財務管理硏究 第二十四劵 第四號(2007. 12), 1～43

Lévy과정 하에서 추세와 도약이 있는 경우 옵션가격결정모형 : Gerber-Shiu 모형을 중심으로

조승모* · 이필상**

〈요　약〉

전통적인 옵션가격결정모형인 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes model)은 기초자산의 로그수익률(log-return)이 브라운운동(Brownian motion)을 따른다는 가정에 기반을 두고 있다. 그러나 이 가정은 현실적인 한계가 많은 것으로 비판을 받아 왔다. 이에 따라 지난 20여 년간 브라운운동 이외에 새로운 확률과정을 도입한 모형들이 연구되고 도출되었다. 최근에는 레비과정(Lévy process)에 기반한 모형들이 활발히 연구되어오고 있는데, 그 기원은 1994년 거버(Gerber)와 쉬우(Shiu)에 의한 거버-쉬우 모형(Gerber-Shiu model)이다. 2004년 치앙(Cheang)은, 거버-쉬우 모형이 하나의 레비과정을 가정한 데 비해, 복수의 독립적인 레비과정을 가정하여 옵션가격결정모형을 유도함으로써 거버-쉬우 모형을 추세(drift)와 도약(jump)을 갖는 경우로 확장할 수 있는 가능성을 제시하였다. 본 논문에서는 치앙의 모형을 이용하여 레비과정 하에서의 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형을 유도하였다. 여기에 감마분포를 도입하여 1993년에 도출된 헤스톤 모형(Heston model)에 도약을 도입한 형태의 모형을 유도하였다. 아울러 이렇게 유도된 모형에 대하여 KOSPI200 지수 옵션 자료를 사용해서 블랙-숄즈 모형과의 가격설명력을 비교하였다. 그 결과, 본 논문에서 유도된 모형이 블랙-숄즈 모형 이상의 가격설명력을 보이는 것으로 나타났다.

주제어 : 옵션, 추세, 도약, 레비과정, 거버-쉬우

논문접수일 : 2007년 05월 25일　　논문게재확정일 : 2007년 08월 12일

* 고려대학교 대학원 박사과정
** 고려대학교 경영대학 교수

*** 본 논문을 위해 유익한 논평을 해주신 편집위원장님, 두 분의 익명 심사자 및 고려대학교 이과대학장 위인숙 교수님께 감사드립니다.

Ⅰ. 서 론

현대 옵션가격결정모형의 대표격이라 할 수 있는 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes model)은 기초자산의 로그수익률(log-return)이 브라운운동(Brownian motion)을 따른다는 가정에 기반을 두고 있다. 그러나 이 가정은 현실적인 한계가 많은 것으로 비판을 받아 왔고, 이에 따라 지난 20여 년간 브라운운동 이외에 새로운 확률과정(stochastic process)을 도입한 모형들이 연구되고 도출되었다.

최근에는 레비과정(Lévy process)에 기반한 모형들이 활발히 연구되어오고 있는데, 그 기원은 1994년 거버(Gerber)와 쉬우(Shiu)에 의한 거버-쉬우 모형(Gerber-Shiu model)이다. 레비과정은 기존에 제시된 모형들이 가정한 모든 확률과정을 포괄하는 일반적인 확률과정인 만큼, 레비과정 하에서 유도된 거버-쉬우 모형은 기존의 다른 옵션가격결정모형들을 포괄하는 일반적인 모형이라 하겠다. 즉, 거버-쉬우 모형이 주어진 경우, 레비과정에 대해 구체적인 확률분포(probability distribution)만 도입하면 기존의 모형을 포함하여 다양한 옵션가격결정모형들을 유도할 수 있다.

2004년 치앙(Cheang)은 기존의 거버-쉬우 모형을 수정 및 확장하여 구체적인 도약-확산 모형을 유도하는 방법에 대해 논의한 바 있다. 거버-쉬우 모형이 하나의 레비과정을 가정한 데 비해 치앙은 복수의 독립적인 레비과정을 가정하여 옵션가격결정모형을 유도함으로써 거버-쉬우 모형에 추세(drift)와 도약(jump)을 추가하여 일반적인 모형을 유도할 수 있는 가능성을 제시하였다.

본 논문에서는 치앙의 모형을 이용하여 레비과정 하에서의 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형을 명시적으로 유도한다. 다음, 레비과정에 대해 감마 분포를 도입, 헤스톤 모형(Heston model)에 도약을 도입한 형태의 모형을 유도한다. 아울러, KOSPI200에 대한 지수옵션 자료를 이용하여, 이렇게 유도된 모형의 가격설명력을 블랙-숄즈 모형과 비교한다.

본 논문의 이론적인 의의는, 머튼(Merton, 1976)이 블랙-숄즈 모형에 도약을 도입한 모형을 유도한 것과 마찬가지로, 본 논문은 거버-쉬우(1994) 모형에 도약을 도입한 모형을 유도한다는 점이다. 머튼(1976)의 경우와 다른 점은, 머튼이 정규분포를 가정한 블랙-숄즈 모형에 도약을 도입함으로써 하나의 구체적인 도약-확산 모형을 제시한 데 비해, 본 논문의 모형은 구체적인 확률분포를 가정하지 않은 거버-쉬우(1994) 모형에 도약을 도입함으로써 보다 포괄적인 이론적 모형을 제시한다는 점이다.

또한, 본 논문은 이렇게 유도된 추상적이고 포괄적인 모형에 감마과정을 적용하여 모형이 구체화되는 과정을 보이고, 이렇게 구체화된 모형을 KOSPI200 지수에 대한 콜옵션 자료를 사용해서 블랙-숄즈 모형과 실증비교한다는 점에서 실증적인 의의를 갖는다.

이는, 옵션가격결정모형에 레비과정을 처음 도입한 거버-쉬우(1994)는 물론, 구체적인 레비과정들과 이에 기반한 옵션가격결정모형들에 대해 이론적으로 논의한 라일베(Railbe, 2000)나 그 모형들을 KOSPI200 지수 자료를 이용하여 실증비교한 장운욱(2004)과는 달리, 도약을 도입한 모형에 대해 논의한다는 점에서 기존 문헌들과는 차별화된다고 하겠다. 또한, 이 논문의 이론적인 근거를 제시한 치앙(2004)의 경우와 비교해도, 치앙이 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 일반형을 명시적으로 제시하고 있지 않은데 비해, 본 논문은 그 일반형을 명시적으로 제시함으로써 치앙보다 이론적으로 한 걸음 더 나아갔으며, 실증비교까지 시도함으로써 치앙과도 차별화된다고 하겠다.

실무적인 측면에서, 본 논문의 모형은 블랙-숄즈 모형 등 구체적인 모형에 비해 장점을 가지고 있다고 할 수 있다. 즉, 옵션의 가격을 결정하고자 하는 기초자산의 로그수익률의 과거 자료를 이용해서 그 로그수익률이 어떤 확률분포를 갖는지 검증한 후, 가장 합당하다고 생각되는 확률분포를 본 논문의 모형에 적용하여 구체화하면 블랙-숄즈 모형 등 기존 모형들보다 더 정확한 옵션가격을 산출할 수 있다는 점에서 실무적으로도 유용한 함의를 갖는다 하겠다.

Ⅱ. 선행연구

1973년 머튼(Merton), 블랙(Black), 숄즈(Scholes)는 확률미적분학을 이용하여 블랙-숄즈 옵션가격결정 모형을 유도하였다.[1] 블랙-숄즈 모형은 유럽식 옵션의 공정가격을 결정하는 이론적 방법을 최초로 제시하였다. 블랙-숄즈 모형에서는 주가가 로그-정규분포(log-normal distribution)를 따른다고 가정하고 있는데, 이후의 실증연구들은 이에 대해 상반된 결과를 보여주었다. 그 결과, 이항분포모형(binomial model), 로그-포아송과정 모형(log-Poisson process model), 로그 감마과정 모형(log-gamma process model) 등 주가의 분포로서 여러 가지 다른 확률분포를 적용해 보는 시도들이 계속되었다. 그

---

1) Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, (1973), 634-654.

중 하나가 바로, 1993년 헤스톤이 주가가 로그-감마과정을 따른다는 가정 하에 유도한 로그-감마과정 모형이다.

블랙-숄즈 모형의 경우, 주가의 로그수익률이 브라운 운동을 따른다고 가정하고 있는데, 이 확률과정은 그 증분이 안정성(stationarity)과 독립성을 갖는 특성이 있다. 로그-감마과정 모형이나 이항분포 모형 등 기존의 다른 모형들 또한 이러한 특성을 가지고 있다. 이러한 특성이 레비과정(Lévy process)의 특성임에 착안한 거버(Gerber)와 쉬우(Shiu)는 1994년에 주가가 로그-레비과정을 따른다고 가정하고 옵션가격결정모형을 유도하였다. 이것이 바로 거버-쉬우 모형(Gerber-Shiu model)이다. 레비과정은 구체적인 확률분포를 가정하지 않는 추상적인 확률과정으로서 기존에 제시된 주가모형들이 가정한 모든 확률과정을 포괄하는 일반적인 확률과정이다. 따라서, 거버-쉬우 모형의 경우, 레비과정에 대해 구체적인 확률분포만 도입하게 되면 기존의 모형을 포함하여 다양한 옵션가격결정모형들을 쉽게 유도할 수 있다.

한편, 1976년에 머튼(Merton)은 주가에 대한 도약-확산 모형(jump-diffusion model)을 제안한 바 있는데, 이 모형은 주가가 두 가지 요소로 구성되어 있다고 가정하고 있다. 즉, 1973년의 블랙-숄즈 모형에서와 같이 브라운 운동으로 표현되는 확산요소와, 컴파운드 포아송과정(compound Poisson process)으로 표현되는 도약요소가 그것이다. 2004년에 치앙(Cheang)은 기존의 거버-쉬우 모형을 수정 및 확장하여 구체적인 도약확산 모형을 유도하는 방법을 제시하였다. 치앙은 큐물란트변환(cumulant transform)을 이용하여 거버-쉬우 모형을 보다 간결한 형태로 표현하였고, 거버-쉬우 모형이 하나의 레비과정을 가정한 데 비해 복수의 독립적인 레비과정을 가정하여 옵션가격결정모형을 유도함으로써 도약-확산 모형을 보다 간단하게 유도할 수 있는 가능성을 제시하였다.

본 논문에서는 치앙의 모형을 이용하여 레비과정 하에서의 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형을 명시적으로 유도한다. 다음, 레비과정에 대해 감마 분포를 도입, 헤스톤 모형(Heston model)에 도약을 도입한 형태의 모형을 유도한다. 아울러, KOSPI200에 대한 지수옵션 자료를 이용하여, 이렇게 유도된 모형의 가격설명력을 블랙-숄즈 모형과 비교한다.

Ⅲ. 거버-쉬우 모형에 추세와 도약의 도입

1. 추세(drift)를 갖는 거버-쉬우 모형

본격적인 논의에 앞서, 앞으로의 논의에 필요한 수학적인 개념들을 살펴보도록 하자. 우선, $M_X(\theta) := E(e^{\theta X})$가 확률변수(random variable) X에 대한 적률생성함수(moment-generating function)일 때, $\kappa_X(\theta) := \ln M_X(\theta)$를 확률변수 X에 대한 큐물란트변환(cumulant transform)이라고 한다.

또, 확률변수 X와 모수 θ에 대해서, X의 확률밀도함수(probability density function) $dF_X(x)$를 $dF_{X,\theta}(x) = \dfrac{e^{\theta x} dF_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} dF_X(y)}$로 변환시키는 과정을 에셔변환(Esscher transform)이라고 하는데, 이때, $dF_X(x)$에 대응되는 원래의 확률측도(probability measure)를 P, $dF_{X,\theta}(x)$에 대응되는 변환된 확률측도를 P_θ로 나타낸다.

여기서, $dF_{X,\theta}(x) = \dfrac{e^{\theta x} dF_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} dF_X(y)}$에 $\theta = 0$을 대입하면, $dF_{X,0}(x) = dF_X(x)$이므로, $P = P_0$가 된다.

또한, 정의상 $M_X(\theta) = e^{\kappa_X(\theta)}$이므로,

$$dF_{X,\theta}(x) = \frac{e^{\theta x} dF_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} dF_X(y)} = \frac{e^{\theta x} dF_X(x)}{M_X(\theta)} = \frac{e^{\theta x} dF_X(x)}{e^{\kappa_X(\theta)}} = e^{\theta x - \kappa_X(\theta)} dF_X(x)$$

즉, $dF_{X,\theta}(x) = e^{\theta x - \kappa_X(\theta)} dF_X(x)$가 된다.

아울러, $dF_{X,\theta}(x) = \dfrac{e^{\theta x} dF_X(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} dF_X(y)}$이므로,

$$M_{X,\theta}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \frac{e^{\theta x} dF_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} dF_X(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta + u)x} dF_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} dF_X(y)} = \frac{M_X(\theta + u)}{M_X(\theta)}$$

즉, $M_{X,\theta}(u) = \dfrac{M_X(\theta + u)}{M_X(\theta)}$가 성립한다.

이제, 이러한 정의와 성질들을 바탕으로 거버-쉬우 모형을 살펴보도록 하자. 거버-쉬우 모형2)에 따르면, 레비과정 $\{X_t : t \geqq 0\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, $S_t = S_0 e^{X_t}$이면,

$$C_t = S_t P_{\theta^*+1}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r\tau}P_{\theta^*}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right]$$

단,

$$\tau = T - t$$
$$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta),$$
$$\kappa(\theta^* + 1) = \kappa(\theta^*) + r.$$

(증명). 부록 참조.

거버-쉬우 모형에서는 주가모형을 $S_t = S_0 e^{X_t}$로 가정하고 있는데, $\{X_t : t \geqq 0\}$가 레비과정인 만큼 구체적인 확률분포가 결정되지 않기 때문에, 옵션가격모형이 확률측도에 의한 추상적인 식으로 나타난다. 여기에 어떤 확률분포를 가정하느냐에 따라 옵션가격결정모형이 구체화된다.

한편, 거버-쉬우 모형에서는 추세(drift) 부분을 명시적으로 나타내고 있지 않은데, 블랙-숄즈 모형 등 실제로 구체화된 모형들에서는 추세를 반영하는 것이 일반적이다. 이런 이유로, 거버-쉬우 모형에도 추세를 반영하여 보다 구체화된 모형을 유도할 필요가 있다. 거버-쉬우 모형에 추세를 명시적으로 포함할 경우 다음과 같은 모형이 유도된다.

(정리 1). 레비과정 $\{X_t : t \geqq 0\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, 추세(drift) at를 추가하여 $S_t = S_0 e^{at + X_t}$이면,

$$C_t = S_t P_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] - Ke^{-r\tau}P_0\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta),$$
$$a = r - \kappa(1).$$

2) Gerber, H. U. and E. S. W. Shiu, "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of Society of Actuaries*, 46, (1994), 99-140.

(증명). 부록 참조.

거버-쉬우 모형에 비해서, 이 모형은 모수 θ를 따로 계산할 필요가 없어서 모형을 구체화하는 과정이 더욱 간편해졌다는 점을 장점으로 지적할 수 있다. 이는 기존의 옵션가격결정모형을 포괄하는 일반화된 모형으로서의 거버-쉬우 모형의 특성을 그대로 가지면서, 모형의 구체화를 위해 구체적인 확률분포를 적용하는 과정을 보다 간편하게 만든다는 장점을 갖는다고 하겠다.

이 모형은 그 자체로서 갖는 이론적 의미보다, 거버-쉬우 모형에 도약과 추세를 도입하기 위한 중간 단계로서의 의미가 크다 하겠다. 즉, 도약 및 추세를 갖는 거버-쉬우 모형을 유도하는 과정에 대해 수학적 함의를 제공하는 것이다. 부록에 제시된 증명과정을 살펴보면, 이 모형의 증명과정은 도약 및 추세를 갖는 거버-쉬우 모형의 증명과정과 일맥상통한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 보다 복잡한 모형을 유도하기 위한 디딤돌이 되는 셈이다.

2. 도약(jump) 및 추세(drift)를 갖는 거버-쉬우 모형

이제, 추세뿐만 아니라 도약까지 갖는 모형을 유도해 보자. 유도에 앞서서, 치앙(2004)의 모형에 대한 논의가 필수적인데, 치앙의 모형을 논의하기 위한 수학적인 개념들을 먼저 간단히 살펴보도록 하자. 이들 개념들은 앞서 논의한 큐물란트변환이나 에셔변환을 벡터 개념으로 확장한 것이다.

우선, $M_{\boldsymbol{X}}(\Theta):=E(e^{\Theta' X})$가 확률벡터(random vector) $\boldsymbol{X}$에 대한 적률생성함수(moment-generating function)일 때, $\kappa_{\boldsymbol{X}}(\Theta):=\ln M_{\boldsymbol{X}}(\Theta)$를 확률벡터 $\boldsymbol{X}$에 대한 큐물란트변환(cumulant transform)이라고 한다.

또, 확률벡터 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$와 모수 $\Theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$에 대해서, $\boldsymbol{X}$의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$를 $dF_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x})=\dfrac{e^{\Theta'\boldsymbol{x}}dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Theta'\boldsymbol{y}}dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})}$로 변환시키는 과정을 에셔변환(Esscher transform)이라고 하는데, 이때, $dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$에 대응되는 원래의 확률측도(probability measure)를 P, $dF_{\boldsymbol{X},\Theta}$에 대응되는 변환된 확률측도를 P_{Θ}로 나타낸다.

여기서, $dF_{\boldsymbol{X},\Theta}(\boldsymbol{x})=\dfrac{e^{\Theta'\boldsymbol{x}}dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Theta'\boldsymbol{y}}dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})}$에 $\Theta=0$을 대입하면, $dF_{\boldsymbol{X},0}=dF_{\boldsymbol{X}}$이므로, $P=P_0$가 된다.

또한, 정의상 $M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta}) = e^{\kappa_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta})}$이므로,

$$dF_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{x}} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{y}} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})} = \frac{e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{x}} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta})} = \frac{e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{x}} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{e^{\kappa_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta})}} = e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{x} - \kappa_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta})} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

즉, $dF_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{\Theta}'\boldsymbol{x} - \kappa_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta})} dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$가 된다.

아울러, $X_1, \cdots, X_n$가 상호독립일 경우에 $M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\theta_i)$가 성립하므로, $X_1, \cdots, X_n$가 상호독립일 경우에 큐물란트 변환의 정의에 의해 $\kappa_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_{X_i}(\theta_i)$도 성립한다.

이제, 치앙의 모형을 살펴보도록 하자. 치앙(2004)의 모형[3]에 따르면, 상호독립인 레비과정 $\{X_{1,t} : t \geqq 0\}, \cdots, \{X_{n,t} : t \geqq 0\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, $S_t = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} X_{i,t}}$이면,

$$C_t = S_t P_{\theta_1^*+1, \cdots, \theta_n^*+1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r\tau} P_{\theta_1^*, \cdots, \theta_n^*}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa_i(\theta_i) = \ln M_{X_{i,1}}(\theta_i),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i(\theta_i^* + 1) = \sum_{i=1}^{n}\kappa_i(\theta_i^*) + r.$$

(증명). 부록 참조.

치앙 모형을 거버-쉬우 모형과 비교해 보면, 거버-쉬우 모형이 하나의 레비과정을 가정하고 있는데 비해, 치앙 모형은 복수의 독립적인 레비과정의 합을 가정하여 거버-쉬우 모형을 확장한 것이라는 것을 알 수 있다. 이는, 전통적인 CAPM이 단일요인모형을 가정하는데 비해, APT가 다요인모형을 가정하여 모형을 확장한 것과 같은 맥락이라 볼 수 있다.

이제 치앙 모형을 이용하여 거버-쉬우 모형에 추세뿐만 아니라 도약까지 도입하여 일반화된 모형을 유도하기로 한다. 기본 아이디어는 치앙 모형에서 두 개의 독립적인 레비과정을 가정하여, 하나는 추세를 갖는 확산(diffusion) 부분으로, 다른 하나는 추세를 갖는 도약 부분으로 각각 구성하여 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형을 유도하는 것이다. 이렇게 해서 유도한 모형은 다음과 같다.

---

3) Cheang, G. H. L "A Simple Approach to Pricing Options with Jumps," Preprint, (2004).

(**정리 2**). 레비과정 $\{X_t : t \geqq 0\}$와 $N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$인 컴파운드 포아송과정 $\left\{\sum_{n=1}^{N_t} J_n : t \geqq 0\right\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, 추세(trend) at와 도약(jump) $-\lambda kt + \sum_{n=1}^{N_t} J_n$을 추가하여 $\{X_t : t \geqq 0\}$와 $\left\{\sum_{n=1}^{N_t} J_n : t \geqq 0\right\}$가 상호독립이고 $S_t = S_0 e^{at + X_t - \lambda kt + \sum_{n=1}^{N_t} J_n}$이며 $k = E\left[e^{J_n} - 1\right]$이면,

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau} \frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!} \left[S_t P_{1,1}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \right) \right.$$
$$\left. - Ke^{-(r-\lambda k)\tau} \left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \right) \right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta),$$
$$a = r - \kappa(1),$$
$$k = E\left[e^{J_n} - 1\right].$$

(**증명**). **부록 참조.**

이 논문의 핵심이라고 할 수 있는 이 모형은, 머튼(1976)의 도약-확산 모형의 일반화된 모형이라고 할 수 있는데, 머튼의 모형이 확산과 도약 모두 정규분포를 가정하고 있는데 비해, 이 모형은 구체적인 확률분포를 가정하지 않음으로써 보다 일반화된 형태의 모형을 제시하고 있다는 데에 그 이론적 의의가 있다. 즉, 머튼이 정규분포를 가정한 블랙-숄즈 모형에 도약을 도입함으로써 하나의 구체적인 도약-확산 모형을 제시한데 비해, 본 논문의 모형은 구체적인 확률분포를 가정하지 않은 거버-쉬우(1994) 모형에 도약을 도입함으로써 보다 포괄적인 이론적 모형을 제시하고 있다는 점에서 이론적인 의의가 있다 하겠다.

이는, 옵션가격결정모형에 레비과정을 처음 도입한 거버-쉬우(1994)는 물론, 구체적인 레비과정들과 이에 기반한 옵션가격결정모형들에 대해 이론적으로 논의한 라일베(Railbe, 2000)나 그 모형들을 KOSPI200 지수 자료를 이용하여 실증비교한 장운욱(2004)과는 달리, 도약을 도입한 모형에 대해 논의한다는 점에서 기존 문헌들과도 차별

화된다고 하겠다. 또한, 이 논문의 이론적인 근거를 제시한 치앙(2004)의 경우와 비교해도, 치앙이 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 일반형을 명시적으로 제시하고 있지 않은데 비해, 본 논문은 그 일반형을 명시적으로 제시함으로써 치앙보다 이론적으로 한 걸음 더 나아갔다고 하겠다.

거버-쉬우 모형에 구체적인 확률분포를 적용함으로써 기존의 구체적인 옵션가격결정모형을 쉽게 유도해낼 수 있는 것과 마찬가지로, 이 모형에 구체적인 확률분포를 적용함으로써 머튼의 도약-확산 모형을 비롯한 구체적인 도약-확산 모형을 쉽게 유도할 수 있음은 물론이다.

실무적인 측면에서, 본 논문의 모형은 블랙-숄즈 모형 등 구체적인 모형에 비해 장점을 가지고 있다고 할 수 있다. 즉, 옵션의 가격을 결정하고자 하는 기초자산의 로그수익률의 과거 자료를 이용해서 그 로그수익률이 어떤 확률분포를 갖는지 검증한 후, 가장 합당하다고 생각되는 확률분포를 본 논문의 모형에 적용하여 구체화하면 블랙-숄즈 모형 등 기존 모형들보다 더 정확한 옵션가격을 산출할 수 있다는 점에서 실무적으로도 유용한 함의를 갖는다 하겠다.

Ⅳ. 감마과정 하에서 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형

위에서 거버-쉬우 모형에 추세 및 도약을 도입한 형태의 모형에 대해 논의하였다. 그러나 레비과정이 구체적인 확률분포를 가정하지 않는 추상적인 확률과정인 만큼, 이에 기반한 거버-쉬우 모형 및 그 확장모형들은 추상적인 모형일 수 밖에 없다. 여기서는 레비과정에 감마분포를 적용하여 확률과정을 구체화함으로써 앞서 유도한 거버-쉬우 확장모형을 구체화하고자 한다.

추세를 가진 감마과정에 기반한 옵션가격결정모형은 1993년 헤스톤에 의해 제시된 바 있다. 여기서는 앞서 유도한 추세를 갖는 거버-쉬우 모형에 감마과정을 도입함으로써 헤스톤 모형[4)]이 유도될 수 있음을 보인다. 다음, 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형에 감마과정을 도입함으로써 헤스톤 모형에 도약을 도입한 모형을 유도한다.

1. 감마과정 하에서 추세를 갖는 거버-쉬우 모형(헤스톤 모형)

먼저, 추세를 갖는 거버-쉬우 모형에 감마과정을 도입하면 다음과 같이 헤스톤 모형

4) Heston, S. L., "Invisible Parameters in Option Prices," *Journal of Finance*, 48, (1993), 933-947.

이 유도된다.

(정리 3). $G_t \sim \Gamma(\alpha t, \beta)$인 감마과정 $\{G_t : t \geqq 0\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, $S_t = S_0 e^{G_t - bt}$이면,

$$C_t = S_t\left[1 - G_{\alpha\tau,\, \beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right] - Ke^{-r\tau}\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$

$$a = r - \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right),$$

$$G_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx.$$

(증명). 부록 참조.

추세를 갖는 거버-쉬우 모형과 비교해보면, 추상적인 확률측도로 표시되던 부분이 구체적인 감마분포의 누적확률분포함수(cumulative distribution function)로 대체되었음을 알 수 있다.

2. 감마과정 하에서 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형 (도약을 갖는 헤스톤 모형)

다음, 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형에 감마과정을 도입한다.

(정리 4). $G_t \sim \Gamma(\alpha t, \beta)$인 감마과정 $\{G_t : t \geqq 0\}$과 $N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$이고 $J_n \overset{i.i.d.}{\sim} \Gamma(\gamma, \beta)$인 컴파운드 포아송과정 $\left\{\sum_{n=1}^{N_t} J_n : t \geqq 0\right\}$에 대하여, t시점에서의 주가를 S_t, 그에 대한 유럽식 콜옵션의 가격을 C_t, 그 만기를 T, 행사가격을 K, 연간이자율을 r이라고 할 때, $\{G_t : t \geqq 0\}$와 $\left\{\sum_{n=1}^{N_t} J_n : t \geqq 0\right\}$가 상호독립이고 $S_t = S_0 e^{G_t - bt - \lambda kt + \sum_{n=1}^{N_t} J_n}$이며 $k = E\left[e^{J_n} - 1\right]$이면,

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}\left[S_t\left[1 - G_{\alpha\tau + n\gamma, \beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right]\right.$$

$$- Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^{n}\left[1-G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t}+(\lambda k-a)\tau\right)\right]\Bigg]$$

단,

$$\tau = T - t,$$

$$a = r - \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right),$$

$$k = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\gamma} - 1,$$

$$G_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx.$$

(증명). 부록 참조.

추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형과 비교해보면, 추상적인 확률측도로 표시되던 부분이 구체적인 감마분포의 누적확률분포함수(cumulative distribution function)로 대체되었음을 알 수 있다.

이 모형에서는 도약의 크기를 $J_n \overset{i.i.d.}{\sim} \Gamma(\gamma, \beta)$와 같이 감마분포로 가정하였다. 물론, 치앙(2004)과 같이 감마분포가 아니라 지수분포로 나타낼 수도 있지만, 지수분포가 감마분포의 한 종류임을 감안하면, 이 논문에서 도약의 크기를 감마분포로 나타낸 것은 치앙(2004)의 경우를 보다 일반화한 것이라 볼 수 있다. 또한, 머튼(1976)의 도약-확산 모형에서 도약의 크기를 확산의 분포와 마찬가지로 정규분포로 나타낸 만큼, 일관성 있는 비교를 위해 여기서도 도약의 크기를 확산의 분포와 마찬가지로 감마분포로 나타내 보았다.

또한, 이 모형은 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형에 감마분포를 적용하여 유도한 모형으로서, 치앙(2004)의 논의와는 다른 방식으로 모형을 유도하였다고 할 수 있다.

Ⅴ. 실증분석

여기서는 위에서 유도한 감마과정 하에서 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형과 블랙-숄즈 모형의 가격설명력을 실증비교 한다.

실증분석에 사용된 자료는 2004년 1월부터 2007년 2월까지의 KOSPI200 지수에 대

한 일별 콜옵션 자료로서, 해당일의 옵션 종목별 가격(종가), 해당일의 KOSPI200 지수, 해당일로부터 옵션 종목별 만기까지의 남은 일수, 옵션 종목별 행사가격의 항목으로 구성되어 있으며, FnGuide를 통해 구하였다. 표본을 구성하는 데에 있어서, 거래량이 100 미만인 옵션은 그 시장가격이 합리적으로 결정되었다고 보기 힘들다고 판단하여 이에 대한 자료는 제외하였다[5]. 연간이자율로는 한국은행 금융통계 데이터베이스에서 구한 일별 CD91 금리를 사용하였다.

표본은 각 달의 첫째, 셋째 화요일 자료들로는 내표본(in-sample)을, 바로 다음 날 자료로는 외표본(out-of-sample)을 구성하였다. 내표본은 비교대상인 모형들의 모수를 추정하는데 사용하였고, 외표본은 그 전날 추정된 모수(내표본으로 추정된 모수)를 사용해서 각 모형들의 가격설명력을 비교하는데 사용하였다. 이렇게 내표본과 외표본으로 나누어서 분석하는 이유는, 내표본에서의 결과가 모수 수의 증가에 기인한 것일 수 있기 때문에, 외표본의 결과를 통해서 이러한 결과가 단순히 모수 수의 증가에 기인한 것만은 아니라는 것을 보여주기 위함이다.[6]

각 모형의 모수를 추정하기 위해서, 1997년 박시(Bakshi), 카오(Cao), 첸(Chen)이 사용한 방법[7]을 사용하였는데, 이는 구체적으로 다음과 같다.

t시점에서 만기까지의 기간 τ, 행사가격 K, $m\times 1$ 모수 벡터 Φ를 갖는 옵션가격결정공식 $C_t(\tau, K, \Phi)$에 대하여, 동일한 시점 t에서 동일한 기초자산에 대한 옵션이 $N \geqq m+1$개 있고, n번째 옵션의 만기까지의 기간이 τ_n, 행사가격이 K_n, 시장가격이 $\widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi)$, 이론가격이 $C_t(\tau, K, \Phi)$일 때, 비선형 최소자승법에 의한 모수 Φ의 추정치는 $\widehat{\Phi_t} = \arg\min_{\Phi} \sum_{n=1}^{N} \left[\widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi) - C_t(\tau_n, K_n, \Phi) \right]^2$와 같다.

이렇게 추정한 모수 벡터에 기반해서 각 모형의 가격설명력을 측정하기 위해 다음과 같은 개념들을 도입하였다.

t시점에서 만기까지의 기간 τ, 행사가격 K, $m\times 1$ 모수 벡터 Φ를 갖는 옵션가격결정공식 $C_t(\tau, K, \Phi)$에 대하여, 동일한 시점 t에서 동일한 기초자산에 대한 옵션이 $N \geqq m+1$개 있고, n번째 옵션의 만기까지의 기간이 τ_n, 행사가격이 K_n, 시장가격이

5) 장운욱, “Option Pricing with Lévy process ; Empirical tests of KOSPI200 Index option with NIG, VG, CGMY Lévy processes and with Lévy SV models,” 연세대학교 대학원 석사학위논문, 서울, 2004.

6) Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, (1997), 2003-2049.

7) Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, (1997), 2003-2049.

$\widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi)$, 이론가격이 $C_t(\tau_n, K_n, \Phi)$일 때,

(a) $\epsilon_t(\tau_n, K_n, \Phi) := \widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi) - C_t(\tau_n, K_n, \Phi)$를 *t시점에서 n번째 옵션의 가격오차* (*the pricing error for the nth option at time t*)라 하고,

(b) $\mathrm{SSE}(t) := \sum_{n=1}^{N} \left[\widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi) - C_t(\tau_n, K_n, \Phi) \right]^2$를 *t시점에서 오차의 자승합*(*the sum of squared errors at time t*)이라 하고,

(c) $\mathrm{AAE}(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi) - C_t(\tau_n, K_n, \Phi) \right|$를 *t시점에서 평균절대오차*(*the average absolute error at time t*)라 하며,

(d) $\mathrm{AAAE}(t, T) := \frac{1}{T-t+1}\sum_{m=t}^{T} \mathrm{AAE}(m)$를 *t시점부터 T시점간의 평균절대오차의 평균*(*the average average absolute error from time t to T*)라 한다.

즉, $\widehat{\Phi}_t = \underset{\Phi}{\mathrm{argmin}}\, \mathrm{SSE}(t)$이다.

각 모형의 가격설명력(가격적합도)을 측정하기 위해 각각의 해당 일자 t에 대해 t일에서의 평균절대오차 $\mathrm{AAE}(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{C}_t(\tau_n, K_n, \Phi) - C_t(\tau_n, K_n, \Phi) \right|$와 각 표본의 전체기간 동안 평균절대오차의 평균 $\mathrm{AAAE}(t, T) := \frac{1}{T-t+1}\sum_{m=t}^{T} \mathrm{AAE}(m)$를 측정하였다. 물론, 이들 측정치는 그 수치가 작으면 작을수록 가격적합도가 높다는 것을 의미한다. 먼저 각각의 모형에 대해 내표본의 개별 일자에 대한 AAE(t)를 측정한 후 내표본 전체에 대한 평균 평균절대오차 AAAE(t, T)를 측정해서 내표본에서의 모형간 가격적합도를 일별로, 또 전체표본기간에 걸쳐서 비교했고, 내표본에서 추정한 모수의 추정치를 바로 다음날인 외표본의 개별 일자에 적용해서 같은 방법으로 모형간 가격적합도를 비교하였다. 이와 같이 내표본과 외표본을 나누어서 비교를 한 이유는, 내표본에서의 결과가 모수 수의 증가에 기인한 것만은 아니라는 것을 보여주기 위함이다.

우선 내표본에서의 결과를 살펴보면, <표 1>에서 보는 바와 같다. 우선 내표본에서 각 날짜별로 해당 모형의 모수를 추정하고, 그 모수를 바탕으로 한 AAE를 계산하였다. 블랙-숄즈 모형에서는 Sigma(σ)가 모수이며, 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형에서는 Lambda(λ), Alpha(α), Beta(β), Gamma(γ)가 모수이다. AAE는 각 모형의 가격설명력에 대한 측정치로서 그 수치가 작을수록 가격설명력이 높음을 나타낸다. 각 날짜별로 AAE를 비교해보면, 대부분의 경우 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설

<표 1> 내표본에서의 모형간 가격설명력 비교

블랙-숄즈 모형과 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형에 대해서 내표본에서의 가격설명력을 비교하였다. 우선 내표본에서 각 날짜별로 해당 모형의 모수를 추정하고, 그 모수를 바탕으로 한 AAE를 계산하였다. 블랙-숄즈 모형에서는 Sigma(σ)가 모수이며, 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형에서는 Lambda(λ), Alpha(α), Beta(β), Gamma(γ)가 모수이다. AAE는 각 모형의 가격설명력에 대한 측정치로서 그 수치가 작을수록 가격설명력이 높음을 나타낸다. 각 날짜별로 AAE를 비교해보면, 대부분의 경우 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 빈도로 볼 때, 총 분석일자 77일 중 블랙-숄즈 모형이 설명력이 높은 날(AAE가 작은 날) 수가 17일인데 반해, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 설명력이 높은 날은 60일이나 된다. 총 표본기간동안의 AAE의 평균인 AAAE를 보더라도 평균적으로 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 여기서 *표시는 F-검정결과, 두 모형의 AAE차이가 유의수준 10%에서 유의함을 나타낸다. 내표본의 경우, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력이 블랙-숄즈 모형의 설명력보다 높은 60일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 20일이었다. 반면, 블랙-숄즈 모형의 설명력이 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력보다 높은 17일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 하루도 없었다.

내표본 비교							
	블랙-숄즈		추세와 도약을 가진 거버-쉬우				
날짜	Sigma	AAE	Lambda	Alpha	Beta	Gamma	AAE
20040106	0.2056	0.09875	163.514	4.82284	5.64394	8.01503	***0.08893***
20040127	0.19352	0.11497	161.89	4.04308	6.73736	9.32701	***0.10282***
20040203	0.20431	***0.06604***	2.01235	18.3446	20.7426	33.5616	0.08903
20040217	0.18839	0.12395	268.154	7.6192	13.1774	13.7012	***0.11445***
20040302	0.18755	0.11428	1.18038	18.2495	20.8675	36.7254	***0.10345***
20040316	0.21679	0.12893	38.251	7.73425	12.3731	15.2352	***0.11984***
20040406	0.20257	***0.09667***	160.235	4.85719	7.05231	10.2461	0.10231
20040420	0.20604	0.10476	257.126	9.1486	9.9475	15.1266	***0.09892***
20040511	0.2554	***0.10025***	375.947	6.22736	8.51966	10.6385	0.10133
20040518	0.30744	0.2993	1.00599	8.47765	8.42797	16.9239	***0.27316***
20040601	0.25152	***0.08812***	2.67368	18.1526	16.2258	37.2684	0.09327
20040615	0.28038	0.17488	63.6989	7.71729	8.74352	10.5849	***0.15246***
20040706	0.2743	0.13049	0.33444	61.0118	27.9802	1.25055	***0.12932***
20040720	0.23915	***0.07173***	2.29097	7.64168	10.5542	19.1422	0.07821
20040803	0.21896	0.13839	3.2617	17.598	17.5386	35.3278	***0.13022***
20040817	0.2201	***0.12027***	267.216	7.42119	11.5389	13.1232	0.12104
20040907	0.193	***0.07573***	162.412	4.75769	4.373	8.25622	0.07732
20040922	0.20108	0.07863	254.227	7.97815	13.9442	12.9312	***0.07732***
20041005	0.20667	0.18825	8.21567	18.2319	16.859	30.2156	***0.15256****
20041019	0.22307	0.13101	262.416	7.66381	11.8262	15.2316	***0.12873***
20041102	0.23316	0.1383	9.1231	18.2729	13.0389	32.5612	***0.12946***
20041117	0.17315	0.33748	152.245	3.12034	6.3445	10.2156	***0.29671****
20041207	0.16942	0.41528	161.342	4.04536	7.28651	10.0146	***0.36258****

20041221	0.14197	0.73426	269.268	6.94235	16.6151	12.9812	_0.61357*_
20050104	0.20762	_0.06288_	253.232	18.2123	19.9864	17.1256	0.07391
20050118	0.16924	0.10579	250.267	8.96342	16.9156	18.2572	_0.10239_
20050201	0.15773	0.10435	248.121	26.0432	27.5149	17.1342	_0.10393_
20050215	0.14296	0.10694	263.256	7.49663	17.9912	18.2126	_0.10231_
20050308	0.16206	0.13009	165.241	3.90847	4.76917	8.7316	_0.11979_
20050322	0.20193	0.12377	10.2572	16.5614	5.38517	19.3682	_0.11894_
20050412	0.17123	_0.06679_	162.143	4.1925	6.13123	8.7124	0.07216
20050426	0.15237	0.13725	39.3792	10.3339	20.419	16.2459	_0.12147_
20050503	0.16359	0.17865	160.263	4.83696	8.34519	10.2678	_0.15932_
20050517	0.17404	_0.08603_	37.362	7.70879	15.3294	16.1267	0.09213
20050607	0.15337	_0.07604_	163.143	4.7355	10.3237	19.2152	0.08124
20050621	0.14141	_0.05329_	263.268	7.47764	19.0734	18.3442	0.06215
20050705	0.14187	_0.05053_	252.168	18.238	29.7294	15.1262	0.06123
20050719	0.16162	0.13086	266.267	7.59922	14.8757	13.5127	_0.11812_
20050802	0.1387	_0.10849_	252.227	18.2071	29.2007	15.9735	0.10932
20050816	0.1711	0.18667	265.312	7.61066	14.9878	13.2678	_0.16313_
20050906	0.18268	0.25171	164.274	3.19758	4.26604	9.2173	_0.22468_
20050920	0.17418	0.23677	372.268	6.92199	9.902	10.7724	_0.20112*_
20051004	0.1926	0.23687	165.317	18.2702	12.0451	10.8262	_0.19234*_
20051018	0.21021	0.30001	261.782	7.5781	12.6148	15.3714	_0.2703_
20051101	0.19438	0.31649	262.116	18.2535	21.0011	19.3271	_0.29317_
20051115	0.16241	0.42943	263.287	7.5982	15.7349	14.2682	_0.39231*_
20051206	0.14473	_0.50169_	160.256	4.27349	7.5699	9.2127	0.61235
20051220	0.12478	1.56966	2.32121	7.26035	10.3402	19.2562	_1.11345*_
20060103	0.18101	0.20042	5.2721	18.2253	21.9454	22.2781	_0.17342_
20060117	0.16971	0.10527	262.567	7.53555	15.4123	14.1374	_0.09231_
20060207	0.20427	0.11647	81.2672	61.2379	38.2435	52.1165	_0.10869_
20060221	0.20664	0.25147	52.6832	10.7435	15.8046	17.2173	_0.21344*_
20060307	0.19301	0.12101	84.2178	58.9977	39.4226	55.2825	_0.10987_
20060321	0.17618	0.1649	262.368	7.63138	14.4003	13.9602	_0.13212*_
20060404	0.15471	0.15427	263.262	18.4333	20.9168	19.2572	_0.13123_
20060418	0.17676	0.15568	262.372	7.59309	15.0424	14.2783	_0.12995_
20060502	0.16368	0.28311	256.218	18.0746	17.6147	17.3781	_0.24257*_

20060516	0.19034	0.19454	263.28	7.44446	13.7358	15.8952	*0.16328**
20060613	0.23124	0.18809	14.5672	10.2833	42.9342	17.3562	*0.15268**
20060627	0.20097	0.15694	258.218	10.6461	15.9563	15.2782	*0.11457**
20060704	0.19346	*0.10716*	236.117	17.7235	21.6977	16.2728	0.10821
20060718	0.20127	0.20069	262.368	7.41447	12.8888	15.5283	*0.15326**
20060801	0.20654	0.16502	241.283	19.7491	21.0265	18.0213	*0.12567**
20060822	0.18407	0.12859	260.379	8.21967	13.9935	16.2789	*0.11268*
20060905	0.17559	0.20253	234.173	18.3043	21.5471	17.1167	*0.18257*
20060919	0.15074	0.25215	263.102	7.54005	16.4948	14.9238	*0.23226*
20061010	0.188	0.29853	3.16892	7.93714	10.7516	20.0327	*0.23571**
20061024	0.14133	0.2817	32.4277	10.7709	21.8042	17.3297	*0.20282**
20061107	0.14312	0.32317	82.2678	61.2223	53.7481	55.2672	*0.30283*
20061121	0.11681	0.38277	252.781	7.64709	22.161	15.2782	*0.36168*
20061205	0.13159	0.38894	236.271	18.7083	32.0663	20.6812	*0.36116*
20061219	0.13256	0.58913	262.167	7.27	18.8533	18.3617	*0.49394**
20070102	0.15749	0.19217	242.167	17.908	25.7844	19.8021	*0.18178*
20070116	0.16025	*0.13661*	169.268	10.8826	5.51548	19.2678	0.13567
20070206	0.16242	0.12879	82.3087	61.179	47.34	54.5075	*0.12*
20070220	0.16192	0.1875	63.2261	11.8765	20.5027	18.4723	*0.15268**
20070306	0.1771	0.14261	71.5725	12.3512	18.2541	22.3733	*0.13156*
AAAE		0.20548					*0.18256*

명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 빈도로 볼 때, 총 분석일자 77일 중 블랙-숄즈 모형이 설명력이 높은 날(AAE가 작은 날) 수가 17일인데 반해, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 설명력이 높은 날은 60일이나 된다. 총 표본기간동안의 AAE의 평균인 AAAE를 보더라도 평균적으로 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. F-검정(F-test)을 통해 두 모형간 AAE 차이의 유의성을 살펴보면, 내표본의 경우, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력이 블랙-숄즈 모형의 설명력보다 높은 60일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 20일이었다. 반면, 블랙-숄즈 모형의 설명력이 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력보다 높은 17일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 하루도 없었다.

외표본에서의 결과는 <표 2>와 같다. 내표본에서 추정된 모수들을 바탕으로 내표본

<표 2> 외표본에서의 모형간 가격설명력 비교

내표본에서 추정된 모수들을 바탕으로 내표본 날짜 바로 다음 날(외표본)의 AAE를 계산하였다. AAE는 각 모형의 가격설명력에 대한 측정치로서 그 수치가 작을수록 가격설명력이 높음을 나타낸다. 각 날짜별로 AAE를 비교해 보면, 대부분의 경우 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 횟수로 볼 때, 총 77일 중 블랙-숄즈 모형이 설명력이 높은 날은 26일인데 반해, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 설명력이 높은 날은 51일이다. 총 표본기간동안의 AAE의 평균인 AAAE를 보더라도 평균적으로 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 여기서 *표시는 F-검정결과, 두 모형의 AAE차이가 유의수준 10%에서 유의함을 나타낸다. 외표본의 경우, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력이 블랙-숄즈 모형의 설명력보다 높은 51일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 14일이었다. 반면, 블랙-숄즈 모형의 설명력이 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력보다 높은 26일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 하루도 없었다.

외표본 비교		
	블랙-숄즈	추세와 도약을 갖는 거버-쉬우
날짜	AAE	AAE
20040107	*0.0925154*	0.1136712
20040128	0.140207	*0.131562*
20040204	*0.0763654*	0.0972572
20040218	*0.115235*	0.124182
20040303	*0.0799422*	0.1012494
20040317	0.155897	*0.142561*
20040407	0.131422	*0.128792*
20040421	0.317463	*0.302166*
20040512	0.159096	*0.147114*
20040519	0.199967	*0.171582*
20040602	*0.170439*	0.172461
20040616	*0.209774*	0.213611
20040707	0.115036	*0.112162*
20040721	0.14081	*0.139712*
20040804	0.263087	*0.223516**
20040818	0.212566	*0.185781*
20040908	0.138866	*0.121767*
20040923	0.126146	*0.120037*
20041006	*0.0850203*	0.10552232
20041020	*0.106019*	0.115727
20041103	*0.207672*	0.241673
20041118	0.388513	*0.369214*
20041208	0.554052	*0.532931*
20041222	0.844997	*0.778125**
20050105	*0.183848*	0.201671
20050119	*0.096148*	0.106211
20050202	0.14731	*0.139921*
20050216	*0.06538*	0.071622
20050309	0.162776	*0.151256*
20050323	0.154718	*0.153617*
20050413	0.105	*0.095021*
20050427	0.158097	*0.1235612**
20050504	*0.073078*	0.082166

20050518	0.144323	*0.1236127*
20050608	0.110959	*0.1012661*
20050622	*0.0498248*	0.0578156
20050706	0.0747371	*0.0721172*
20050720	*0.0883818*	0.1026712
20050803	0.188529	*0.171671*
20050817	0.111573	*0.102612*
20050907	0.284231	*0.246212*[*]
20050921	0.2746	*0.236722*[*]
20051005	0.397836	*0.316781*[*]
20051019	0.447885	*0.401638*[*]
20051102	0.456324	*0.431121*
20051116	0.394873	*0.326818*[*]
20051207	0.470113	*0.426225*[*]
20051221	1.00944	*0.862718*[*]
20060104	0.302943	*0.2736172*
20060118	0.313737	*0.2936262*
20060208	*0.134776*	0.143167
20060222	0.144301	*0.131672*
20060308	*0.15272*	0.163167
20060322	*0.190301*	0.213612
20060405	0.254814	*0.231567*
20060419	*0.195367*	0.204162
20060503	0.160215	*0.159214*
20060517	*0.212718*	0.223516
20060614	0.206977	*0.193672*
20060628	0.183972	*0.161689*
20060705	0.153603	*0.141572*
20060719	0.270143	*0.251672*
20060802	0.200361	*0.198385*
20060823	*0.117348*	0.121674
20060906	*0.121734*	0.132672
20060920	0.417989	*0.3872178*[*]
20061011	0.339248	*0.303277*[*]
20061025	0.346631	*0.346163*
20061108	0.258223	*0.239125*
20061122	0.368318	*0.332781*[*]
20061206	0.323162	*0.285561*[*]
20061220	*0.451434*	0.462562
20070103	*0.188013*	0.201524
20070117	0.182739	*0.173274*
20070207	*0.293652*	0.302157
20070221	0.272188	*0.261536*
20070307	*0.140153*	0.152671
AAAE	0.228297039	*0.216674394*

날짜 바로 다음 날(외표본)의 AAE를 계산하였다. AAE는 각 모형의 가격설명력에 대한 측정치로서 그 수치가 작을수록 가격설명력이 높음을 나타낸다. 각 날짜별로 AAE를 비교해보면, 대부분의 경우 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. 횟수로 볼 때, 총 77일 중 블랙-숄즈 모형이 설명력이 높은 날은 26일인데 반해, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 설명력이 높은 날은 51일이다. 총 표본기간동안의 AAE의 평균인 AAAE를 보더라도 평균적으로 추세와 도약을 가진 확장된 거버-쉬우 모형이 더 높은 가격설명력을 보이고 있음을 알 수 있다. F-검정을 통해 두 모형간 AAE 차이의 유의성을 살펴보면, 외표본의 경우, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력이 블랙-숄즈 모형의 설명력보다 높은 51일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 14일이었다. 반면, 블랙-숄즈 모형의 설명력이 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 설명력보다 높은 26일 중 AAE가 통계적으로 유의적인 차이를 보인 날은 하루도 없었다.

<표 3>과 <표 4>는 AAE가 평균 옵션가격 대비 몇 퍼센트가 되는지를 알아보기 위하여 <표 1>과 <표 2>의 결과를 각 해당 날짜별 평균 옵션가격으로 나눈 비율을 표시한 것이다. 날짜별로 편차가 있지만, 평균적으로 내표본의 경우 블랙-숄즈 모형은 옵션가격의 5.37928%의 AAE를, 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 경우는 4.78265%의 AAE를 보이고 있으며, 외표본의 경우, 블랙-숄즈 모형은 옵션가격의 5.873185714%의 AAE를, 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 경우는 5.573320565%의 AAE를 보이고 있다.

요컨대, 내표본, 외표본 모두 본 논문에서 유도한 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 블랙-숄즈 모형 이상의 가격설명력을 갖는 것으로 나타났다. 개별 일별로는 블랙-숄즈 모형이 우월한 날도 있긴 했지만, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 우월한 날이 훨씬 많았으며, 평균적으로도 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 우월한 것으로 나타났다. 날짜별로 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형의 우월성에 대한 유의성 검증을 실시한 결과, 통계적으로 유의적인 우월성을 보인 날이 다수 존재하였다. 이러한 사실들을 종합해 볼 때, 추세와 도약을 가진 거버-쉬우 모형이 블랙-숄즈 모형 이상의 가격설명력을 갖는다는 것을 알 수 있다. 또한, 외표본의 결과가 유사하게 나타나는 것을 보면, 내표본에서의 결과가 단순히 모수 수의 증가에 기인한 것만은 아니라는 것을 알 수 있다. 블랙-숄즈 모형과 본 논문의 모형 간의 차이점은, 주가의 로그수익률의 분포에 대한 가정의 상이함과, 도약요소의 유무에 있는 바, 향상된 가격설명력 또한 이 두 요소에 기인한다고 볼 수 있을 것이다.

<표 3> 내표본에서의 모형간 가격설명력 비율비교

<표 1>에 대해서, 각 날짜별 AAE를 각 날짜별 평균 옵션가격으로 나눈 비율로 두 모형을 비교해 보았다. 결과는 <표 1>과 같으나, AAE가 일별 평균 옵션가격에 비해 얼마나 되는지를 알 수 있다. 평균적으로 블랙-숄즈 모형은 옵션가격의 5.37928%의 AAE를 보이고 있으며, 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 경우는 4.78265%의 AAE를 보이고 있다.

내표본 비율비교		
	블랙-숄즈	추세와 도약을 갖는 거버-쉬우
날짜	AAE/PRICE(%)	AAE/PRICE(%)
20040106	2.683424	*2.416576*
20040127	4.258148	*3.808148*
20040203	*1.336842*	1.802227
20040217	3.443056	*3.179167*
20040302	2.318053	*2.098377*
20040316	5.349793	*4.972614*
20040406	*2.826608*	2.99152
20040420	5.344898	*5.046939*
20040511	*4.284188*	4.330342
20040518	11.69141	*10.67031*
20040601	*2.607101*	2.759467
20040615	7.772444	*6.776*
20040706	3.728286	*3.694857*
20040720	*0.992116*	1.081743
20040803	2.784507	*2.620121*
20040817	*1.376087*	1.384897
20040907	*1.053268*	1.075382
20040922	0.79585	*0.782591*
20041005	1.833009	*1.485492*
20041019	2.529151	*2.485135*
20041102	2.942553	*2.754468*
20041117	3.766518	*3.311496*
20041207	6.676527	*5.82926*
20041221	5.91668	*4.944158*
20050104	*0.85551*	1.005578
20050118	2.299783	*2.22587*
20050201	2.964489	*2.952557*
20050215	2.397758	*2.293946*
20050308	5.101569	*4.697647*
20050322	2.750444	*2.643111*
20050412	*1.16562*	1.259337
20050426	1.568571	*1.388229*
20050503	2.585384	*2.305644*
20050517	*2.211568*	2.36838
20050607	*3.638278*	3.887081

20050621	*2.248523*	2.622363
20050705	*2.591282*	3.14
20050719	5.521519	*4.983966*
20050802	*4.558403*	4.593277
20050816	4.620545	*4.037871*
20050906	4.93549	*4.40549*
20050920	4.509905	*3.830857*
20051004	4.727944	*3.839122*
20051018	7.59519	*6.843038*
20051101	7.79532	*7.220936*
20051115	7.587102	*6.931272*
20051206	*14.79912*	18.06342
20051220	41.63554	*29.53448*
20060103	5.567222	*4.817222*
20060117	3.592833	*3.150512*
20060207	2.897264	*2.703731*
20060221	7.246974	*6.151009*
20060307	3.252957	*2.953495*
20060321	2.99274	*2.397822*
20060404	2.725618	*2.318551*
20060418	5.787361	*4.830855*
20060502	8.112034	*6.95043*
20060516	2.690733	*2.258368*
20060613	6.441438	*5.228767*
20060627	2.900924	*2.117745*
20060704	*2.052874*	2.072989
20060718	11.80529	*9.015294*
20060801	6.548413	*4.986905*
20060822	3.981115	*3.488545*
20060905	7.445956	*6.712132*
20060919	8.133871	*7.492258*
20061010	14.42174	*11.38696*
20061024	11.13439	*8.016601*
20061107	10.95492	*10.26542*
20061121	6.750794	*6.378836*
20061205	16.34202	*15.17479*
20061219	9.162208	*7.681804*
20070102	6.139617	*5.807668*
20070116	2.705149	*2.686535*
20070206	3.362663	*3.133159*
20070220	5.434783	*4.425507*
20070306	4.645277	*4.285342*
AVERAGE	5.37928	*4.78265*

<표 4> 외표본에서의 모형간 가격설명력 비율비교

<표 2>에 대해서, 각 날짜별 AAE를 각 날짜별 평균 옵션가격으로 나눈 비율로 두 모형을 비교해 보았다. 결과는 <표 2>와 같으나, AAE가 일별 평균 옵션가격에 비해 얼마나 되는지를 알 수 있다. 평균적으로 블랙-숄즈 모형은 옵션가격의 5.873185714%의 AAE를 보이고 있으며, 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 경우는 5.573320565%의 AAE를 보이고 있다.

외표본 비율 비교		
	블랙-숄즈	추세와 도약을 갖는 거버-쉬우
날짜	AAE/PRICE(%)	AAE/PRICE(%)
20040107	*2.284330864*	2.806696296
20040128	2.908858921	*2.729502075*
20040204	*1.611084388*	2.051839662
20040218	*2.510566449*	2.705490196
20040303	*1.098107143*	1.390788462
20040317	4.545102041	*4.156297376*
20040407	3.144066986	*3.081148325*
20040421	17.93576271	*17.07152542*
20040512	4.468988764	*4.13241573*
20040519	4.93745679	*4.236592593*
20040602	*2.574607251*	2.605151057
20040616	*7.039395973*	7.168154362
20040707	4.340981132	*4.232528302*
20040721	3.244470046	*3.219170507*
20040804	5.020744275	*4.265572519*
20040818	5.492661499	*4.800542636*
20040908	1.392838516	*1.221334002*
20040923	1.677473404	*1.596236702*
20041006	*0.878308884*	1.090106612
20041020	*2.204137214*	2.405966736
20041103	*3.986026871*	4.638637236
20041118	7.442777778	*7.073065134*
20041208	7.261494102	*6.984678899*
20041222	12.86144597	*11.84360731*
20050105	*2.886153846*	3.165949765
20050119	*2.063261803*	2.279206009
20050202	3.78688946	*3.596940874*
20050216	*2.030434783*	2.224285714
20050309	4.509030471	*4.189916898*
20050323	5.226959459	*5.189763514*
20050413	1.342710997	*1.215102302*
20050427	2.12781965	*1.663004038*
20050504	*1.180581583*	1.327399031
20050518	3.719664948	*3.18589433*
20050608	4.762188841	*4.346184549*

20050622	***2.214435556***	2.569582222
20050706	3.892557292	***3.756104167***
20050720	***3.249330882***	3.774676471
20050803	6.568954704	***5.981567944***
20050817	3.381	***3.109454545***
20050907	6.152186147	***5.329264069***
20050921	5.892703863	***5.079871245***
20051005	11.23830508	***8.948615819***
20051019	8.713715953	***7.813968872***
20051102	12.9270255	***12.21305949***
20051116	8.260941423	***6.837196653***
20051207	11.81188442	***10.70917085***
20051221	27.35609756	***23.3798916***
20060104	9.835811688	***8.883675325***
20060118	12.49948207	***11.69825498***
20060208	***2.235091211***	2.374245439
20060222	2.909294355	***2.654677419***
20060308	***4.6***	4.914668675
20060322	***3.253008547***	3.651487179
20060405	5.24308642	***4.764753086***
20060419	***8.760852018***	9.155246637
20060503	4.740088757	***4.710473373***
20060517	***6.446***	6.773212121
20060614	5.023713592	***4.700776699***
20060628	3.010998363	***2.646301146***
20060705	2.235851528	***2.060727802***
20060719	10.8928629	***10.14806452***
20060802	6.164953846	***6.104153846***
20060823	***3.46159292***	3.58920354
20060906	***5.202307692***	5.66974359
20060920	12.94083591	***11.98816718***
20061011	10.94348387	***9.783129032***
20061025	13.33196154	***13.31396154***
20061108	5.638056769	***5.221069869***
20061122	7.151805825	***6.46176699***
20061206	15.0307907	***13.28190698***
20061220	***6.235276243***	6.388977901
20070103	***6.351790541***	6.808243243
20070117	3.04565	***2.8879***
20070207	***7.415454545***	7.630227273
20070221	7.91244186	***7.602790698***
20070307	***3.566234097***	3.88475827
AVERAGE	5.873185714	***5.573320565***

Ⅵ. 결 론

2004년에 치앙(Cheang)은 거버-쉬우 모형이 하나의 레비과정을 가정한 데 비해 복수의 독립적인 레비과정을 가정하여 옵션가격결정모형을 유도함으로써 도약-확산 모형을 용이하게 유도할 수 있는 가능성을 제시하였다. 본 논문에서는 치앙의 모형을 이용하여 레비과정 하에서 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형을 유도함으로써, 새로운 형태의 도약-확산 모형을 제시하였다. 이러한 모형은, 어떤 구체적인 확률분포를 적용하느냐에 따라 여러 가지 구체적인 모형으로 쉽게 구체화될 수 있다.

본 논문은 레비과정 모형에 대해 감마분포를 도입함으로써 모형을 구체화하는 과정을 제시하였다. 이렇게 하여 감마과정 하에서 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 가격설명력을 전통적인 블랙-숄즈 모형과 비교하는 실증분석을 하였다. KOSPI200 지수에 대한 콜옵션 자료를 사용해서 실시된 실증분석 결과, 추세와 도약을 갖는 거버-쉬우 모형이 블랙-숄즈 모형 이상의 가격설명력을 갖는 것으로 나타났다.

본 논문의 이론적인 의의는, 머튼(1976)이 블랙-숄즈 모형에 도약을 도입한 모형을 유도한 것과 마찬가지로, 본 논문은 거버-쉬우(1994) 모형에 도약을 도입한 모형을 유도하였다는 점이다. 머튼(1976)의 경우와 다른 점은, 머튼이 정규분포를 가정한 블랙-숄즈 모형에 도약을 도입함으로써 하나의 구체적인 도약-확산 모형을 제시한 데 비해, 본 논문의 모형은 구체적인 확률분포를 가정하지 않은 거버-쉬우(1994) 모형에 도약을 도입함으로써 보다 포괄적인 이론적 모형을 제시하였다는 점이다.

또한, 본 논문은 이렇게 유도된 추상적이고 포괄적인 모형에 감마과정을 적용하여 모형이 구체화되는 과정을 보여주었으며, 이렇게 구체화된 모형을 KOSPI200 지수에 대한 콜옵션 자료를 사용해서 블랙-숄즈 모형과 실증비교하였다는 점에서 실증적인 의의를 갖는다.

이는, 옵션가격결정모형에 레비과정을 처음 도입한 거버-쉬우(1994)는 물론, 구체적인 레비과정들과 이에 기반한 옵션가격결정모형들에 대해 이론적으로 논의한 라일베(Railbe, 2000)나 그 모형들을 KOSPI200 지수 자료를 이용하여 실증비교한 장운욱(2004)과는 달리, 도약을 도입한 모형에 대해 논의하였다는 점에서 기존 문헌들과는 차별화된다고 하겠다. 또한, 이 논문의 이론적인 근거를 제시한 치앙(2004)의 경우와 비교해도, 치앙이 추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 일반형을 명시적으로 제시하고 있지 않은데 비해, 본 논문은 그 일반형을 명시적으로 제시함으로써 치앙보다 이론적

으로 한 걸음 더 나아갔으며, 실증비교까지 시도함으로써 치앙과도 차별화된다고 하겠다.

실무적인 측면에서, 본 논문의 모형은 블랙-숄즈 모형 등 구체적인 모형에 비해 장점을 가지고 있다고 할 수 있다. 즉, 옵션의 가격을 결정하고자 하는 기초자산의 로그수익률의 과거 자료를 이용해서 그 로그수익률이 어떤 확률분포를 갖는지 검증한 후, 가장 합당하다고 생각되는 확률분포를 본 논문의 모형에 적용하여 구체화하면 블랙-숄즈 모형 등 기존 모형들보다 더 정확한 옵션가격을 산출할 수 있다는 점에서 실무적으로도 유용한 함의를 갖는다 하겠다.

본 논문에서는 감마분포를 도입한 모형에 대해서만 논의를 했지만, 향후 다른 분포를 도입한 모형에 대해서도 같은 논의를 진행할 수 있을 것이다. 또한 이들 모형에 대한 실증비교분석도 가능할 것이다.

참 고 문 헌

장운욱, "Option Pricing with Lévy process; Empirical tests of KOSPI200 Index option with NIG, VG, CGMY Lévy processes and with Lévy SV models," 연세대학교 대학원 석사학위 논문, 서울, 2004.

조승모, "Option Pricing with Jumps under Lévy Processes-Extension of the Gerber-Shiu Model and Empirical Tests with KOSPI200 Index Options," 고려대학교 대학원 석사학위 논문, 서울, 2006.

Applebaum, D., "Lévy Processes and Stochastic Calculus," Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, (1973), 634-654.

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen, "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, (1997), 2003-2049.

Cheang, G. H. L., "A Simple Approach to Pricing Options with Jumps," Preprint, (2004).

Cont, R. and P. Tankov, "Financial Modelling With Jump Processes," Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2004.

Durrett, R., "Essentials of Stochastic Processes," Springer, New York, 2001.

Durrett, R., "Probability : Theory and Examples, 3rd Edition," Duxbury Press, Belmont, 2004.

Gerber, H. U. and E. S. W. Shiu, "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of Society of Actuaries*, 46, (1994), 99-140.

Harrison, J. M., and S. R. Pliska "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, (1981), 215-260.

Harrison, J. M., and S. R. Pliska, "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading : Complete Markets," *Stochastic Processes and Their Applications*, 15, (1983), 313-316.

Heston, S. L., "Invisible Parameters in Option Prices," *Journal of Finance*, 48, (1993), 933-947.

Hogg, R. V., A. Craig, and J. W. McKean, "Introduction to Mathematical Statistics, 6th Edition," Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

Hull, J. C., "Options, Futures, and Other Derivatives, 5th Edition," Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 2002.

Kwok, Y., "Mathematical Models of Financial Derivatives," Springer, New York, 1998.

Merton, R. C., "Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3, (1976), 125-144.

Railbe, S., "Lévy Processes in Finance : Theory, Numerics, and Empirical Facts," PhD Thesis, University of Freiburg, Freiburg, 2000.

Ross, R., "Stochastic Processes, 2nd Edition," Wiley, New York, 1996.

Ross, R., "Introduction to Probability Models, 7th Edition," Academic Press, San Diego, 2000.

Schoutens, W., "Lévy Processes in Finance : Pricing Financial Derivatives," Wiley, Chichester, West Sussex, England, 2003.

Shreve, S. E., "Stochastic Calculus for Finance II : Continuous Time Models," Springer, New York, 2004.

한국은행 경제통계시스템 http://ecos.bok.or.kr/.

FnGuide http://www.fnguide.com/.

<부 록>

(거버-쉬우 모형의 증명).

$S_t = S_0 e^{X_t}$ 이므로, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{X_t} \\ &= S_0 e^{X_t - X_u + X_u} = S_0 e^{X_u} e^{X_t - X_u} \\ &= S_u e^{X_t - X_u} \end{aligned}$$

즉,

$$S_t = S_u e^{X_t - X_u}. \tag{1}$$

$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta)$ 라 하고, P_{θ^*} 를 위험중립 확률측도라 하자. 그러면, 자산 가격결정 이론의 기본정리에 의해 다음이 성립한다.

$$E_{P_{\theta^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}} \middle| \mathscr{F}_u \right] = \frac{S_u}{e^{ru}}. \tag{2}$$

$\{X_t : t \geqq 0\}$ 이 레비과정이므로, P_{θ^*} 측도 하에서 $X_t - X_u$ 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$dF_{X_t - X_u, \theta^*}(x) = e^{\theta^* x - (t-u)\kappa(\theta^*)} dF_{X_t - X_u}(x). \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E_{P_{\theta^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}} \middle| \mathscr{F}_u \right] &= E_{P_{\theta^*}}\left[\frac{S_u e^{X_t - X_u}}{e^{rt}} \middle| \mathscr{F}_u \right] \ (\because (1)) \\ &= \frac{S_u}{e^{rt}} E_{P_{\theta^*}}[e^{X_t - X_u} \mid \mathscr{F}_u] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} E_{P_{\theta^*}}[e^{X_t - X_u} \mid \mathscr{F}_u] \\ &= \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} E_{P_{\theta^*}}\left[e^{X_t - X_u} \right] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{\kappa_{X_t - X_u, \theta^*}(1)} \\ &= \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{(t-u)[\kappa(\theta^* + 1) - \kappa(\theta^*)]} \end{aligned}$$

이므로, 다음과 같이 된다.

$$E_{P_{\theta^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}} \middle| \mathscr{F}_u \right] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{(t-u)[\kappa(\theta^* + 1) - \kappa(\theta^*)]}. \tag{4}$$

식 (2)와 식 (4)에 의해,

$$\kappa(\theta^* + 1) = \kappa(\theta^*) + r \tag{5}$$

콜옵션의 만기 페이오프가 $(S_T - K)_+$이므로,

$$C_t = e^{-r(T-t)}E_{P_{\theta^*}}[(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}E_{P_{\theta^*}}[(S_t e^{X_T - X_t} - K)_+ | \mathcal{F}_t]\ (\because (1))$$

$$= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}(S_t e^x - K)_+ dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x) = e^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty}(S_t e^x - K) dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)$$

$$= S_t e^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} e^x dF_{X_t - X_t, \theta^*}(x) - Ke^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)$$

$$= S_t e^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} e^x e^{\theta^* x - (T-t)\kappa(\theta^*)} dF_{X_T - X_t}(x) - Ke^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)\ (\because (3))$$

$$= S_t \int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} e^{(\theta^* + 1)x - (T-t)[\kappa(\theta^*) + r]} dF_{X_T - X_t}(x) - Ke^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)$$

$$= S_t \int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} e^{(\theta^* + 1)x - (T-t)\kappa(\theta^* + 1)} dF_{X_T - X_t}(x) - Ke^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)\ (\because (5))$$

$$= S_t \int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^* + 1}(x) - Ke^{-r(T-t)}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} dF_{X_T - X_t, \theta^*}(x)\ (\because (3))$$

$$= S_t\left[1 - F_{X_T - X_t, \theta^* + 1}\left(\ln\frac{K}{S_t}\right)\right] - Ke^{-r(T-t)}\left[1 - F_{X_T - X_t, \theta^*}\left(\ln\frac{K}{S_t}\right)\right]$$

$$= S_t P_{\theta^* + 1}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r(T-t)}P_{\theta^*}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right].$$

따라서, 다음과 같이 된다.

$$C_t = S_t P_{\theta^* + 1}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r\tau}P_{\theta^*}\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t}\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta),$$
$$\kappa(\theta^* + 1) = \kappa(\theta^*) + r.$$

□

(정리 1의 증명).

$X_t' = at + X_t$라 하면, $\{X_t' : t \geqq 0\}$는 레비과정이고 $S_t = S_0 e^{X_t'}$이므로, 앞서 소개한 거버-쉬우 모형에 의해 다음과 같이 된다.

$$C_t = S_t P_{\theta^* + 1}\left[(X_{i,T}' - X_{i,t}') > \ln\frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-rt}P_{\theta^*}\left[(X_{i,T}' - X_{i,t}') > \ln\frac{K}{S_t}\right] \quad (6)$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa'(\theta) = \ln M_{X_1'}(\theta),$$
$$\kappa'(\theta^* + 1) = \kappa'(\theta^*) + r.$$

여기서, $\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta)$라 하면, $M_{X_t'}(\theta) = M_{at+X_t}(\theta) = e^{at\theta} M_{X_t}(\theta)$이므로,

$$\begin{aligned} \kappa'(\theta) &= \ln M_{X_1'}(\theta) \\ &= a\theta + \kappa(\theta) \end{aligned}$$

이제 $\kappa'(\theta^* + 1) = \kappa'(\theta^*) + r$을 살펴보면,

$$a + \kappa(\theta^* + 1) = \kappa(\theta^*) + r.$$

$\theta^* = 0$라 놓으면[8],

$$a + \kappa(1) = r \; (\because \kappa(0) = \ln E(e^{0 \cdot X_1}) = 0)$$

즉,

$$a = r - \kappa(1). \tag{7}$$

$\theta^* = 0$이므로,

$$P_{\theta^*} = P_0 = P.$$

따라서,

$$\begin{aligned} Ke^{-rt} P_{\theta^*}\left[(X_T' - X_t') > \ln \frac{K}{S_t}\right] &= Ke^{-r\tau} P_{\theta^*}\left[X_T - X_t > \ln \frac{K}{S_t} - a\tau\right] \\ &= Ke^{-r\tau} P_0\left[X_T - X_t > \ln \frac{K}{S_t} - a\tau\right] \; (\because \theta^* = 0) \end{aligned}$$

즉,

$$Ke^{-r\tau} P_{\theta^*}\left[(X_T' - X_t') > \ln \frac{K}{S_t}\right] = Ke^{-r\tau} P_0\left[X_T - X_t > \ln \frac{K}{S_t} - a\tau\right]. \tag{8}$$

---

8) $a + \kappa(\theta^* + 1) = \kappa(\theta^*) + r$에서 식은 하나이나 변수(모수)가 a와 θ^*로 두 개이므로 둘 중 하나를 0으로 놓고 해를 구해도 해의 특성을 알 수 있다. 여기서 $\theta^* = 0$으로 놓으면, 확률측도변환 이전의 확률측도를 나타내게 되므로 확률측도 존재의 문제점은 없다.

$$S_t P_{\theta^*+1}\left[(X_T' - X_t') > \ln\frac{K}{S_t}\right] = S_t P_{\theta^*+1}\left[X_t - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]$$
$$= S_t P_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]\ (\because \theta^* = 0)$$

즉,

$$S_t P_{\theta^*+1}\left[(X_T' - X_t') > \ln\frac{K}{S_t}\right] = S_t P_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]. \qquad (9)$$

식 (6)~식 (9)에 의해서, 다음과 같이 된다.

$$C_t = S_t P_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] - Ke^{-rt} P_0\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta),$$
$$a = r - \kappa(1).$$

□

(치앙 모형의 증명).

$\boldsymbol{X}_t = (X_{1,t}, \cdots, X_{n,t})'$ 및 $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)'$라 하면, $S_t = S_0 e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{X}_t}$이므로, 다음과 같이 된다.

$$S_t = S_0 e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{X}_t}$$
$$= S_0 e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u + \boldsymbol{X}_u)} = S_0 e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{X}_u} e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)}$$
$$= S_u e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)}$$

즉,

$$S_t = S_u e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)}. \qquad (10)$$

$\kappa(\boldsymbol{\Theta}) = \ln M_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{\Theta})$라 하고, $P_{\boldsymbol{\Theta}^*}$를 위험중립 확률측도라 하자. 그러면, 자산 가격결정 이론의 기본정리에 의해 다음이 성립한다.

$$E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}}\middle|\mathcal{F}_u\right] = \frac{S_u}{e^{ru}} \qquad (11)$$

$\{\boldsymbol{X}_t : t \geqq 0\}$이 레비과정이므로, $P_{\boldsymbol{\Theta}^*}$측도 하에서 $\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u$의 결합확률밀도함수는 다음과 같다.

$$dF_{\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_{u}, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{\Theta}^{*\prime}\boldsymbol{x} - (t-u)\kappa(\boldsymbol{\Theta}^*)} dF_{\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u}(\boldsymbol{x}). \qquad (12)$$

$$E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}}\middle|\mathcal{F}_u\right] = E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}\left[\frac{S_u e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)}}{e^{rt}}\middle|\mathcal{F}_u\right]\ (\because (10))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{S_u}{e^{rt}} E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}[e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)} | \mathcal{F}_u] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}[e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)} | \mathcal{F}_u] \\
&= \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}[e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u)}] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{\kappa_{\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_u, \boldsymbol{\Theta}^*}(\mathbf{1})} \\
&= \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{(t-u)[\kappa(\boldsymbol{\Theta}^* + \mathbf{1}) - \kappa(\boldsymbol{\Theta}^*)]}
\end{aligned}
$$

이므로, 다음과 같이 된다.

$$
E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}\left[\frac{S_t}{e^{rt}} \middle| \mathcal{F}_u\right] = \frac{S_u}{e^{ru}} e^{r(u-t)} e^{(t-u)[\kappa(\boldsymbol{\Theta}^* + \mathbf{1}) - \kappa(\boldsymbol{\Theta}^*)]}. \tag{13}
$$

식 (11)과 식 (13)에 의해,

$$
\kappa(\boldsymbol{\Theta}^* + 1) = \kappa(\boldsymbol{\Theta}^*) + r. \tag{14}
$$

콜옵션의 만기 페이오프가 $(S_T - K)_+$이므로,

$$
\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)} E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}[(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E_{P_{\boldsymbol{\Theta}^*}}\left[(S_t e^{\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t)} - K)_+ | \mathcal{F}_t\right] \; (\because (10)) \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}^n} (S_t e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{x}} - K)_+ dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} (S_t e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{x}} - K) dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \\
&= S_t e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{x}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \\
&= S_t e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} e^{\mathbf{1}'\boldsymbol{x}} e^{\boldsymbol{\Theta}^{*\prime}\boldsymbol{x} - (T-t)\kappa(\boldsymbol{\Theta}^*)} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \; (\because (12)) \\
&= S_t \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} e^{(\boldsymbol{\Theta}^* + 1)'\boldsymbol{x} - (T-t)[\kappa(\boldsymbol{\Theta}^*) + r]} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \\
&= S_t \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} e^{(\boldsymbol{\Theta}^* + 1)'\boldsymbol{x} - (T-t)\kappa(\boldsymbol{\Theta}^* + 1)} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x} : \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln\frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \; (\because (14))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S_t \int_{\left\{\boldsymbol{x}:\, \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln \frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^* + 1}(\boldsymbol{x}) - Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{\boldsymbol{x}:\, \mathbf{1}'\boldsymbol{x} > \ln \frac{K}{S_t}\right\}} dF_{\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{\Theta}^*}(\boldsymbol{x}) \ (\because (12)) \\
&= S_t P_{\boldsymbol{\Theta}^* + 1}\left[\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t) > \ln \frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r(T-t)} P_{\boldsymbol{\Theta}^*}\left[\mathbf{1}'(\boldsymbol{X}_T - \boldsymbol{X}_t) > \ln \frac{K}{S_t}\right].
\end{aligned}
$$

따라서, 다음과 같이 된다.

$$
C_t = S_t P_{\theta_1^* + 1, \cdots, \theta_n^* + 1}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln \frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-r\tau} P_{\theta_1^*, \cdots, \theta_n^*}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln \frac{K}{S_t}\right]
$$

단,

$$
\begin{aligned}
&\tau = T - t, \\
&\kappa_i(\theta_i) = \ln M_{X_{i,1}}(\theta_i), \\
&\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(\theta_i^* + 1) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i(\theta_i^*) + r.
\end{aligned}
$$

□

(정리 2의 증명).

$X_{1,t} = at + X_t$ 및 $X_{2,t} = -\lambda kt + \sum_{n=1}^{N_t} J_n$라 하면, $\{X_{1,t} : t \geqq 0\}$와 $\{X_{2,t} : t \geqq 0\}$가 상호독립인 레비과정이고 $S_t = S_0 e^{X_{1,t} + X_{2,t}}$이므로, 치앙 모형에 의해 다음과 같이 된다.

$$
C_t = S_t P_{\theta_1^* + 1,\, \theta_2^* + 1}\left[\sum_{i=1}^{2} (X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln \frac{K}{S_t}\right] - Ke^{-rt} P_{\theta_1^*,\, \theta_2^*}\left[\sum_{i=1}^{2} (X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln \frac{K}{S_t}\right] \quad (15)
$$

단,

$$
\begin{aligned}
&\tau = T - t, \\
&\kappa_i(\theta_i) = \ln M_{X_{i,1}}(\theta_i), \\
&\sum_{i=1}^{2} \kappa_i(\theta_i^* + 1) = \sum_{i=1}^{2} \kappa_i(\theta_i^*) + r.
\end{aligned}
$$

여기서, $\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta)$라 하면,

$$
\begin{aligned}
M_{X_{1,t}}(\theta_1) &= M_{at + X_t}(\theta_1) \\
&= e^{at\theta_1} M_{X_t}(\theta_1), \\
M_{X_{2,t}}(\theta_2) &= M_{-\lambda k + \sum_{n=1}^{N_t} J_n}(\theta_2) \\
&= e^{-\lambda k\theta_2} M_{\sum_{n=1}^{N_t} J_n}(\theta_2) \qquad \text{이므로,} \\
&= e^{-\lambda k\theta_2} e^{\lambda t[M_{J_n}(\theta_2) - 1]} \\
&= e^{-\lambda k\theta_2 + \lambda t[E(e^{\theta_2 J_n}) - 1]}
\end{aligned}
$$

아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned}\kappa_1(\theta_1) &= \ln M_{X_{1,1}}(\theta_1)\\ &= a\theta_1 + \kappa(\theta_1),\\ \kappa_2(\theta_2) &= \ln M_{X_{2,1}}(\theta_3)\\ &= -\lambda k\theta_2 + \lambda\left[E(e^{\theta_2 J_n}) - 1\right].\end{aligned}$$

이제 $\sum_{i=1}^{2}\kappa_i(\theta_i^*+1) = \sum_{i=1}^{2}\kappa_i(\theta_i^*) + r$을 살펴보면,

$$a + \kappa(\theta_1^*+1) - \lambda k + \lambda\left[E\left(e^{[\theta_2^*+1]J_n}\right) - 1\right] = \kappa(\theta_1^*) + \lambda\left[E\left(e^{\theta_2^* J_n}\right) - 1\right] + r.$$

$\theta_1^* = \theta_2^* = 0$라 놓으면9),

$$a + \kappa(1) - \lambda k + \lambda\left[E(e^{J_n}) - 1\right] = r\ (\because \kappa(0) = \ln E(e^{0\cdot X_1}) = 0)$$

즉,

$$a + \kappa(1) = r\ (\because\ k = E[e^{J_n} - 1]).$$

결국, 다음과 같이 된다.

$$a = r - \kappa(1). \tag{16}$$

$\theta_1^* = \theta_2^* = 0$이므로,

$$P_{\theta_1^*,\,\theta_2^*} = P_{0,\,0} = P.$$

$\sum_{n=1}^{N_T} J_n - \sum_{n=1}^{N_t} J_n = \sum_{n=N_t+1}^{N_T} J_n = \sum_{n=1}^{N_T-N_t}$ 이므로,

$$X_{2,T} - X_{2,t} = -\lambda k\tau + \sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n. \tag{17}$$

$\theta_2^* = 0$으로부터 $M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n,\theta_2^*}(u) = M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n}(u)$이므로,

$$P_{0,0}\text{하에서 } N_T - N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda\tau). \tag{18}$$

9) $a + \kappa(\theta_1^*+1) - \lambda k + \lambda[E(e^{[\theta_2^*+1]J_n}) - 1] = \kappa(\theta_1^*) + \lambda[E(e^{\theta_2^* J_n}) - 1] + r$에서 식은 하나이나 변수(모수)는 a, θ_1^*, θ_2^*의 세 개이므로, $\theta_1^* = \theta_2^* = 0$라 놓고 해를 구해도 해의 특성을 알 수 있다. 여기서 $\theta_1^* = \theta_2^* = 0$으로 놓으면, 확률측도변환 이전의 확률측도를 나타내게 되므로 확률측도 존재의 문제점은 없다.

$$\begin{aligned} M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n, \theta_2^*}(u) &= M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n}(u) \ (\because \theta_2^*=0) \\ &= e^{\lambda\tau[M_{J_n}(u)-1]} \\ &= e^{\lambda\tau[M_{J_n,\theta_2^*}(u)-1]} \ (\because \theta_2^*=0) \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n, \theta_2^*+1}(u) &= \frac{M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n, \theta_2^*}(u+1)}{M_{\sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n, \theta_2^*}(1)} \\ &= \frac{e^{\lambda\tau[M_{J_n,\theta_2^*}(u+1)-1]}}{e^{\lambda\tau[M_{J_n,\theta_2^*}(1)-1]}} = e^{\lambda\tau[M_{J_n,\theta_2^*}(u+1)-M_{J_n,\theta_2^*}(1)]} \\ &= e^{\lambda M_{J_n,\theta_2^*}(1)\tau\left[\frac{M_{J_n,\theta_2^*}(u+1)}{M_{J_n,\theta_2^*}(1)}-1\right]} \\ &= e^{\lambda E[e^{J_n}]\tau[M_{J_n,\theta_2^*+1}(u)-1]} \\ &= e^{\lambda(1+k)\tau[M_{J_n,\theta_2^*}} \end{aligned}$$

즉,

$$P_{1,1} \text{하에서} \ \ N_T - N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda(1+k)\tau). \tag{19}$$

따라서, 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & Ke^{-rt}P_{\theta_1^*,\theta_2^*}\left[\sum_{i=1}^{2}(X_{i,T}-X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right] \\ &= Ke^{-rt}P_{0,0}\left[X_T - X_t + \sum_{n=1}^{N_t-N_t} J_n > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right] \ (\because (17)) \\ &= Ke^{-rt}E_{0,0}\left[P_{0,0}\left[X_T - X_t + \sum_{n=1}^{N_T-N_t} J_n > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \middle| N_T - N_t\right]\right] \\ &= Ke^{-r\tau}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}P_{0,0}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right] \ (\because (18)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right] \end{aligned}$$

즉,

$$Ke^{-r\tau}P_{\theta_1^*,\theta_2^*}\left[\sum_{i=1}^{2}(X_{i,T}-X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right] \tag{20}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right].$$

$$S_t P_{\theta_1^*+1,\theta_2^*+1}\left[\sum_{i=1}^{2}(X_{i,T}-X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right]$$

$$= S_t P_{1,1}\left[X_T - X_t + \sum_{n=1}^{N_T - N_t} J_n > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right] \ (\because (17))$$
$$= S_t E_{\theta_1^*+1,\theta_2^*+1}\left[P_{1,1}\left[X_T - X_t + \sum_{n=1}^{N_T - N_t} J_n > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \middle| N_T - N_t\right]\right]$$
$$= S_t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!} P_{1,1}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right] \ (\because (19))$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!} S_t P_{1,1}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right]$$

즉,

$$S_t P_{\theta_1^*+1,\theta_2^*+1}\left[\sum_{i=1}^{2}(X_{i,T} - X_{i,t}) > \ln\frac{K}{S_t}\right] \tag{21}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!} S_t P_{1,1}\left[X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right].$$

식 (15), (16), (20), (21)에 의해서, 다음과 같이 된다.[10]

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}\left[S_t P_{1,1}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right.$$
$$\left. - Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right]$$

단,

$$\begin{aligned} &\tau = T - t, \\ &\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta), \\ &a = r - \kappa(1), \\ &k = E\left[e^{J_n} - 1\right]. \end{aligned}$$

□

10) 풋옵션에 관한 모형은 풋-콜패러티(put-call parity)를 이용하면 쉽게 유도할 수 있다. 추세를 갖는 거버-쉬우 모형의 경우,

$$P_t = Ke^{-rt} P_0\left[X_T - X_t \leqq \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] - S_t P_1\left[X_T - X_t \leqq \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right],$$

추세 및 도약을 갖는 거버-쉬우 모형의 경우,

$$P_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}\left[-S_t P_{1,1}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i \leqq \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right.$$
$$\left. + Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i \leqq \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right]$$

와 같이 유도된다.

(정리 3의 증명).

각각 $at=-bt$ 및 $X_t=G_t$라 하면, $\{X_t : t \geqq 0\}$이 레비과정이고 $S_t=S_0 e^{at+X_t}$이므로, **정리 1.**에 의해 다음과 같이 된다.

$$C_t = S_t P_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] - Ke^{-r\tau}P_0\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] \tag{22}$$

단,

$$\begin{aligned} &\tau = T-t, \\ &\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta), \\ &a = r - \kappa(1). \end{aligned}$$

여기서, $M_{X_t}(\theta) = M_{G_t}(\theta) = \left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha t}$이므로,

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) &= \ln M_{X_1}(\theta) = \ln\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha} \\ &= \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore\ \kappa(1) = \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$$

즉,

$$a = r - \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right). \tag{23}$$

정의상 $a=-b$이므로, $-b=r-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$ 즉, $\beta = \frac{1}{1-e^{-\frac{r+b}{\alpha}}}$ 이다.

한편, $P_{0,0}$하에서 $X_T - X_t = G_T - G_t \sim \Gamma(\alpha\tau, \beta)$이므로,

$$P_0\text{하에서 } X_T - X_t \sim \Gamma(\alpha\tau, \beta) \tag{24}$$

또한, $M_{X_T - X_t, 0}(u) = M_{G_T - G_t}(u) = \left(\frac{\beta}{\beta-u}\right)^{\alpha\tau}$이므로,

$$\begin{aligned} M_{X_T - X_t, 1}(u) &= \frac{M_{X_T - X_t, 0}(u+1)}{M_{X_T - X_t, 0}(1)} \\ &= \frac{\left(\frac{\beta}{\beta-u-1}\right)^{\alpha\tau}}{\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha\tau}} = \left(\frac{\beta-1}{(\beta-1)-u}\right)^{\alpha\tau} \end{aligned}$$

즉,

$$P_1\text{하에서 } X_T - X_t \sim \Gamma(\alpha\tau, \beta-1). \tag{25}$$

따라서, 다음과 같이 된다.

$$Ke^{-r\tau}P_0\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] = Ke^{-r\tau}\left[1 - P_0\left[X_T - X_t \leqq \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]\right]$$

$$= Ke^{-r\tau}\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} - \alpha\tau\right)\right] \ (\because (24))$$

즉,

$$Ke^{-r\tau}P_0\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] = Ke^{-r\tau}\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right]. \tag{26}$$

$$S_tP_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] = S_t\left[1 - P_1\left[X_T - X_t \leqq \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right]\right]$$

$$= S_t\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right] \ (\because (25))$$

즉,

$$S_tP_1\left[X_T - X_t > \ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right] = S_t\left[1 - G_{\alpha\tau,\,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right]. \tag{27}$$

식 (22), (23), (26), (27)에 의해서, 다음과 같이 된다.

$$C_t = S_t\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right] - Ke^{-r\tau}\left[1 - G_{\alpha\tau,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right)\right]$$

단,

$$\tau = T - t,$$
$$a = r - \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right),$$
$$G_{\alpha,\,\beta}(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx.$$

□

(정리 4의 증명).

$k = E\left[e^{J_n} - 1\right]$ 이므로,

$$1 + k = E\left[e^{J_n}\right] = \int_0^\infty e^x \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dx \ (\because J_n \overset{i.i.d}{\sim} \Gamma(\gamma, \beta))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \beta e^{-(\beta-1)x} (\beta x)^{\gamma-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right) e^{-y} \left(\frac{\beta}{\beta-1} \cdot y\right)^{\gamma-1} dy \ (\because y=(\beta-1)x) \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\gamma \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty y^{\gamma-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\gamma \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \Gamma(\gamma) \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\gamma
\end{aligned}
$$

즉,

$$
k = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\gamma - 1. \tag{28}
$$

여기서 $at=-bt$ 및 $X_t = G_t$라 하면, $\{X_t : t \geqq 0\}$이 레비과정이고, $\{X_t : t \geqq 0\}$와 $\left\{\sum_{n=1}^{N_t} J_n : t \geqq 0\right\}$가 상호독립이며, $S_t = S_0 e^{at + X_t - \lambda kt + \sum_{n=1}^{N_t} J_n}$이므로, (**정리** 2)에 의해 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
C_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau} \frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!} &\left[S_t P_{1,1}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \right) \right. \\
&\left. - K e^{-(r-\lambda k)\tau} \left(\frac{1}{1+k}\right)^n P_{0,0}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau \right) \right]
\end{aligned} \tag{29}
$$

단,

$$
\begin{aligned}
&\tau = T - t, \\
&\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta), \\
&a = r - \kappa(1), \\
&k = E\left[e^{J_n} - 1\right].
\end{aligned}
$$

또한, $M_{X_t}(\theta) = M_{G_t}(\theta) = \left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha t}$이므로,

$$
\begin{aligned}
\kappa(\theta) = \ln M_{X_1}(\theta) &= \ln\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^\alpha \\
&= \alpha \ln\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \ \kappa(1) = \alpha \ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right).
$$

즉,

$$
a = r - \alpha \ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right). \tag{30}
$$

정의상 $a=-b$이므로, $-b=r-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$ 즉, $\beta=\frac{1}{1-e^{-\frac{r+b}{\alpha}}}$이다.

한편, $P_{0,0}$하에서 $X_T-X_t=G_T-G_t\sim\Gamma(\alpha\tau,\beta)$이므로,

$$P_{0,0}\text{하에서 } X_T-X_t\sim\Gamma(\alpha\tau,\beta). \tag{31}$$

또한, $M_{X_T-X_t,0}(u)=M_{G_T-G_t}(u)=\left(\frac{\beta}{\beta-u}\right)^{\alpha\tau}$이므로,

$$\begin{aligned}M_{X_T-X_t,1}(u)&=\frac{M_{X_T-X_t,0}(u+1)}{M_{X_T-X_t,0}(1)}\\&=\frac{\left(\frac{\beta}{\beta-u-1}\right)^{\alpha\tau}}{\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha\tau}}=\left(\frac{\beta-1}{(\beta-1)-u}\right)^{\alpha\tau}\end{aligned}$$

즉,

$$P_{1,1}\text{하에서 } X_T-X_t\sim\Gamma(\alpha\tau,\beta-1). \tag{32}$$

$P_{0,0}$하에서 $J_n\overset{i.i.d.}{\sim}\Gamma(\gamma,\beta)$이므로,

$$P_{0,0}\text{하에서 } \sum_{i=1}^{n}J_i\sim\Gamma(n\gamma,\beta). \tag{33}$$

$M_{\sum_{i=1}^{n}J_i}(u)=\left(\frac{\beta}{\beta-u}\right)^{n\gamma}$이므로,

$$\begin{aligned}M_{\sum_{i=1}^{n}J_i,1}(u)&=\frac{M_{\sum_{i=1}^{n}J_i}(u+1)}{M_{\sum_{i=1}^{n}J_i}(1)}\\&=\frac{\left(\frac{\beta}{\beta-1-u}\right)^{n\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{n\gamma}}=\left(\frac{\beta-1}{(\beta-1)-u}\right)^{n\gamma}\end{aligned}$$

즉,

$$P_{1,1}\text{하에서 } \sum_{i=1}^{n}J_i\sim\Gamma(n\gamma,\beta-1). \tag{34}$$

식 (31)과 식 (33)에 의해서,

$$P_{0,0}\text{하에서 } X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i \sim \Gamma(\alpha\tau + n\gamma,\ \beta). \tag{35}$$

식 (32)와 식 (34)에 의해서,

$$P_{1,1}\text{하에서 } X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i \sim \Gamma(\alpha\tau + n\gamma,\ \beta - 1). \tag{36}$$

따라서, 다음과 같이 된다.

식 (35)에 의해서,

$$P_{0,0}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right) = 1 - G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right) \tag{37}$$

식 (36)에 의해서,

$$P_{1,1}\left(X_T - X_t + \sum_{i=1}^{n} J_i > \ln\frac{K_t}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right) = 1 - G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right) \tag{38}$$

식 (28)~식 (38)에 의해서, 다음과 같이 된다[11].

$$\begin{aligned} C_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}&\left[S_t\left[1 - G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right]\right. \\ &\left. - Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n\left[1 - G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right]\right] \end{aligned}$$

단,

$$\begin{aligned} &\tau = T - t, \\ &a = r - \alpha\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right), \\ &k = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\gamma} - 1, \\ &G_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx. \end{aligned}$$

□

11) 풋옵션에 관한 모형은 풋-콜패러티(put-call parity)를 이용하면 쉽게 유도할 수 있다. 헤스톤 모형의 경우,

$$P_t = Ke^{-r\tau}G_{\alpha\tau,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right) - S_t G_{\alpha\tau,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} - a\tau\right),$$

도약을 갖는 헤스톤 모형의 경우,

$$\begin{aligned} P_t = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1+k)\tau}\frac{[\lambda(1+k)\tau]^n}{n!}&\left[Ke^{-(r-\lambda k)\tau}\left(\frac{1}{1+k}\right)^n G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right. \\ &\left. - S_t G_{\alpha\tau+n\gamma,\beta-1}\left(\ln\frac{K}{S_t} + (\lambda k - a)\tau\right)\right] \end{aligned}$$

와 같이 유도된다.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 24, Number 4, December 2007

Option Pricing Models with Drift and Jumps under Lévy processes : Beyond the Gerber-Shiu Model

Seung Mo Cho* · Phil Sang Lee**

〈abstract〉

The traditional Black-Scholes model for option pricing is based on the assumption that the log-return of the underlying asset follows a Brownian motion. But this assumption has been criticized for being unrealistic. Thus, for the last 20 years, many attempts have been made to adopt different stochastic processes to derive new option pricing models. The option pricing models based on Lévy processes are being actively studied originating from the Gerber-Shiu model driven by H. U. Gerber and E. S. W. Shiu in 1994. In 2004, G. H. L. Cheang derived an option pricing model under multiple Lévy processes, enabling us to adopt drift and jumps to the Gerber-Shiu model, while Gerber and Shiu derived their model under one Lévy process. We derive the Gerber-Shiu model which includes drift and jumps under Lévy processes. By adopting a Gamma distribution, we expand the Heston model which was driven in 1993 to include jumps. Then, using KOSPI200 index option data, we analyze the price-fitting performance of our model compared to that of the Black-Scholes model. It shows that our model shows a better price-fitting performance.

Keywords : Options, Drift, Jumps, Lévy Processes, Gerber-Shiu

* Ph.D. Student, Graduate School, Korea University
** Professor, College of Business Administration, Korea University