

논문 2007-44SC-4-10

적분공정을 위한 민감도 함수  $M_s$ 를 이용한 안정된 PID 동조( Stable PID Tuning for Integrating Processes  
using sensitive function  $M_s$  )

이 원 혁\*, 황 형 수\*\*

( Won-Hyok Lee and Hyung-Soo Hwang )

## 요 약

본 논문에서는 적분공정이 안정한 조건을 갖게 하는 설정가중치를 갖는 PID제어기<sup>[1]</sup>의 개선된 동조방법을 제안한다. 이 동조방법은 내부 궤환루프에 PD 제어기를 이용하여 적분공정을 안정되게한 후, 민감도 함수  $M_s$ 를 이용하여 공정의 안정조건에 맞는 PID제어기를 동조하였다. 그리고 적분공정의 특성인 오버슈트를 줄이기 위하여 설정가중치를 갖는 PID제어기를 사용함으로써 기존의 제어기가 갖는 결점을 극복했다. 제안되어진 동조 방법은 매우 간단하며 기존의 제어 동조방법보다 더 좋은 성능을 보여준다.

## Abstract

PID control is widely used to control stable processes, however, its application to integrating processes is less common. In this paper, we proposed a simple PID controller tuning method for integrating processes with time delay to meet a stable specification. With the proposed PID tuning method, we can obtain stable integrating processes using PD controller in inner feedback loop and a loop transfer function with desired stable specification. This guarantees both robustness and performance. Simulation examples are given to show the good performance of the proposed tuning method to other methods.

**Keywords :** PID control, stable, integrating process, specification, robustness

## I. 서 론

PID 제어기는 간단한 구조로 인해 이해하기 쉽고, 모델링시 에러가 적으며 실현하기 용이하여 현재까지 산업현장에 가장 널리 운영되어지고 있다. 또한 최적의 성능을 얻을 수 있는 PID 제어기의 동조 방법이 연구되어 있으며 그 중에서 Ziegler-Nichols rules, Cohen-Coon Method, IAE, ISE, ITAE, IMC Method 등

이 보편적으로 사용되고 있다. 그러나 이 동조방법들은 시간지연을 갖는 적분공정을 제어하기에는 어려움이 많다. 현재 시간지연을 갖는 적분공정에 대한 제어 역시 많은 동조 방법들이 제안되어지고 있다.<sup>[1~9]</sup> 그러나, 일반적으로 발생하는 과도한 오버슈트 그리고 정상상태로 수렴하는 정정시간이 길어지는 단점으로 페루프 응답이 좋지 못하다. 일반적인 적분공정은 작업의 조건과 시간에 따라 변화하기 때문에 제어기 설계나 해석 시에 민감하지 않도록 페루프 시스템의 제어기 파라미터를 동정하는 것은 매우 중요하다. 본 논문에서는 적분공정이 안정한 조건을 갖게 하는 설정가중치를 갖는 PID제어기<sup>[1]</sup>의 개선된 동조방법을 제안한다. 이 동조방법은 내부 궤환루프에 PD 제어기를 이용하여 적분공정을 안정된 조건으로 설계한 후, 민감도 함수  $M_s$ 를 이용하여 공

\* 정회원, 원광대학교 제어계측공학과  
(Department of Control and Instrumentation  
Engineering, Wonkwang University)

\*\* 평생회원, 원광대학교 전기전자 및 정보공학부  
(School of Electrical, Electronics and Information  
Engineering, Wonkwang University)

접수일자: 2007년4월27일, 수정완료일: 2007년6월4일

정의 안정조건에 맞는 PID제어기를 동조하였다. 그리고 적분공정의 특성인 오버슈트를 줄이기 위하여 설정가중치를 갖는 PID제어기를 사용함으로써 기존의 제어기가 갖는 결점을 극복했다. 제안되어진 동조 방법은 매우 간단하며 기존의 제어 동조방법보다 더 좋은 성능을 보여준다.

## II. 본 론

### 1. PID 제어기의 동조

적분공정을 제어하기 위한 내부 피드백 루프 제어기의 블록선도는 그림 1.처럼 표현된다. 여기서, 내부 피드백 루프의 PD 제어기는 적분공정이 안정하도록 변화시키는 중요한 동작을 하게 된다.

PID 제어기와 공정의 전달함수는  $G_c(s)$ 와  $G_p(s)$ 로 표현되며, 적분공정은 저차에 지연시간이 포함된 형태로 표현된다.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{S} + K_D S \quad (1)$$

$$G_p(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} e^{-Ls} \quad (2)$$

내부 피드백 루프의 PD 제어기는 다음과 같은 전달함수  $G_{PD}(s)$ 로 주어진다.

$$G_{PD}(s) = k_p + k_d s = k_1(a + bs) \quad (3)$$

여기에서 공정과의 계산을 고려하여

$$a = 1, b = T \quad (4)$$

로 설정한다. PD 제어기를 포함한 내부 피드백 루프의 폐루프 시스템 전달함수  $G_1(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_1(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_{PD}G_p(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts^2 + s + k_1K(Ts+1)e^{-Ls}} \quad (5)$$

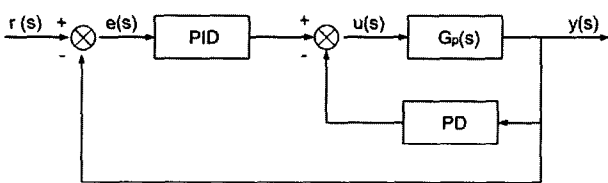


그림 1. 적분공정을 위한 이중 루프 제어기 블록다이어그램

Fig. 1. Two-loop Controller block diagram for integrating process.

식 (5)에서 분모항의 시간지연  $e^{-Ls}$  부분을 테일러 급수 전개를 사용하여 근사화하면

$$e^{-Ls} \cong 1 - Ls \quad (6)$$

식 (6)으로 표현되고, 식(6)을 식(5)에 대입하면

$$G_1(s) \cong G_m(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(1 - k_1KL)Ts^2 + (1 - k_1KL + k_1KT)s + k_1K} \quad (7)$$

이 된다.

여기서,  $G_m(s)$  은 테일러 급수 전개 방법으로부터 얻어진 2차 시간지연 모델이 된다. 전달함수  $G_m(s)$ 은 특성 방정식은 공정의 안정성을 위해 음의 극점을 가져야한다. 그렇기 때문에 Routh-Hurwitz 안정도 판별식로부터 다음과 같은 조건을 만족해야만 한다.

$$k_1 < \frac{1}{KL} \quad (8)$$

PD 제어기를 포함한 내부 피드백 루프의 이득 값  $k_1$ 은 최적의 외란 억제에 위해 Sung and Lee<sup>[6]</sup>의 이득 값을 사용하여 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$k_1 = \frac{0.2}{KL} \quad (9)$$

식 (9)로 표현되어진 공정이득 값  $k_1$ 은 안정도 판별식 식(8)을 만족하게 된다. 구해진 공정이득 값  $k_1$ 을 내부 피드백 루프 전달함수 식(7)에 대입하면,

$$G_1(s) \cong G_m(s) = \frac{e^{-Ls}}{\frac{(1 - k_1KL)Ts^2}{K} + \frac{(1 - k_1KL + k_1KT)}{K}s + k_1K} \quad (10)$$

식(10)으로 다시 표현된다.

여기서, 내부 피드백 루프에 포함되어진 PD 제어기가 Routh-Hurwitz 안정도 판별식에 의해 안정화된 공정이득  $k_1$  값을 사용하였기 때문에 주어진 적분공정은 안정하며, PID 제어기는 이미 안정화된 공정을 제어하도록 설계된다. 제어 시스템의 설계와 해석에서 강인성(robust)은 항상 고민되어지는 중요한 문제이다. 이 문제는 제어기의 설계에 사용되어지는 모델이 정확하게 표현되기가 어렵고, 실제 시스템이 작업의 조건과 시간에 따라 변화하기 때문에 나타난다. 이러한 불확실한 요소들로 인해 설계의 요구사항으로부터 벗어나있는 제

어 시스템이 만들어지며, 전체 시스템이 불안정하게 된다. 그러므로 제어기의 파라미터는 공정의 동특성에 의해 발생하는 모델의 에러나 변화에 민감하지 않은 방법으로 동조되어야한다. 공정의 민감도는 다음과 같이 정의된다.

$$M_s = \max_{0 \leq \omega < \infty} \left| \frac{1}{1 + G_p(j\omega)G_c(j\omega)} \right| = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)| \quad (11)$$

여기서 루프 전달함수는  $G_l(s) = G_c(s)G_p(s)$  이다.  $S(j\omega)$ 는 민감도 함수라고 하며,  $M_s$ 의 정도 (quantity)는 루프 전달함수  $G_l(s)$ 의 Nyquist curve로부터 임계점  $(-1, j0)$ 까지의 가장 짧은 거리의 역수로 간단히 표현되며 큰 값을 가질수록 시스템이 민감하게 된다. 기본적으로 최대값은 1.3 ~ 2.0의 범위를 갖는다. 식(11)를 사용한 민감도의 억제 방법은 기하학적 해석을 갖는다. 그림 2에서처럼 루프 전달함수  $G_l(s)$ 의 Nyquist curve는 임계점을 중심으로 반지름이  $1/M_s$ 를 가지는 원에 접하게 되며, 민감도를 고려한 시스템 조건은 이득여유와 위상여유를 고려한 시스템 조건과 비슷하게된다. 민감도 그리고 이득여유, 위상여유와의 관계는 다음과 같이 정의된다.<sup>[1]</sup>

$$Am > \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (12)$$

$$\phi > 2\arcsin \frac{1}{2M_s} \quad (13)$$

여기서  $Am$  과  $\phi_m$ 은 이득여유와 위상여유이다. 보통 전형적으로 사용되는 위상여유 $\phi_m$ 은 30°~60°이고 이득여유  $Am$ 가 2.5의 값을 갖는다. 만약  $M_s = 1.6$ 으로 선택하면  $Am > 2.66$ ,  $\phi > 36.4^\circ$ 를 얻을 수 있다. 그러므로 일정한 각도에서는 이득여유와 위상여유를 만족

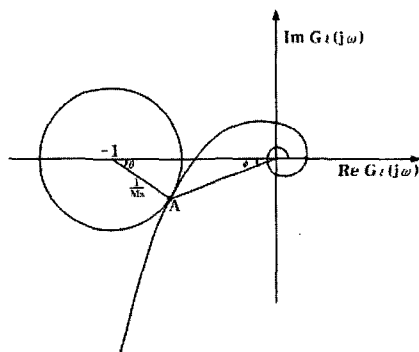


그림 2. 루프전달함수 후의 Nyquist 선도  
Fig. 2. Nyquist curve of the loop transfer function.

할 수 있다.

그림 2.에서와 같이 A점에서 Nyquist curve가 접하게 되었다면, A점을 지나는 루프 전달함수  $G_l(s) = G_c(s)G_p(s)$ 의 접하기 위한 조건은

$$G_l(j\omega) = -1 + \frac{1}{M_s} e^{-j\theta} \quad (14)$$

$$\arg \frac{dG_l(j\omega)}{d\omega} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (15)$$

가 된다.<sup>[1]</sup>

PID 제어기의 전달함수 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{PID}(s) = k \left( \frac{As^2 + Bs + C}{s} \right) \quad (16)$$

여기서,  $A = \frac{K_d}{k}$ ,  $B = \frac{K_p}{k}$ ,  $C = \frac{K_i}{k}$  가 된다.

PID 제어기의 영점과 내부 피드백 루프 전달함수  $G_m(s)$ 의 극점을 같게 선택한다면

$$A = \frac{1 - k_1KL}{K} T, \quad B = \frac{1 - k_1KL + k_1KT}{K}, \quad C = k_1$$

이 되며,

$$G_c(s)G_m(s) = \frac{ke^{-Ls}}{s} \quad (17)$$

이 된다. 여기에서  $k$  는 민감도 조건을 바탕으로 결정할 수 있다. 식(17)을 식(14), 식(15)에 대입하여 민감도를 고려하여 계산하면 다음과 같다.

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{k}{\omega} \sin(\omega L) = 1 - \frac{1}{M_s} \cos\theta \quad [RE] \\ \frac{k}{\omega} \cos(\omega L) = \frac{1}{M_s} \sin\theta \quad [IM] \\ \omega L + \arctan \frac{1}{\omega L} = \frac{\pi}{2} + \theta \end{array} \right] \quad (18)$$

식 (18)은 비선형방정식으로 직접 해를 찾을 수 없다. 그러므로 파라미터  $k$  값을 근사화하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.<sup>[12]</sup>

$$k = \frac{1}{d} \left( 1.451 - \frac{1.508}{M_s} \right) \quad (19)$$

식 (16)에  $k$ 값을 적용하여 PID 파라미터를 계산하면,

$$\left[ \begin{array}{l} K_p = \frac{1}{kL^2}(0.8L+0.2T)\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) \\ K_i = \frac{1}{kL^2}\left(0.2902 - \frac{0.3016}{M_s}\right) \\ K_d = \frac{0.8T}{k}\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) \end{array} \right] \quad (20)$$

을 얻을 수 있다.

그림 1.의 블록선도에서  $e(s) = r(s) - y(s)$ 를 고려하여 입력  $u(s)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$u(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) (r(s) - y(s)) - (k_p + k_d s) y(s) \quad (21)$$

$$\text{여기서, } b = \frac{K_p}{K_p + k_p}, \quad K'_p = K_p + k_p, \quad K'_i = K_i,$$

$$c = \frac{K_d}{K_d + k_d}, \quad K'_d = K_d + k_d \text{ 라 하면,}$$

$$u(s) = K'_p (br(s) - y(s)) + \frac{K'_i}{s} e(s) + K'_d s (cr(s) - y(s)) \quad (22)$$

로 다시 쓸 수 있으며, 식(22)는 설정에 가중치를 더한 PID 제어기와 같은 구조로 된다. 그러므로 그림 1.은 내부 피드백 루프가 없는 설정가중치를 더한 PID 제어기 형태로 바꿀 수 있으며, 이때 제어기의 파라미터는  $K'_p$ ,  $K'_i$ ,  $K'_d$  와 설정가중치  $b, c$ 로 다시 변경되어진다. 적분공정을 위한 PID 제어기의 파라미터를 다시 계산하면,

$$\left[ \begin{array}{l} K'_p = \frac{1}{KL^2}(0.8L+0.2T)\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) + \frac{0.2}{KL} \\ K'_i = \frac{1}{KL^2}\left(0.2902 - \frac{0.3016}{M_s}\right) \\ K'_d = \frac{0.8T}{K}\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) + \frac{0.2T}{KL} \\ b = \frac{(0.8L+0.2T)\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right)}{(0.8L+0.2T)\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) + \frac{0.2L}{KL}} \\ c = \frac{0.8T\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right)}{0.8T\left(1.451 - \frac{1.508}{M_s}\right) + 0.2T} \end{array} \right]$$

### III. 시뮬레이션

시뮬레이션은 제안된 PID 제어기 동조방법과 다른 방식의 PID제어기의 동조방법을 비교하였다. 제안된 PID제어기는  $M_s = 1.6$ 일 때 파라미터를 구하였으며, 시뮬레이션은 시간지연이 짧은 적분공정과 시간지연이 긴 적분공정으로 나누어 공정의 특성에 따른 결과를 보았다. 비교로 사용된 동조방법은 적분공정에 많이 쓰이는 Tan의 동조방법<sup>[7]</sup>과 Poulin의 동조방법<sup>[5]</sup> 그리고 최근에 제안된 Xu의 동조방법<sup>[13]</sup>과 Wang의 동조방법<sup>[12]</sup>을 사용하였다.

공정1 : 짧은 시간지연을 갖는 적분공정

$$G_p(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s(s+1)}$$

제안된 방법으로 PID 제어기의 파라미터를 동조하면  $K'_p = 5.5765, K'_i = 2.5425, K'_d = 3.0340, b = 0.8207, c = 0.6667$ 가 된다. 시뮬레이션은 입력은 스텝함수를 주어 각각의 동조방법을 비교하였으며, 25s에 외란을 주어 외란에 대한 강인성(robust)를 비교하였다. 결과는 그림 3.과 같이 주어진다.

시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이 과도상태에서 Tan의 동조방법은 10s 정도에 정상상태로 수렴은 하지만 초기에 큰 오버슈트와 언더슈트가 발생하며, Poulin의 동조방법은 Tan의 동조방법보다 오버슈트가 작아 좋은 성능을 나타내지만 정상상태로의 수렴시간이 20s 정도로 오히려 Tan의 동조방법보다 수렴시간이 길게

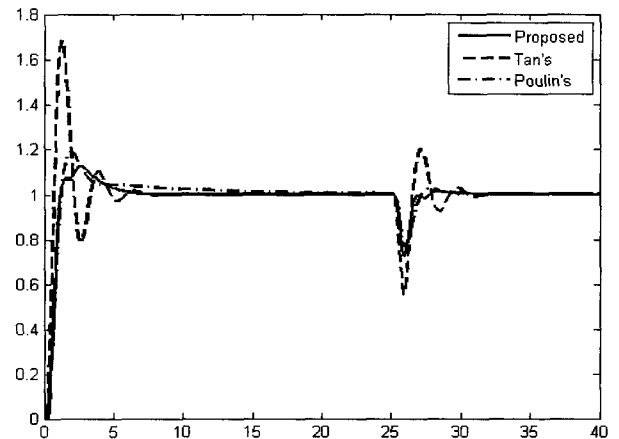


그림 3. 공정응답곡선

Fig. 3. Comparison of process response.

나타난다. 본 논문에서 제안된 동조방법은 비교되어진 Tan의 동조방법과 Poulin의 동조방법 보다 오버슈트가 적으며 정상상태까지의 수렴시간 역시 8s 정도로 더 우수한 성능을 보여준다. 외란에 대한 강인성(robust)면에서도 비교된 동조방법들보다 오버슈트가 적고 빠른 수렴으로 우수한 성능을 보여준다.

다음은 시간지연을 이 긴 공정에서의 성능을 비교 평가 하였다. 여기서 비교되는 동조방법은 최근에 좋은 성능을 나타내는 동조방법을 사용하였다.

공정2 : 긴 시간지연을 갖는 적분공정

$$G_p(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$

제안된 방법으로 PID 제어기의 파라미터를 동조하면  $K_p' = 0.3288, K_i' = 0.0254, K_d' = 0.3034, b = 0.6959, c = 0.6667$ 가 된다. 시뮬레이션 결과는 그림 4.과 같이 주어진다. 비교로 사용된 PID동조방법은 최근에 좋은 성능을 나타내는 적분공정의 PID 동조방법인 Xu<sup>[13]</sup>와 Wang<sup>[12]</sup>의 동조방법과 비교하였으며, 90s에 외란을 주어 외란에 대한 강인성도 비교하였다.

결과에서 볼 있듯이 시간지연이 긴 공정은 짧은 시간지연을 가진 공정보다 정상상태로의 수렴이 느려지는 것을 알 수 있다. 비교된 동조방법 중 Xu의 동조방법은 과도상태의 오버슈트와 언더슈트가 발생하고 정상상태로의 수렴 속도 역시 45s 정도로 나타난다. Wang의 동조방법은 Xu의 방법보다 과도상태의 오버슈트가 적으며 수렴속도 역시 25s 정도로 좋은 성능을 나타낸다. 본 논문에서 제안되어진 동조방법은 오버슈트가 Wang

의 방법과 거의 큰 차이를 나지 않으며 정상상태로의 수렴속도는 Wang의 동조방법보다 더 좋은 성능을 나타낸다. 또한 외란에 대한 성능을 비교해 보면 외란 후 오버슈트가 적으며 수렴속도면에서 우수한 성능을 보여준다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 시간지연을 갖는 적분공정을 위한 발전된 형태의 PID 동조방법을 제안하였다. 적분공정을 위한 전형적인 구조의 PID 제어기 형태를 벗어나 두 개의 루프를 사용한 구조를 채택하여 내부 루프에 PD 제어기로부터 공정의 안정성을 확보한 후, 민감도 함수  $M_s$ 를 이용하여 공정의 안정조건에 맞는 PID제어기를 동조하였다. 그리고 적분공정의 특성인 오버슈트를 줄이기 위하여 설정가중치를 갖는 PID제어기를 사용하셔서 더욱 우수한 성능을 보였다. 제안된 PID 동조방법은 매우 간단한 구조를 가지고 있으며, 시뮬레이션 결과에서 보였듯이 시간지연을 갖는 적분공정에서 다른 동조방법들보다 응답성능과 외란의 강인성 면에서 매우 뛰어난 성능을 나타낸다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Astrom, K. J. and Haggglund, T. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, Instrument Society of America. Research Triangle Park, NC, 1995.
- [2] Kwak, H. J., Sung, S.W. and Lee, I. On-line process identification and autotuning for integrating processes, Ind. Eng. Chem. Res. 1997, Vol. 36, 5329-5338.
- [3] Luyben, W.L. Tuning Proportional-Integral-Derivative Controllers for Integrator Deadtime Processes, Ind. Eng. Chem. Res. 1996, Vol.35, 3480-3483.
- [4] Majhi, S. and Atherton, D.P. Autotuning and controller design for processes with small time delays, IEE Proc.-Control Theory Appl., 1999, Vol 146, No. 5,415-425
- [5] Poulin, E. and Pomerleau, A. PID tuning for integrating and unstable processes, IEE Proc.-Control Theory Appl., 1998, Vol. 143, No.5, 429-435.
- [6] Sung, S.W. and Lee, I. Limitations and Countermeasures of PID controllers. Ind. Eng. Chem. Res. 1996, Vol. 35, No. 8,2596-2610.
- [7] Tan, W., Liu, J. and Tam, P.K.S. PID Tuning

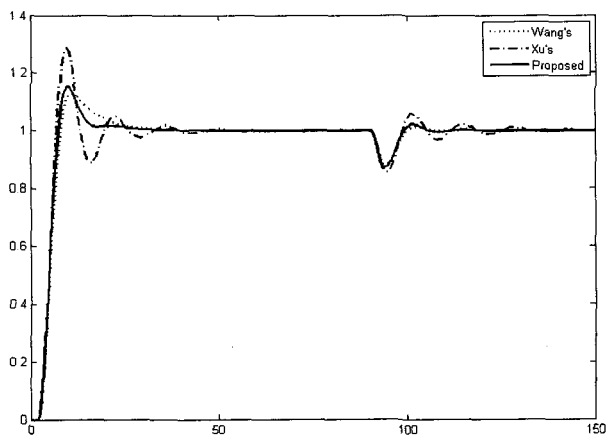


그림 4. 공정응답곡선

Fig. 4. Comparison of process response.

- based on loop-shaping H. control, IEE Proc.-Control Theory Appl., 1998, Vol. 145, No. 6, 485-490.
- [8] Wang, L. and Cluett, W.R. Tuning PID controllers for integrating processes, IEE Proc.-Control Theory Appl. 1997, Vol. 144, No. 5, 385-392.
- [9] Wang, Y. G. and Shao, H.H. PID autotuner based on gain and phase margin specifications. Ind.Eng.Chem.Res. 1999,38,3007-3012.
- [10] Wang, Y.G and Shao, H.H. Optimal tuning for PI controller, Automatica, 2000, 36, 147-152.
- [11] Yuwana, M. and Seborg, D.E. A new method for on-line controller tuning. AIChE J. 1982, 28, 434-439.
- [12] Ya-Gang Wang and Wen-Jian Cai PID Tuning for Integrating Processes with Sensitivity Specification. Proc.- 40th IEEE conference. Dec. 2001, 4087~4091
- [13] Jianghua Xu and Huihe Shao, A Novel Method of PID Tuning for Integrating Processes. proc-the 42nd IEEE conference. Dec. 2003, 139~142

---

 저 자 소 개
 

---



이 원 혁(정회원)

1997년 원광대학교 제어계측 공학과 학사 졸업.

1999년 원광대학교 제어계측 공학과 석사 졸업.

2003년 원광대학교 제어계측 공학과 박사 과정.

<주관심분야 : 로보틱스 및 지능제어>



황 형 수(평생회원)

1983년 전북대학교 전기공학과 석사 졸업.

1987년 전북대학교 전기공학과 박사 졸업.

1998년 원광대학교 전기전자및 정보공학부 교수

<주관심분야 : 퍼지 및 지능제어, 이산사건 시스템 및 제어>