Computer and Structures*, 82, pp.1153~1165.

- Deeks, A.J., Cheng, L.** (2003) Potential flow around obstacles using the scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41(7), pp.721~741.
- Deeks, A.J., Wolf, J.P.** (2002a) A virtual work derivation of the scaled boundary finite element method for elastostatic, *Computational Mechanics*, 28, pp.489~504.
- Deeks, A.J., Wolf, J.P.** (2002b) Semi analytical analysis of unbounded two dimensional domain, *Int. J. of Numerical and analytical methods in geomechanics*, 26, pp.1031~1057.
- Deeks, A.J., Wolf, J.P.** (2002c) An h-hierarchical adaptive procedure for the scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(4), pp.585~605.
- Deeks, A.J., Wolf J.P.** (2002d) Stress recovery and error estimation for the scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(4), pp.557~583.
- Doherty, J.P., Deeks, A.J.** (2003) Scaled boundary finite element analysis of a non-homogeneous elastic half space, *Int. J. for numerical methods in engineering*, 57, pp.955~973.
- Song C., Wolf, J.P.** (1997) The scaled boundary finite element method alias consistent infinitesimal finite element cell method for elastodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147, pp.329~355.
- Song. C., Wolf, J.P.** (1999) The scaled boundary finite element method alias consistent infinitesimal finite element cell method for diffusion, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(10), pp.1403~1431.
- Vu, T.H., Deeks A.J.,** Use of higher order shape functions in the scaled boundary finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- Wolf, J.P.** (2003) *The scaled boundary finite element method*, John Wiley & Sons.
- Wolf, J.P., Song, C.** (1996a) Consistent infinitesimal finite element cell method: three dimensional vector wave equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.2189~2208.
- Wolf, J.P., Song C.** (1996b) *Finite Element Modeling of Unbounded Media*. Wiley, Chichester.