

탄성지반위에 놓인 박벽보의 강성행렬산정을 위한 개선된 해석기법

Improved Method Evaluating the Stiffness Matrices of Thin-walled Beam on Elastic Foundations

김 남 일* 정 성 엽* 이 준 석** 김 문 영***
Kim, Nam-Il Jung, Sung-Yeop Lee, Jun-Seok Kim, Moon-Young
(논문접수일 : 2006년 5월 22일 ; 심사종료일 : 2007년 2월 9일)

요 지

탄성지반 위의 비대칭 개/폐단면의 박벽보에 대한 탄성해석 및 안정성해석을 수행하기 위해 엄밀한 강성행렬을 계산하기 위한 개선된 수치해석 기법을 새롭게 제시한다. 본 연구에서 제시한 수치해석기법은 박벽보의 안정성 해석을 위한 엄밀한 강성행렬을 산정하는 선행된 수치해석기법의 결점을 보완하고 있다. 본 연구에서 제시한 기법은 일반화된 고유치 문제에 관한 해를 얻는 것으로서 일반화된 14개의 변위에 대한 고유치 문제를 평형방정식에 관한 1차의 연립상미분 방정식으로 변환함으로써 얻어진다. '0'의 고유치에 대응되는 변위파라미터에 대해 다항식이 가정되며 항등조건으로부터 '0'의 고유치의 수와 동일한 미결정된 파라미터를 포함하는 고유 모우드가 결정되고 이로부터 'non-zero'의 고유치와 다항식의 해를 조합함으로써 엄밀한 변위함수가 결정된다. 이후 부재력-변위의 관계를 이용하여 엄밀한 강성행렬을 산정하게 된다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위해서 본 연구에서 제시한 이론에 의한 해를 제시하고 보요소 및 셸요소를 사용한 유한요소해와 비교·검토한다.

핵심용어 : 엄밀한 강성행렬, 탄성해석, 안정성해석, 박벽보

Abstract

Improved numerical method to obtain the exact stiffness matrices is newly proposed to perform the spatially coupled elastic and stability analyses of non-symmetric and open/closed thin-walled beam on elastic foundation. This method overcomes drawbacks of the previous method to evaluate the exact stiffness matrix for the spatially coupled stability analysis of thin-walled beam-column. This numerical technique is accomplished via a generalized eigenproblem associated with 14 displacement parameters by transforming equilibrium equations to a set of first order simultaneous ordinary differential equations. Next polynomial expressions as trial solutions are assumed for displacement parameters corresponding to zero eigenvalues and the eigenmodes containing undetermined parameters equal to the number of zero eigenvalues are determined by invoking the identity condition. And then the exact displacement functions are constructed by combining eigensolutions and polynomial solutions corresponding to non-zero and zero eigenvalues, respectively. Consequently an exact stiffness matrix is evaluated by applying the member force-deformation relationships to these displacement functions. In order to illustrate the accuracy and the practical usefulness of this study, the numerical solutions are compared with results obtained from the thin-walled beam and shell elements.

Keywords : exact stiffness matrix, elastic analysis, stability analysis, thin-walled beam

1. 서 론

지난 20여 년 동안 보요소에 관한 엄밀한 동적 강성행렬에 관해서 활발한 연구가 진행되었다. 이러한 연구들의 대부분은

† 책임저자, 명지대학교 토목환경공학과 BK21 연구교수
Tel: 031-330-6406 ; Fax: 031-336-9705
E-mail: kni8501@gmail.com

* 평화엔지니어링 구조부 차장 공학박사

** 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

*** 성균관대학교 건설환경시스템공학과 교수

* 이 논문에 대한 토론을 2007년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

지배방정식에 대한 엄밀한 변위 함수의 명시적인 표현을 요구하는 해석적인 방법을 채택하였다(Banerjee, 1998; Banerjee 등, 1996; Leung, 1992; Leung 등, 1994). 이는 파라미터를 이용한 연산방식의 도움으로 시간을 단축시키는데 상당히 효과적이다. 그러나 해석적인 방법은 다수의 변수를 포함하는 연립상미분방정식에서 엄밀한 변위 함수를 계산하는 데 있어서 너무 복잡하다는 단점이 있다.

실제적으로 빈번히 직면하는 보와 관련된 문제들 중에서 탄성지반위의 보의 거동과 관련하여 상당한 연구가 수행되었는데, 초기의 연구로써 Hetenyi(1946)는 고전적인 미분방정식의 접근방식을 채택하였고, 이후 근사화된 형상 함수에 기초한 유한요소해석 방법이 다른 연구자들에 의해 광범위하게 채택되어 왔다. 또한 탄성지반위의 보에서 변위와 그의 영향선을 얻기 위해서 유한차분법이 적용되기도 하였다(Hosur 등, 1996; Vallabhan 등, 1991). Chen(1998)은 탄성지반위에 놓인 보의 지배미분방정식을 풀기 위해서 미분구적법에 관한 해석모형을 제시하였고, 이 방법이 수렴에 효과적인 것을 증명하였다. Guo와 Weitsman(2002)은 비균일 탄성지반위의 단순지지된 보의 응답을 산정하기 위해서 Green의 함수를 이용하였다. Kuo와 Lee(1994)은 지배미분방정식을 4차의 선형 상미분방정식으로 변환하고 perturbation method를 이용하여 비선형 탄성지반위에 놓인 비균일 보의 처짐을 산정하였다. 다른 접근방법으로써 탄성지반위에 놓인 보의 미분방정식의 해에 기초한 엄밀한 강성행렬을 계산하여 구조물-지반의 상호작용 문제를 다루는 연구가 진행되어 왔다(Morfidis 등, 2002; Onu, 2000; Gendy 등, 1999; Aydogan, 1995; Shirima 등, 1992; Pazaqpur 등, 1991; Lee 등, 1990). 특히 Onu(2000)은 미분방정식에 기초한 접근방법을 이용하여 전단효과와 함께 무요소 형태의 엄밀한 강성행렬을 제시하였다. Gendy와 Saleeb(1999)는 Winkler지반위의 전단변형이 고려된 보에 관하여 hybrid-mixed variational principle 방법을 이용하여 보요소를 개발하였다. 김문영 등(2002)은 탄성지반위에 놓인 보-기둥 요소의 엄밀한 좌굴하중과 고유진동수를 계산하기 위하여 4계 상미분방정식 형태의 지배방정식을 4개의 변위 파라미터를 도입하여 1계 연립미분방정식 형태의 선형 고유치문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용하여 엄밀한 정적 및 동적강성을 유도하였다. 탄성지반위의 보에 관한 이러한 광범위한 연구에도 불구하고, 대부분의 연구는 보의 2차원 해석에 국한되고 있다. 저자가 아는 바로는 Dube와 Dumir(1996)가 개발한 탄성지반위의 박벽보에 대한 안정성 문제에 대한 엄밀한 급수해를 제외하고는 공간상에서의 비대칭 박벽보 문제에 관한 연구가 진행되지 않고 있다. 그러나, Dube와 Dumir의 연구는 일축대칭의 개단면 박벽보에 대한 수치적 연구에 국한되어 있다. 최근에 Kim

등(2003)은 휨-비틀림이 연계된 진동과 좌굴 해석을 위하여 엄밀한 동적 및 정적 강성행렬을 제시하였다. 이는 정적강성행렬을 유도하기 위해서 평형방정식 유도과정에서 복잡한 연산이 내포되고 비제차 미분방정식을 직접적으로 풀어야 하는 단점이 있다. 결국, 초기하중의 분포가 미소하게 변한다 할지라도 '영'의 고유치와 관련된 고유벡터를 계산하기 위해서는 새로운 변위 파라미터의 선택이 필요하다. 본 연구에서는 앞서 설명한 이러한 단점들을 극복하기 위해서 탄성지반위의 비대칭 개/폐단면을 갖는 박벽보의 엄밀한 요소강성행렬을 산정하기 위해서 개선된 수치적 기법을 제시하고 이에 대한 타당성을 입증한다.

2. 탄성지반위에 놓인 비대칭 박벽보의 지배방정식

탄성지반위에 놓인 비대칭 개/폐단면을 갖는 박벽보의 해석을 위하여 힘-변형관계와 평형방정식을 유도한다. 그림 1은 탄성지반위의 박벽보를 보여주고 있다. 여기서 k_x , k_y , k_z 는 h_y , h_z 에서의 축방향 및 횡방향에 관련되는 Winkler 지반상수들을 의미하며, k_θ 는 단면의 회전과 관련된 스프링 상수이다. g_y , g_z 는 h_y , h_z 에서의 두 번째 지반상수인 Pasternak 지반상수들을 의미한다. 그림 2(a)와 2(b)에는 비대칭단면에서 정의된 박벽보의 변위파라미터와 단면력을 보여주고 있다. x_1 과 x_2 , x_3 는 도심과 주축을 각각 의미하며, U_x , U_y , U_z 와 $\omega_1 (= \theta)$, $\omega_2 (= -U_z')$, $\omega_3 (= U_y')$ 는 x_1 과 x_2 , x_3 축에 대한 강제 변위 및 회전변위를 나타내고 있고, $f (= -\theta')$ 는 뒤틀림에 관한 변위 파라미터이다. 그리고 F_1 는 축력; F_2 , F_3 는 각각 도심에 작용하는 전단력; M_1 는 도심축에 대한 비틀림 모멘트; M_2 , M_3 는 각각 x_2 , x_3 에 대응되는 휨모멘트; M_ϕ 는 바이모멘트를 나타낸다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 단면에 발생하는 7개의 변위 및 단면력이 좌표변환관계를 이용하여 단면의 도심에서 정의되고 있으며, 구체적인 유도과정은 참고문헌(Kim 등, 2000)을 참조할 수 있다.

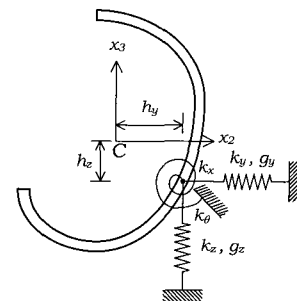


그림 1 탄성지반위에 놓인 박벽보

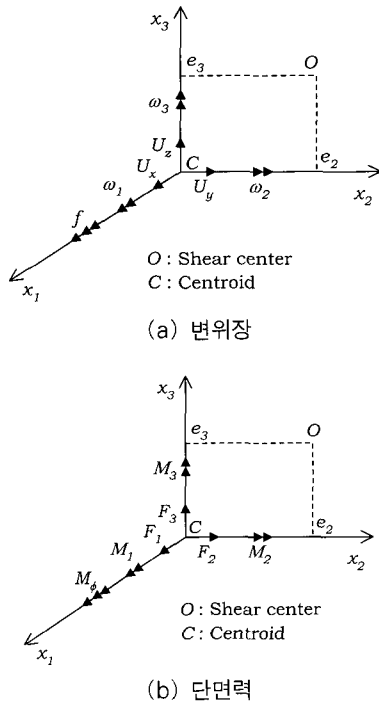


그림 2 박벽보요소의 변위장 및 단면력

이제 박벽보의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G + \Pi_F - \Pi_{ext} \quad (1)$$

여기서 Π_E , Π_G , Π_F 그리고 Π_{ext} 는 각각 탄성변형에너지, 초기응력에 의한 포텐셜에너지, 탄성지반에 대응되는 탄성에너지 그리고 요소의 절점력에 대한 포텐셜에너지이다. 식 (1)의 총포텐셜에너지에 관련되는 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^l [& EAU_x'^2 + EI_3U_y''^2 + EI_2U_z''^2 \\ & + GJ\theta'^2 + EI_\phi\theta''^2 + 2EI_{3\phi}U_y''\theta'' \\ & + 2EI_{2\phi}U_z''\theta''] dx_1 \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^l [& {}^oF_1(U_y'^2 + U_z'^2) + {}^oM_P\theta^2 \\ & + {}^oF_2U_z'\theta - {}^oF_3U_y'\theta + {}^oM_1(U_z'U_y'' \\ & - U_z''U_y') + {}^oM_2(U_y''\theta - U_y'\theta') \\ & + {}^oM_3(U_z''\theta - U_z'\theta')] dx_1 \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_F = \frac{1}{2} \int_0^l [& k_xU_x^2 + k_y(U_y^2 - 2h_zU_y\theta + h_z^2\theta^2) \\ & + k_z(U_z^2 + 2h_yU_z\theta + h_y^2\theta^2) + k_\theta\theta^2 \\ & + g_y(U_y'^2 - 2h_zU_y'\theta' + h_z^2\theta'^2) \end{aligned}$$

$$+ g_z(U_z'^2 + 2h_yU_z'\theta' + h_y^2\theta'^2)] dx_1 \quad (2c)$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} U_e^T F_e \quad (2d)$$

여기서 ()'는 x_1 에 대한 미분; E 는 탄성계수; G 는 전단탄성상수; J 는 비틀림상수; U_e , F_e 는 각각 재단변위와 재단력 벡터이다. Π_E 와 Π_G 에 관한 상세한 계산과정은 문헌(Kim 등, 2000)을 참조할 수 있으며, 탄성지반에 대응되는 에너지 Π_F 는 Dube와 Dumir(1996)의 연구로부터 계산되어질 수 있다. 일반화된 좌표계에서의 단면력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^oF_1 &= \int_A {}^o\tau_{11}dA, \quad {}^oF_2 = \int_A {}^o\tau_{12}dA, \\ {}^oF_3 &= \int_A {}^o\tau_{13}dA, \quad {}^oM_1 = \int_A ({}^o\tau_{13}x_2 - {}^o\tau_{12}x_3)dA, \\ {}^oM_2 &= \int_A {}^o\tau_{11}x_3dA, \quad {}^oM_3 = - \int_A {}^o\tau_{11}x_2dA, \\ {}^oM_b &= \int_A {}^o\tau_{11}(x_2^2 + x_3^2)dA \end{aligned} \quad (3a-g)$$

여기서 oM_b 는 와그너효과를 나타내는 단면력이다. 단면상수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_A x_3^2dA, \quad I_3 = \int_A x_2^2dA, \quad I_\phi = \int_A \phi^2dA, \\ I_{2\phi} &= \int_A \phi x_3dA, \quad I_{3\phi} = \int_A \phi x_2dA \end{aligned} \quad (4a-e)$$

여기서, A , I_2 , 그리고 I_3 는 각각 단면적, x_2 및 x_3 축에 대한 단면의 관성모멘트이고 I_ϕ 는 뒀에 관한 단면의 관성모멘트이다. 도심축 정의에 의해 $I_{2\phi}$ 와 $I_{3\phi}$ 는 영이되지 않으며 초기의 휨과 비틀림모멘트에 의한 포텐셜에너지 식 (2b)는 준-접선방향의 회전에 관한 2차항이 고려된다.

이제 Hamilton의 원리를 이용하여 다음과 같이 평형방정식과 힘-변형의 관계를 구할 수 있다.

$$EAU_x'' - k_xU_x = 0 \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} EI_3U_y'''' + EI_{3\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_y'' + {}^oM_1U_z'' + {}^oM_2\theta'' \\ + k_y(U_y - h_z\theta) - g_y(U_y - h_z\theta)' = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} EI_2U_z'''' + EI_{2\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_z'' - {}^oM_1U_y'' + {}^oM_3\theta'' \\ + k_z(U_z + h_y\theta) - g_z(U_z + h_y\theta)' = 0 \end{aligned} \quad (5c)$$

$$EI_\phi\theta'''' - GJ\theta'' + EI_{3\phi}U_y'''' + EI_{2\phi}U_z'''' - {}^oM_b\theta''$$

$$\begin{aligned}
 & + {}^{\circ}M_2U_y'' + {}^{\circ}M_3U_z'' - k_y h_z U_y + k_z h_y U_z \\
 & + (k_y h_z^2 + k_z h_y^2 + k_{\theta})\theta + g_y h_z U_y'' - g_z h_y U_z'' \\
 & - (g_y h_z^2 + g_z h_y^2)\theta' = 0 \quad (5d)
 \end{aligned}$$

그리고

$$F_1 = EAU_x' \quad (6a)$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & -EI_3 U_y'''' - EI_{3\phi} \theta'''' + {}^{\circ}F_1 U_y' - {}^{\circ}M_1 U_z'' \\
 & - {}^{\circ}M_2 \theta' + g_y (U_y - h_z \theta)' \quad (6b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & -EI_2 U_z'''' - EI_{2\phi} \theta'''' + {}^{\circ}F_1 U_z' + {}^{\circ}M_1 U_y'' \\
 & - {}^{\circ}M_3 \theta' + g_z (U_z + h_y \theta)' \quad (6c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 = & -EI_{\phi} \theta'''' + GJ\theta' - EI_{3\phi} U_y'''' - EI_{2\phi} U_z'''' \\
 & + {}^{\circ}M_{\phi} \theta' - 0.5 {}^{\circ}M_2 U_y' - 0.5 {}^{\circ}M_3 U_z' \\
 & + (g_y h_z^2 + g_z h_y^2)\theta' + g_z h_y U_z' - g_y h_z U_y' \quad (6d)
 \end{aligned}$$

$$M_2 = EI_2 U_z'' + EI_{2\phi} \theta'' - 0.5 {}^{\circ}M_1 U_y' + 0.5 {}^{\circ}M_3 \theta \quad (6e)$$

$$M_3 = EI_3 U_y'' + EI_{3\phi} \theta'' + 0.5 {}^{\circ}M_1 U_z' + 0.5 {}^{\circ}M_2 \theta \quad (6f)$$

$$M_{\phi} = EI_{\phi} \theta'' + EI_{3\phi} U_y'' + EI_{2\phi} U_z'' \quad (6g)$$

3. 비대칭 박벽보의 엄밀한 요소강성행렬

3.1절에서는 탄성지반위에 놓인 비대칭 박벽보에 관한 엄밀한 요소강성행렬을 산정하는 수치적 기법을 제시하고, 탄성지반위의 보와 비교할 때 탄성지반이 포함되지 않는 보에서는 복수개의 고유치가 발생하므로 엄밀한 요소강성행렬을 산정하는 개선된 수치해석기법을 3.2절에서 제시한다.

3.1 탄성지반위에 놓인 보의 엄밀한 요소강성행렬

식 (5)의 4차 연립 상미분방정식을 일차의 연립 상미분방정식으로 변환하기 위해서 14개의 변위파라미터로 구성된 변위벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 d(x) = & \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, \\
 & d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (7) \\
 = & \langle U_x, U_x', U_y, U_y', U_y'', U_y''', U_z, \\
 & U_z', U_z'', U_z''', \theta, \theta', \theta'', \theta''' \rangle^T
 \end{aligned}$$

식 (7)을 이용하여 식 (5)는 다음과 같이 일계 연립상미분방정식으로 변환가능하다.

$$Ad' = Bd \quad (8)$$

여기서 구체적인 행렬 A 와 B 는 부록 I에 제시되어있다. 이제 식 (8)의 일반해를 찾기 위해서, 다음과 같은 고유치문제를 생각한다.

$$\lambda AZ = BZ \quad (9)$$

식 (9)로부터 복소수영역에서 고유치와 고유벡터를 계산할 수 있는 IMSL의 부함수인 DGVCRC(Microsoft, 1995)을 이용하여 14쌍의 고유치를 얻을 수 있다. 이 후 식 (8)의 일반해는 다음과 같은 복소수 함수형태의 고유치에 관한 선형조합으로 표현가능하다.

$$d(x) = \sum_{i=1}^{14} a_i Z_i e^{\lambda_i x} = X(x)a \quad (10)$$

여기서

$$X(x) = \begin{bmatrix} Z_1 e^{\lambda_1 x}; Z_2 e^{\lambda_2 x}; Z_3 e^{\lambda_3 x}; Z_4 e^{\lambda_4 x}; \\ Z_5 e^{\lambda_5 x}; Z_6 e^{\lambda_6 x}; Z_7 e^{\lambda_7 x}; Z_8 e^{\lambda_8 x}; \\ Z_9 e^{\lambda_9 x}; Z_{10} e^{\lambda_{10} x}; Z_{11} e^{\lambda_{11} x}; \\ Z_{12} e^{\lambda_{12} x}; Z_{13} e^{\lambda_{13} x}; Z_{14} e^{\lambda_{14} x} \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned}
 a = & \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \\
 & a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \rangle^T \quad (11b)
 \end{aligned}$$

X 와 a 는 14개의 고유치로 이루어진 14×14 행렬 함수와 적분상수벡터를 각각 의미한다.

다음으로 14개의 절점변위성분(그림 3참조)은 복소계수벡터 a 로 표현을 할 수 있으며 절점변위를 다음과 같이 정의한다.

$$U_e = \langle U^p, U^q \rangle^T \quad (12a)$$

$$\begin{aligned}
 U^a = & \langle U_x^a, U_y^a, \omega_3^a, U_z^a, \omega_2^a, \omega_1^a, f^a \rangle^T, \\
 a = & p, q \quad (12b)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$U^p = \langle U_x(o), U_y(o), U_y'(o), U_z(o),$$

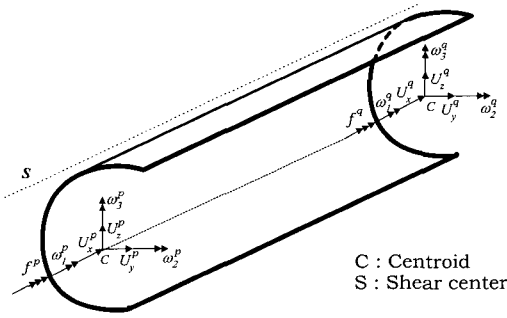


그림 3 박벽보요소의 절점변위

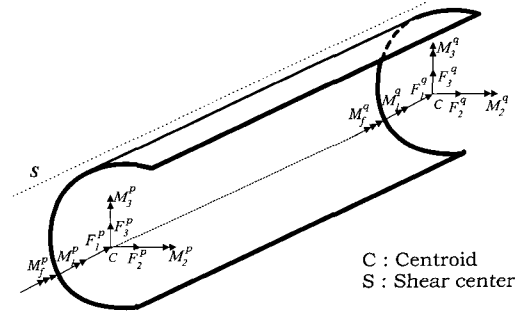


그림 4 박벽보요소의 절점 하중

$$-U_z'(o), \theta(o), -\theta'(o) \rangle^T \quad (13a)$$

$$U^q = \langle U_x(l), U_y(l), U_y'(l), U_z(l), -U_z'(l), \theta(l), -\theta'(l) \rangle^T \quad (13a)$$

식 (13)으로부터 절점변위벡터 U_e 가 다음과 같이 계산된다.

$$U_e = Ea \quad (14)$$

결국 식 (14)를 이용하여 식 (10)에서 a 를 소거함으로써 다음과 같은 변위상태벡터를 얻을 수 있다.

$$d(x) = X(x)E^{-1}U_e \quad (15)$$

여기서 $X(x)E^{-1}$ 는 엄밀한 보간함수행렬이다.

다음으로 식 (7)을 이용하여 식 (6)의 박벽보의 힘-변형 관계가 다음과 같이 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$f(x) = Sd(x) = X(x)E^{-1}U_e \quad (16)$$

여기서 $f = \langle F_1, F_2, M_3, F_3, M_2, M_1, M_\phi \rangle^T$ 와 7×14 행렬 S 의 각 요소는 다음과 같으며 행렬 S 의 구체적인 성분은 부록 I에 제시하였다.

다음으로 엄밀한 요소강성행렬을 결정하기 위해서, 그림 4와 같이 절점력벡터를 산정하는 것이 필요하고 이는 다음과 같이 정의된다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \quad (17)$$

여기서

$$F^\alpha = \langle F_1^\alpha, F_2^\alpha, M_3^\alpha, F_3^\alpha, M_2^\alpha, M_1^\alpha, M_\phi^\alpha \rangle^T,$$

$$\alpha = p, q \quad (18)$$

결국, 탄성지반위에 놓인 박벽보의 엄밀한 요소강성행렬 K_s 는 다음과 같다.

$$F_e = K_s U_e \quad (19)$$

여기서,

$$K_s = \begin{bmatrix} -SX(0) & E^{-1} \\ SX(l) & E^{-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

3.2 탄성지반을 포함하지 않는 보의 엄밀한 강성행렬

초기 하중을 받는 탄성지반을 포함하지 않는 비대칭 박벽보를 고려하면 평형방정식은 식 (5)로부터 다음과 같이 단순화된다.

$$EAU_x'' = 0 \quad (21a)$$

$$EI_3U_y'''' + EI_{3\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_y'' + {}^oM_1U_z'''' + {}^oM_2\theta'' = 0 \quad (21b)$$

$$EI_2U_z'''' + EI_{2\phi}\theta'''' - {}^oF_1U_z'' - {}^oM_1U_y'''' + {}^oM_3\theta'' = 0 \quad (21c)$$

$$EI_\phi\theta'''' - GJ\theta'' + EI_{3\phi}U_y'''' + EI_{2\phi}U_z'''' - {}^oM_\phi\theta'' + {}^oM_2U_y'' + {}^oM_3U_z'' = 0 \quad (21d)$$

여기서 축력항 oF_1 은 최소한 0이 아니며, 식 (7)의 14개의 변위파라미터를 이용하여 식 (8)과 같이 일계 연립상미분방정식으로 변환한 다음 식 (9)의 고유치해석을 수행하면 6개의 '0'이 아닌 고유치와 8개의 '0'의 고유치가 얻어진다. Kim 등(2003)이 제시한 선행연구에서는 엄밀한 강성행렬을

$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	$f_{3,4}$	$f_{3,5}$	$f_{3,6}$	1.0	x		
$f_{4,1}$	$f_{4,2}$	$f_{4,3}$	$f_{4,4}$	$f_{4,5}$	$f_{4,6}$	1.0			
$f_{5,1}$	$f_{5,2}$	$f_{5,3}$	$f_{5,4}$	$f_{5,5}$	$f_{5,6}$				
$f_{6,1}$	$f_{6,2}$	$f_{6,3}$	$f_{6,4}$	$f_{6,5}$	$f_{6,6}$				
$f_{7,1}$	$f_{7,2}$	$f_{7,3}$	$f_{7,4}$	$f_{7,5}$	$f_{7,6}$	1.0	x		
$f_{8,1}$	$f_{8,2}$	$f_{8,3}$	$f_{8,4}$	$f_{8,5}$	$f_{8,6}$			1.0	
$f_{9,1}$	$f_{9,2}$	$f_{9,3}$	$f_{9,4}$	$f_{9,5}$	$f_{9,6}$				
$f_{10,1}$	$f_{10,2}$	$f_{10,3}$	$f_{10,4}$	$f_{10,5}$	$f_{10,6}$				
$f_{11,1}$	$f_{11,2}$	$f_{11,3}$	$f_{11,4}$	$f_{11,5}$	$f_{11,6}$			1.0	x
$f_{12,1}$	$f_{12,2}$	$f_{12,3}$	$f_{12,4}$	$f_{12,5}$	$f_{12,6}$				1.0
$f_{13,1}$	$f_{13,2}$	$f_{13,3}$	$f_{13,4}$	$f_{13,5}$	$f_{13,6}$				
$f_{14,1}$	$f_{14,2}$	$f_{14,3}$	$f_{14,4}$	$f_{14,5}$	$f_{14,6}$				

(30)

$$f_{i,j}^1 = z_{i,j}^1 e^{\lambda_j^1 x}, \quad i=1 \sim 14; j=1 \sim 6$$

$$E^1 =$$

$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$z_{1,3}$	$z_{1,4}$	$z_{1,5}$	$z_{1,6}$	1.0			
$z_{3,1}$	$z_{3,2}$	$z_{3,3}$	$z_{3,4}$	$z_{3,5}$	$z_{3,6}$	1.0			
$z_{7,1}$	$z_{7,2}$	$z_{7,3}$	$z_{7,4}$	$z_{7,5}$	$z_{7,6}$		1.0		
$z_{11,1}$	$z_{11,2}$	$z_{11,3}$	$z_{11,4}$	$z_{11,5}$	$z_{11,6}$			1.0	
$z_{14,1}$	$z_{14,2}$	$z_{14,3}$	$z_{14,4}$	$z_{14,5}$	$z_{14,6}$				-1.0
$z_{4,1}$	$z_{4,2}$	$z_{4,3}$	$z_{4,4}$	$z_{4,5}$	$z_{4,6}$	1.0			
$z_{12,1}$	$z_{12,2}$	$z_{12,3}$	$z_{12,4}$	$z_{12,5}$	$z_{12,6}$				-1.0
$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	$y_{1,3}$	$y_{1,4}$	$y_{1,5}$	$y_{1,6}$	1.0	l		
$y_{3,1}$	$y_{3,2}$	$y_{3,3}$	$y_{3,4}$	$y_{3,5}$	$y_{3,6}$	1.0	l		
$y_{7,1}$	$y_{7,2}$	$y_{7,3}$	$y_{7,4}$	$y_{7,5}$	$y_{7,6}$		1.0	l	
$y_{11,1}$	$y_{11,2}$	$y_{11,3}$	$y_{11,4}$	$y_{11,5}$	$y_{11,6}$			1.0	l
$y_{14,1}$	$y_{14,2}$	$y_{14,3}$	$y_{14,4}$	$y_{14,5}$	$y_{14,6}$				-1.0
$y_{4,1}$	$y_{4,2}$	$y_{4,3}$	$y_{4,4}$	$y_{4,5}$	$y_{4,6}$	1.0			
$y_{12,1}$	$y_{12,2}$	$y_{12,3}$	$y_{12,4}$	$y_{12,5}$	$y_{12,6}$				-1.0

(31)

$$y_{i,j}^1 = z_{i,j}^1 e^{\lambda_j^1 l}, \quad i=1, 3, 7, 11, 8, 4, 12; j=1 \sim 6$$

다양한 형태의 초기하중(즉, M_2 만이 영이 아닌 경우 혹은 M_1 만이 영이 아니고 나머지 초기력들은 영인 경우)에 대해서 앞서 제시한 과정들을 이용하여 엄밀한 강성행렬을 산정할 수 있다. 각 경우에 대한 구체적인 행렬 X 와 E 를 부록 II에 수록하였다.

4. 수치 예제

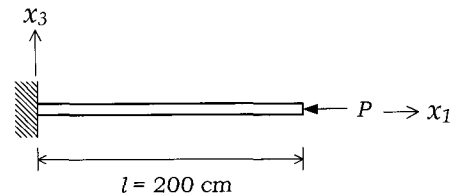
본 연구에서 제안된 방법의 타당성과 정확성을 증명하기 위하여 다음의 3가지의 예제를 생각한다. 4.1절에서는 비대칭 단면을 갖는 외팔보에 대하여 좌굴해석을 수행하며, 4.2절에서는 축력, 수직력 그리고 비틀모멘트를 받는 일축대칭의 양단 고정 및 동일한 경계조건과 편심 재하된 수직하중을 받는 비대칭 상하형 거더의 탄성해석을 수행한다. 수직하중 및 비틀모멘트를 받는 탄성지반위에 놓은 비대칭 보의 정적 거동에 관해서 4.3절에서 논한다. 본 연구의 결과들은 ABAQUS(2003)

과 SAP2000(1995)의 쉘요소와 비교하였고 Kim 등(1996)에 제시한 3차의 Hermitian 다항식으로 표현되는 박벽보요소를 이용하여 축방향 및 횡방향 변위 및 비틀을 받는 박벽보의 결과와 비교하였다. 본 연구의 수치결과는 외팔보의 경우 단지 하나의 요소만을 사용하였고, 양단고정보에 대한 해석 시에만 두개의 요소를 사용하였다.

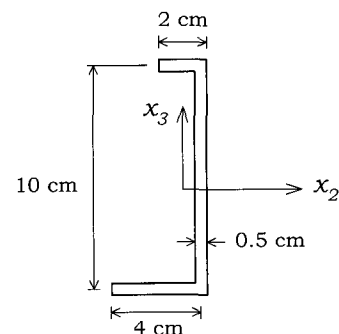
4.1 외팔보의 휨-비틀 좌굴

본 예제에서는 그림 5와 같이 단면의 도심에 축하중을 받는 비대칭 단면을 갖는 외팔보의 휨-비틀 좌굴하중을 산정하였다.

보요소를 이용한 해석에 대해서는 외팔보를 4개, 6개, 그리고 10개의 보요소로 모델링하였고, ABAQUS 쉘요소에 대해서는 600개의 9절점 쉘요소(S9R5)를 사용하여 모델링하였다. 표 1은 다섯 개의 좌굴하중을 제시하였는데 한 개의 요소를 사용한 본 연구의 결과를 보요소를 사용한 유한요소해석의 결과 및 ABAQUS 쉘요소를 사용한 결과와 비교하였다. 표 1에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 제시한 기법이 단지 하나의 요소만을 이용함에도 불구하고 계산된 초기 5개의 휨-비틀 좌굴하중이 ABAQUS의 결과 및 유한요소해석의 결과와 잘 일치함을 보여



(a) 축하중이 작용하는 캔틸레버보



(b) 비대칭 채널 단면의 형상

$$E=30000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G=11500.0 \text{ N/cm}^2, \\ A=8.0 \text{ cm}^2, \quad J=0.6667 \text{ cm}^4, \quad I_2=114.87204 \text{ cm}^4, \\ I_3=7.54463 \text{ cm}^4, \quad I_4=408.33314 \text{ cm}^6, \\ I_{2\phi}=182.41335 \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi}=18.97565 \text{ cm}^5$$

(c) 단면제원

그림 5 비대칭 단면을 갖는 캔틸레버보의 형상

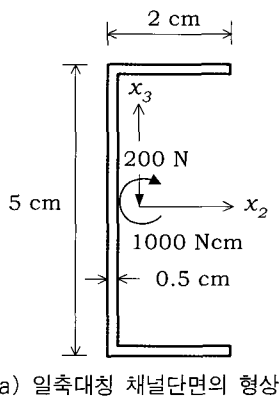
주고 있다. 본 연구에서 제시한 수치해석 기법이 식 (15)의 변위벡터가 평형방정식의 해를 정확히 만족하여 고차 및 저차의 좌굴하중의 계산 시 모두 정확한 결과를 보여줌을 알 수 있다. 반면 고차 모드에서 충분한 정확도를 얻기 위해서 유한요소 해석에서는 많은 수의 보요소가 필요함을 알 수 있다.

표 1 도심에 축력이 작용하는 비대칭 단면을 갖는 외팔보의 휨-비틀림 좌굴하중 (N)

모우드	본 연구	Hermitian 보요소			ABAQUS (2003)
		4	6	10	
1	13.800	13.801	13.800	13.800	14.001
2	112.55	112.80	112.60	112.55	113.10
3	191.84	191.84	191.84	191.84	190.08
4	258.54	261.82	259.25	258.64	256.67
5	414.76	430.08	418.57	415.31	408.53

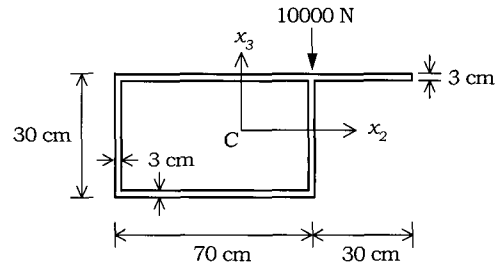
4.2 양단 고정된 박벽보의 탄성해석

본 절에서는 요소강성행렬을 이용하여 인장 및 압축하중, 수직하중, 그리고 비틀 모멘트를 동시에 받는 양단고정의 일축대칭보에 대한 탄성해석을 수행한다. 그림 6은 보의 중앙지점의 도심에 이러한 하중을 받는 모습을 보여주고 있다. 표 2에서는 수직 변위 U_z 와 비틀각 θ 에 대해 3차 Hermitian 다항식으로 정식화된 보요소를 이용한 유한요소의 해석결과와 비교하였다. 여기서 압축력은 300N, 100N, 0N이며 인장력은 300N, 3000N이다. 표 2로 부터 알 수 있듯이 유한요소기법을 이용했을 경우 20개의 요소로 나누어야만 본 연구의 엄밀한 결과와 비교적 일치함을 알 수 있었다.



(a) 일축대칭 채널단면의 형상
 $E=73000\text{N/cm}^2$, $G=28000\text{N/cm}^2$, $I=60\text{cm}^4$,
 $A=4.5\text{cm}^2$, $J=0.375\text{cm}^4$, $I_2=17.70833\text{cm}^4$
 (b) 단면제원

그림 6 일축대칭 단면 및 단면제원



(a) 비대칭 박스단면
 $E=73000\text{N/cm}^2$, $G=28000\text{N/cm}^2$, $I=2000\text{cm}^4$,
 $A=690\text{cm}^2$, $J=264870\text{cm}^4$, $I_2=118371.4\text{cm}^4$,
 $I_3=601639.5\text{cm}^4$, $I_\phi=16080141.8\text{cm}^6$,
 $I_{2\phi}=792429.6\text{cm}^5$, $I_{3\phi}=-527206.0\text{cm}^5$
 (b) 단면제원

그림 7 비대칭 박스거더의 제원

표 2 축력, 수직력, 비틀모멘트를 받는 양단 고정지지원 일축대칭 보의 중앙지점에서의 변위와 비틀각 (cm, rad.)

	해석방법	요소의 수	U_z	θ
압축력 (-300 N)	Hermitian 보요소	2	-1.3743	-1.0185
		4	-1.3787	-1.0223
		6	-1.3826	-1.0257
		20	-1.3839	-1.0269
	본 연구		-1.3839	-1.0269
압축력 (-100 N)	Hermitian 보요소	2	-1.2697	-0.94481
		4	-1.2745	-0.94896
		6	-1.2788	-0.95272
		20	-1.2803	-0.95401
	본 연구		-1.2803	-0.95402
축력 (0 N)	Hermitian 보요소	2	-1.2230	-0.91188
		4	-1.2280	-0.91619
		6	-1.2324	-0.92008
		20	-1.2340	-0.92142
	본 연구		-1.2340	-0.92143
인장력 (300 N)	Hermitian 보요소	2	-1.1009	-0.82573
		4	-1.1064	-0.83046
		6	-1.1113	-0.83467
		20	-1.1130	-0.83614
	본 연구		-1.1130	-0.83615
인장력 (3000 N)	Hermitian 보요소	2	-0.57126	-0.44902
		4	-0.57876	-0.45523
		6	-0.58486	-0.46027
		20	-0.58740	-0.46237
	본 연구		-0.58742	-0.46239

그림 7은 보중앙에 -10000N의 편심 수직하중을 받는 비대칭 상자형 거더를 보여주고 있으며, 양단이 고정되어 있고 뒤틀림을 방지하기 위해 보의 중앙에 다이어프레임이 설치되

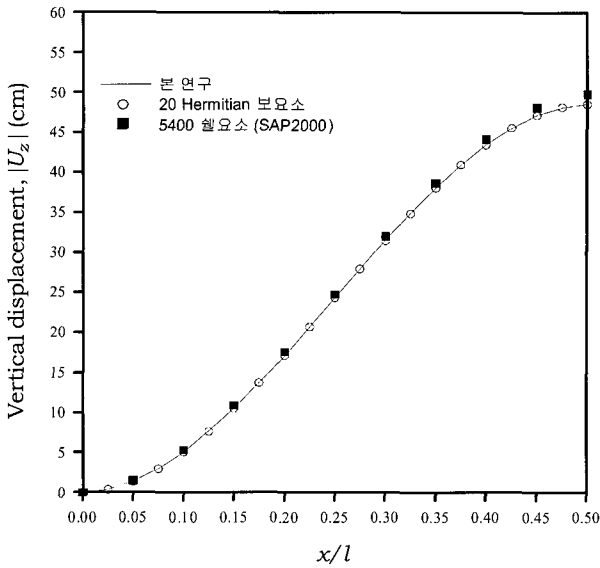


그림 8 비대칭 박스단면의 우측 웨브상부의 수직변위

어 있다. 비대칭 박스형 거더의 상단 우측의 웨브의 수직변위의 변화를 그림 8에서 보여주고 있으며, 20개의 Hermitian 보요소 그리고 5400개의 4절점 쉘요소(SAP2000)를 사용한 결과와 비교하였다. 그림 8의 결과로부터 알 수 있듯이, 본 수치해석기법을 이용하면 보의 임의지점에서의 변위가 정확히 산정됨을 알 수 있다.

4.3 탄성지반위에 놓인 양단 고정된 박력보의 엄밀한 탄성해석

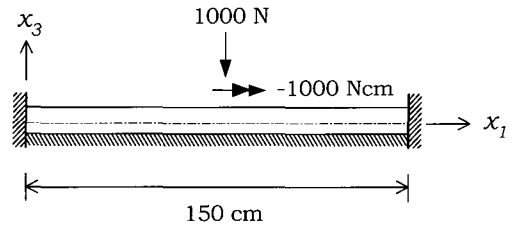
본 절에서는 탄성지반위에 놓인 비대칭 보의 복합거동을 살펴본다. 그림 9는 탄성지반위에 놓인 양단 고정된 비대칭

표 3 탄성지반위에 놓인 비대칭보의 중앙지간에서의 변위 및 비틀각(cm, rad.)

해석방법	요소의 수	U_y	U_z	θ
Hermitian 보요소	6	0.75130	-1.3876	-0.17891
	8	0.75194	-1.3893	-0.17926
	10	0.75211	-1.3898	-0.17936
	20	0.75222	-1.3901	-0.17942
본 연구		0.75222	-1.3901	-0.17943

표 4 탄성지반위에 놓인 비대칭보의 고정단 반력 (N, Ncm, Ncm^2)

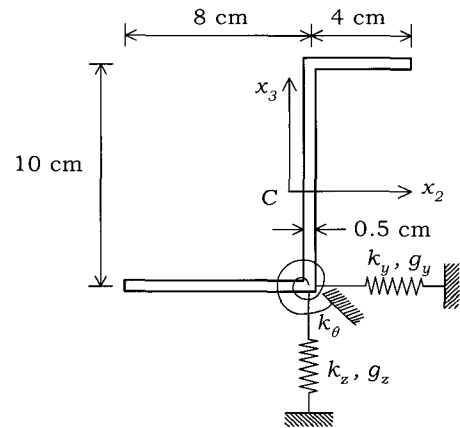
해석방법	요소수	F_2	F_3	M_1	M_2	M_3	M_ϕ
Hermitian 보요소	6	12.123	1.5792	-48.827	-2078.2	389.12	444.98
	8	12.087	1.6971	-48.802	-2082.7	388.63	441.24
	10	12.077	1.7295	-48.786	-2083.9	388.50	440.18
	20	12.071	1.7533	-48.748	-2084.7	388.41	439.42
본 연구		12.071	1.7576	-48.720	-2084.8	388.40	439.33



(a) 탄성지반위에 놓인 양단고정보

$E=30000N/cm^2, G=11500N/cm^2,$
 $A=11cm^2, J=0.91667cm^4, I_2=234.82353cm^4,$
 $I_3=30.66132cm^4, I_\phi=1575.75758cm^6,$
 $I_{2\phi}=-427.01891cm^5, I_{3\phi}=-81.19701cm^5,$
 $k_y=k_z=10N/cm^2, k_\theta=10N, g_y=g_z=10N$

(b) 단면제원



(c) 비대칭 단면형상

그림 9. 탄성지반위에 놓인 수직하중과 비틀모멘트를 받는 비대칭 박력보

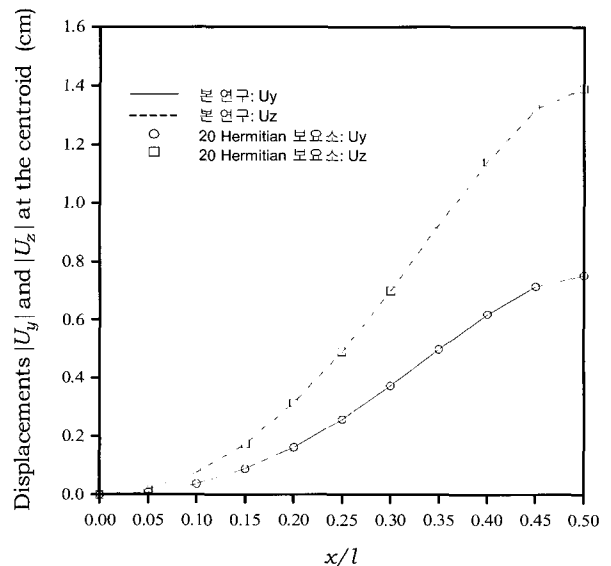


그림 10 탄성지반위에서 양단고정된 비대칭보의 도심에서의 횡방향 및 수직변위

보를 보여주고 있다. 이 때 보는 중앙에 수직력과 비틀모멘트를 받고 있으며 보의 끝단에서 지반은 없는 것으로 가정한다. 표 3과 4는 각각 횡방향 변위, 수직방향 변위, 보 중앙단의 비틀각, 그리고 양단에서의 반력을 보여주고 있다.

표 3과 4에서 알 수 있듯이 보를 20개의 요소로 나눈 유한요소의 해석결과와 본연구의 해석결과가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 그림 10은 보의 임의점의 도심에서의 횡변위 및 수직변위를 나타내고 있으며 20개의 요소를 사용한 유한요소의 해석결과와 비교하고 있다. 그림 10에서도 볼 수 있듯이 본 연구의 결과가 유한요소해와 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

탄성지반 위의 비대칭 박벽보의 해석을 위해서 엄밀한 요소 강성행렬을 결정하는 수치해석방법을 제시하였다. 또한 비대칭 단면을 가지는 박벽보의 휨-비틀이 연계된 좌굴해석을 위해서 평형방정식을 미리 적분해야 하는 선행기법의 결함을 극복한 개선된 수치해석 기법을 새롭게 개발하였다. 수치해석결과로부터 알 수 있듯이, 본 연구에서 제시한 엄밀한 요소강성행렬을 이용한 결과가 박벽보 요소를 이용한 유한요소의 해석결과와 ABAQUS 및 SAP2000의 쉘요소를 이용한 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다. 결과적으로 본 연구에서 제시한 수치해석 기법은 다양한 종류의 초기하중에 의해 계산된 임의의 '0'의 고유치의 수에 상관없이 박벽보의 지배방정식을 엄밀히 산정하는데 효과적이며 평형방정식을 미리 적분해야 하는 과정을 생략할 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 수치해석기법은 엄밀한 요소강성행렬을 수치적으로 산정함은 물론 고차의 연립 상미분방정식의 해법에도 효과적인 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 김문영, 윤희택, 광태영 (2002) 균일하게 탄성지지된 보-기둥 요소의 엄밀한 동적강성행렬 유도, 한국전산구조공학회 논문집, 15(3), pp.463~469.
- ABAQUS (2003). Standard user's manual, Ver. 6.1, Hibbit, Kalsson & Sorensen Inc.
- Aydogan, M. (1995) Stiffness-matrix formulation of beams with shear effect on elastic foundation, *Journal of Structural Engineering*, 121, pp.1265~1270.
- Banerjee, J.R., Williams, F.W. (1996) Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp.573~585.
- Banerjee, J.R. (1998) Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method, *Computers & Structures*, 69, pp.197~208.
- Chen, C.N. (1998) Solution of beam on elastic foundation by DQEM, *Journal of Engineering Mechanics*, 124, pp.1381~1384.
- Dube, G.P., Dumir, P.C. (1996) Tapered thin open section beams on elastic foundation I. buckling analysis, *Computers & Structures*, 61, pp.845~857.
- Gendy, A.S., Saleeb, A.F. (1999) Effective modeling of beams with shear deformations on elastic foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, 8, pp.607~622.
- Guo, Y.J., Weitsman, Y.J. (2002) Solution method for beams on nonuniform elastic foundations, *Journal of Engineering Mechanics*, 128, pp.592~594.
- Hetenyi, M. (1946) *Beams on elastic foundations*. Scientific Series, vol. XVI. Ann Arbor: The University of Michigan Press, University of Michigan Studies.
- Hosur, V, Bhavikatti, S.S. (1996) Influence lines for bending moments in beams on elastic foundations, *Computers & Structures*, 58, pp.1225~1231.
- Kim, M.Y., Chang, S.P., Kim, S.B. (1996) Spatial stability analysis of thin-walled space frames, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39, pp.499~525.
- Kim, M.Y., Yun, H.T., Kim, N.I. (2003) Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns, *Computers & Structures*, 81, pp.1425~1448.
- Kim, S.B., Kim, M.Y. (2000) Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames, *Engineering Structures*, 22, pp.446~458.
- Kuo, Y.H., Lee, S.Y. (1994) Deflection of nonuniform beams resting on a nonlinear elastic foundation, *Computers & Structures*, 51, pp.513~519.

$$f_{i,j}^{\text{III}} = z_{i,j}^{\text{III}} e^{\lambda_j^{\text{III}} x}, \quad i=1 \sim 14; \quad j=1 \sim 4$$

$$E^{\text{III}} =$$

$z_{1,1}^{\text{III}}$	$z_{1,2}^{\text{III}}$	$z_{1,3}^{\text{III}}$	$z_{1,4}^{\text{III}}$	1.0															
$z_{3,1}^{\text{III}}$	$z_{3,2}^{\text{III}}$	$z_{3,3}^{\text{III}}$	$z_{3,4}^{\text{III}}$		1.0														
$z_{7,1}^{\text{III}}$	$z_{7,2}^{\text{III}}$	$z_{7,3}^{\text{III}}$	$z_{7,4}^{\text{III}}$			1.0													
$z_{11,1}^{\text{III}}$	$z_{11,2}^{\text{III}}$	$z_{11,3}^{\text{III}}$	$z_{11,4}^{\text{III}}$				1.0												
$-z_{8,1}^{\text{III}}$	$-z_{8,2}^{\text{III}}$	$-z_{8,3}^{\text{III}}$	$-z_{8,4}^{\text{III}}$					-1.0											
$z_{4,1}^{\text{III}}$	$z_{4,2}^{\text{III}}$	$z_{4,3}^{\text{III}}$	$z_{4,4}^{\text{III}}$		1.0														
$-z_{12,1}^{\text{III}}$	$-z_{12,2}^{\text{III}}$	$-z_{12,3}^{\text{III}}$	$-z_{12,4}^{\text{III}}$																-1.0
$y_{1,1}^{\text{III}}$	$y_{1,2}^{\text{III}}$	$y_{1,3}^{\text{III}}$	$y_{1,4}^{\text{III}}$	1.0															
$y_{3,1}^{\text{III}}$	$y_{3,2}^{\text{III}}$	$y_{3,3}^{\text{III}}$	$y_{3,4}^{\text{III}}$		1.0	l	l^2												
$y_{7,1}^{\text{III}}$	$y_{7,2}^{\text{III}}$	$y_{7,3}^{\text{III}}$	$y_{7,4}^{\text{III}}$					1.0	l	l^2									
$y_{11,1}^{\text{III}}$	$y_{11,2}^{\text{III}}$	$y_{11,3}^{\text{III}}$	$y_{11,4}^{\text{III}}$								1.0	l							
$-y_{8,1}^{\text{III}}$	$-y_{8,2}^{\text{III}}$	$-y_{8,3}^{\text{III}}$	$-y_{8,4}^{\text{III}}$									-1.0	$-2l$						
$y_{4,1}^{\text{III}}$	$y_{4,2}^{\text{III}}$	$y_{4,3}^{\text{III}}$	$y_{4,4}^{\text{III}}$		1.0	$2l$													
$-y_{12,1}^{\text{III}}$	$-y_{12,2}^{\text{III}}$	$-y_{12,3}^{\text{III}}$	$-y_{12,4}^{\text{III}}$																-1.0

(II-6)

$$y_{i,j}^{\text{III}} = z_{i,j}^{\text{III}} e^{\lambda_j^{\text{III}} l}, \quad i=1, 3, 7, 11, 8, 4, 12; \quad j=1 \sim 4$$

$$f_{i,j}^{\text{IV}} = z_{i,j}^{\text{IV}} e^{\lambda_j^{\text{IV}} x}, \quad i=1 \sim 14; \quad j=1 \sim 2$$

$$E^{\text{IV}} =$$

$z_{1,1}^{\text{IV}}$	$z_{1,2}^{\text{IV}}$	1.0																	
$z_{3,1}^{\text{IV}}$	$z_{3,2}^{\text{IV}}$		1.0																
$z_{7,1}^{\text{IV}}$	$z_{7,2}^{\text{IV}}$			1.0															
$z_{11,1}^{\text{IV}}$	$z_{11,2}^{\text{IV}}$				1.0														
$-z_{8,1}^{\text{IV}}$	$-z_{8,2}^{\text{IV}}$					-1.0													
$z_{4,1}^{\text{IV}}$	$z_{4,2}^{\text{IV}}$		1.0																
$-z_{12,1}^{\text{IV}}$	$-z_{12,2}^{\text{IV}}$																		-1.0
$y_{1,1}^{\text{IV}}$	$y_{1,2}^{\text{IV}}$	1.0	l																
$y_{3,1}^{\text{IV}}$	$y_{3,2}^{\text{IV}}$			1.0	l	l^2	l^3												
$y_{7,1}^{\text{IV}}$	$y_{7,2}^{\text{IV}}$							1.0	l	l^2	l^3								
$y_{11,1}^{\text{IV}}$	$y_{11,2}^{\text{IV}}$											1.0	l						
$-y_{8,1}^{\text{IV}}$	$-y_{8,2}^{\text{IV}}$													-1.0	$-2l$	$-3l^2$			
$y_{4,1}^{\text{IV}}$	$y_{4,2}^{\text{IV}}$		1.0	$2l$	$3l^2$														
$-y_{12,1}^{\text{IV}}$	$-y_{12,2}^{\text{IV}}$																		-1.0

(II-9)

$$y_{i,j}^{\text{IV}} = z_{i,j}^{\text{IV}} e^{\lambda_j^{\text{IV}} l}, \quad i=1, 3, 7, 11, 8, 4, 12; \quad j=1 \sim 2$$

3) CASE IV: ${}^oF_1 = {}^oM_1 = {}^oM_2 = {}^oM_3 = 0$ 의 경우 변위 파라미터는 다음과 같다.

$$U_y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (\text{II-7a})$$

$$U_z = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \quad (\text{II-7b})$$

$$\theta = \gamma_1 + \gamma_2 x \quad (\text{II-7c})$$

$$X^{\text{IV}}(x) =$$

$f_{1,1}^{\text{IV}}$	$f_{1,2}^{\text{IV}}$	1.0	x																
$f_{2,1}^{\text{IV}}$	$f_{2,2}^{\text{IV}}$			1.0															
$f_{3,1}^{\text{IV}}$	$f_{3,2}^{\text{IV}}$				1.0	x	x^2	x^3											
$f_{4,1}^{\text{IV}}$	$f_{4,2}^{\text{IV}}$					1.0	$2x$	$3x^2$											
$f_{5,1}^{\text{IV}}$	$f_{5,2}^{\text{IV}}$						2.0	$6x$											
$f_{6,1}^{\text{IV}}$	$f_{6,2}^{\text{IV}}$							6.0											
$f_{7,1}^{\text{IV}}$	$f_{7,2}^{\text{IV}}$								1.0	x	x^2	x^3							
$f_{8,1}^{\text{IV}}$	$f_{8,2}^{\text{IV}}$									1.0	$2x$	$3x^2$							
$f_{9,1}^{\text{IV}}$	$f_{9,2}^{\text{IV}}$										2.0	$6x$							
$f_{10,1}^{\text{IV}}$	$f_{10,2}^{\text{IV}}$											6.0							
$f_{11,1}^{\text{IV}}$	$f_{11,2}^{\text{IV}}$												1.0	x					
$f_{12,1}^{\text{IV}}$	$f_{12,2}^{\text{IV}}$														1.0				
$f_{13,1}^{\text{IV}}$	$f_{13,2}^{\text{IV}}$																		
$f_{14,1}^{\text{IV}}$	$f_{14,2}^{\text{IV}}$																		

(II-8)