

제한된 곡률을 갖는 최단경로에 대한 기하학적 증명

(A Geometric Proof on Shortest Paths of Bounded Curvature)

안 희 갑 [†] 배 상 원 ^{**} 정 지원 ^{***}
(Hee-Kap Ahn) (Sang-Won Bae) (Otfried Cheong)

요약 평면상에서 이동하는 자동차와 같은 로봇은 이동방향을 변경할 때 제한된 곡률(curvature)로 서서히 방향을 바꿀 수밖에 없다. 본 논문은 물체의 동선의 곡률이 제한되어 있을 경우, 한 구성에서 출발하여 목표점에 이르는 최단경로는 CC 혹은 CS 타입(C는 원호(circular arc), S는 선분(line segment)을 의미한다), 혹은 이들의 부분문자열 타입이 된다는 사실을 기하학적 성질만을 이용하여 증명하였다. 본 연구결과를 이용하여, 시작점 구성에서 출발하여 목표점, 혹은 목표다각형에 도달하는 최단경로는 다각형의 공간복잡도의 선형시간에 계산 가능하다.

키워드 : 최단경로, 곡률, 기하학, Dubins 경로, 도달문제

Abstract A point-wise car-like robot moving in the plane changes its direction with a constraint on turning curvature. In this paper, we consider the problem of computing a shortest path of bounded curvature between a prescribed initial configuration (position and orientation) and a polygonal goal, and propose a new geometric proof showing that the shortest path is either of type CC or CS (or their substring), where C specifies a non-degenerate circular arc and S specifies a non-degenerate straight line segment. Based on the geometric property of the shortest path, the shortest path from a configuration to a polygonal goal can be computed in linear time.

Key words : Shortest path, Dubins path, curvature, geometry, reachability

1. 서론

자동차는 그 특성상 회전 반경이 제한되어 있기 때문에 전진하는 이동방향을 변경하기 위해서는 곡률(curvature)이 제한된 곡선이동을 하게 된다. 자동차와 유사하게 회전반경이 제한된 이동운동을 하는 로봇이 목표지점까지 최단거리를 움직여 이동하기 위해서는 이와 같은 제한된 곡률을 고려해야 한다.

평면상에서, 점의 위치 p 와 그 점에서의 초기 이동방향 θ 의 쌍 $\omega=(p, \theta)$ 을 이동의 구성이라고 정의하자. 곡률이 최대 1로 제한된 물체가 현재 이동하는 방향으로의 전진이동만을 한다고 가정한다. 주어진 시작점 구성과 목표점 구성에 대해, Dubins[1]는 이 두 구성을

연결하는 제한된 곡률을 지닌 최단경로는 최대 3개의 원호나 선분으로 이루어지며, CCC, CSC 혹은 이들의 부분문자열의 모양으로 구성되어 있다는 사실을 증명하였다. 여기서 C는 단위원의 원호(a unit circular arc), S는 선분(line segment)을 의미하며 경로상의 모든 점에서의 곡률은 최대 1이다. 이와 같은 최단 경로를 **Dubins 최단경로**라 한다. 이 후, 제한된 곡률을 가진 물체의 최단경로에 관한 많은 연구결과들이 제시되어 [2-5] 로봇공학분야의 non-holonomic 이동계획 연구에 활용되고 있다[6-9].

본 논문은 목표점에서의 이동방향에 제한을 두지 않는 경우, 즉 시작점 구성 $s=(s, \theta)$ 에서 출발하여 목표점 t 에 도달하는 경우의 문제를 고려한다. 이 문제의 경우 곡률은 제한되면서도 목표점에서의 이동방향에 제한이 없기 때문에, 목표점 혹은 목표 지역에 도달하는 최단경로 도달(reachability)문제이다.

우리는 곡률이 제한된 최단경로 도달문제에 대해 최단경로는 최대 2개의 원호나 선분으로 이루어진다는 사실을 증명한다. 보다 구체적으로, 목표점 t 가 s 에 접한

[†] 정희원 : 세종대학교 컴퓨터공학과 교수
heekap@sejong.ac.kr

^{**} 학생회원 : 한국과학기술원 전산학과
swbae@jupiter.kaist.ac.kr

^{***} 정지원 : 한국과학기술원 전산학과 교수
otfried@tclab.kaist.ac.kr

논문접수 : 2006년 6월 29일

심사완료 : 2007년 2월 2일

두 단위 원 내부에 존재할 경우 최단경로는 CC 타입, 그렇지 않을 경우에는 CS 타입이 된다. 만약 t 가 s 에 접한 두 단위 원 상에 놓여있거나 점 s 에서 θ 방향으로의 반직선위에 놓여 있는 경우에, 최단경로는 각각 한 개의 원호 혹은 선분으로 구성된다.

정리 1. 시작점 구성 $s=(s, \theta)$ 로부터 목표점 t 에 도달하는 최단경로는 t 가 s 에 접한 두 단위 원 내부에 존재할 경우 최단경로는 CC 타입, 그렇지 않을 경우에는 CS 타입이다.

그림 1의 (b)와 (c)는 목표점 t 가 두 단위원 외부에 있을 때의 최단경로를 보여준다. 정리 1의 연구결과를 이용하여, 시작점 구성에서 출발하여 목표점, 혹은 목표 다각형에 도달하는 최단경로는 다각형의 공간복잡도의 선형시간에 계산 가능하다.

본 문제에 대해 Vendittelli와 Laumond는 제어이론분야에서 사용되는 Pontryagin의 최대원리(the Maximum Principle)를 이용하여 정리 1에 대한 증명을 제시하였다[9].

본 논문은 이러한 최대원리를 이용한 증명방식과는 전혀 다른 순수 기하학적인 방식을 사용하여 증명하였다. 우선 시작환경과 목표점 사이에 발생 가능한 여러 경로의 타입을 정의한 후, 이들 사이의 연속적인 변형(continuous deformation)을 통해 보다 짧은 다른 타입의 경로로 변환이 가능하다는 사실을 증명하였다. 이러한 기하학적 증명은 최대원리에 따라 단순히 식에 대입한 결과에 따른 증명과는 달리 문제와 증명에 대한 보다 직관적인 이해를 가능케 한다. 예를 들어, 장애물이 존재하는 환경에서의 최단경로를 구하는 문제나 다각형들을 순서대로 방문하는 최단경로 문제와 같이 보다 일반적이고 복잡한 최단경로 문제의 경우, 문제에 대한 이해 없이 제어이론의 최대원리를 단순 적용하는 것으로는 문제를 해결하기 어렵다. 본 논문에 제시된 기하학적 증명은 이러한 문제들에 대해 보다 직관적인 이해를 도울뿐더러 문제 해결을 위한 새로운 알고리즘의 설계나

증명에 활용될 수 있다.

2. 목표점으로의 최단경로

그리스 수학자 아르키메데스는 평면상의 두 점을 연결하는 블록 곡선의 길이에 대해 다음과 같은 공리를 제시하였다.

공리 2. 평면상의 두 점 p 와 q 에 대해

- (i) p 와 q 를 연결하는 직선선분은 다른 어떤 경로보다 짧다.
- (ii) p 와 q 를 연결하는 두 개의 블록 곡선이 중첩되어 있을 경우, 내부에 있는 곡선이 더 짧다.

본 장에서는 위의 공리를 이용하여 시작점 구성과 목표점을 연결하는 곡률이 최대 1로 제한된 최단거리 경로의 특성에 대해 다룬다. 증명의 편의를 위해, 시작점 구성 s 의 이동방향 θ 를 수직으로 위쪽을 향하는 방향으로 가정한다. 시작점 구성 s 로부터 목표점 t 를 연결하는 곡률이 제한된 경로를 γ 라 하자. 경로 γ 상의 두 점 x 와 y 사이의 부분경로를 $\gamma(x, y)$ 로 표기한다.

소정리 3. CCC 타입의 경로는 최단경로의 길이보다 항상 길다.

증명. 모순을 보이기 위해 γ 가 3개의 원호로 구성된 최단경로라 가정하자. 경로 γ 의 목표점 t 에서 진행방향으로의 접선 방향 θ' 을 고려하여 목표점 구성 $t=(t, \theta')$ 을 고려한다면 γ 는 두 구성 사이의 Dubins 최단경로가 된다.

이 경우에 대해, Dubins[1]는 γ 를 구성하는 세 원호 가운데 중간 원호인 C_m 의 길이가 π 보다 크다는 사실을 증명했다. 이 사실을 이용하여, 그림 1의 (a)와 같이 목표점 t 를 한 중점으로 하여 C_m 에 접하는 선분 pt 그을 수 있다. 이 경우 점 p 는 γ 내부에 존재한다.

따라서 γ 의 부분경로 $\gamma(p, t)$ 를 선분 pt 로 대체함으로써, 공리 2(i)에 의해 γ 보다 짧으면서 곡률이 1이 아닌 새로운 경로를 구할 수 있다. □

구성 s 에 정접하는 왼쪽과 오른쪽 단위원을 각각 D_L

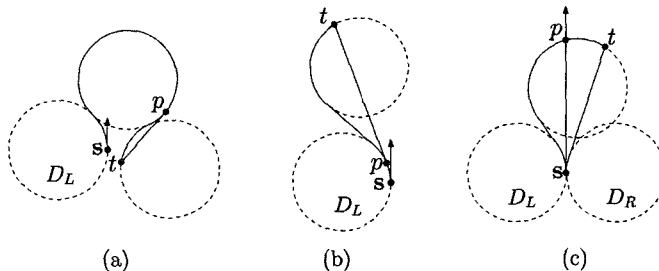


그림 1 (a) CCC 타입의 경로는 최단경로의 길이보다 항상 길다. (b),(c) 목표점 t 가 시작점 s 에 정접한 두 단위원 외부에 있는 경우 최단경로는 항상 CS타입이다.

과 D_R 이라고 한다. 단위원 상의 두 점 x 와 y 를 고려할 때, 시계방향 원호와 반 시계방향 원호를 각각 $R(xy)$ 와 $L(xy)$ 로 표기한다. 문맥에서 파악될 수 있는 경우에는 R 과 L 로 간략히 표기한다. 선분이나 경로 A 의 길이는 $|A|$ 로 표기한다.

2.1 목표점이 $(D_L \cup D_R)$ 외부에 속하는 경우

먼저 목표점 t 가 s 에 정접하는 두 단위원 D_L 과 D_R 의 합집합 외부에 존재하는 경우에, 최단경로는 항상 CS 타입임을 증명한다.

소정리 4. 목표점 t 가 $t \notin (D_L \cup D_R)$ 이라면, SC 혹은 CSC 타입의 최단경로는 마지막 원호의 길이가 항상 최대 π 이다.

증명. γ 를 마지막 원호의 길이가 π 보다 큰 SC 혹은 CSC 타입의 최단경로라고 하고, D 를 마지막 원호를 정의하는 단위원이라고 하자. $t \notin (D_L \cup D_R)$ 이므로 D 를 s 가 있는 방향으로 γ 를 따라 미끄러지듯 움직여 D 가 t 와 더 이상 교차하지 않을 때 까지 이동할 수 있다. 이 때 이동된 D 를 D' 이라고 한다면 s 로부터 D' 의 원호를 이용하여 t 에 도착하는, γ 보다 짧은 최단경로가 항상 존재한다. \square

소정리 5. 목표점 t 가 $t \notin (D_L \cup D_R)$ 이라면, 최단경로는 항상 CS 타입이다.

증명. 목표점 t 에서 전진이동 방향으로 γ 의 정접방향을 t 의 이동방향으로 하는 목표 구성을 고려했을 경우, γ 는 Dubins 최단경로가 된다. 따라서 γ 는 CCC, CSC 혹은 이들의 부분문자열의 모양으로 구성되어 있다. 또한 소정리 3로부터 γ 는 CCC 타입이 아님을 알 수 있다.

모순을 보이기 위해 최단경로 γ 가 CS 타입이 아니라고 하자. 즉 γ 는 $CC(RL/LR)$, $CSC(LSL/RSR/LSR/RSL)$ 혹은 $SC(SL/SR)$ 로 구성된다.

먼저 γ 가 SL 혹은 LSL 타입인 경우를 고려하자. 이 경우 우리는 항상 t 를 지나고 D_L 에 대해 점 q 에서 접하는 직선을 그을 수 있다. 이 때 D_L 의 원호 $L(sq)$ 와 선분 qt 로 구성된 새로운 경로를 구할 수 있다. 이 때 두 경로 γ 와 γ' 은 s 와 t 를 연결하는 두 개의 중첩된 블록 곡선이다. 따라서 공리 2 (ii)에 의해 내부에 있는 곡선 γ' 이 γ 보다 더 짧다는 사실을 알 수 있으므로 γ 는 최단경로가 아니다. 경로 γ 가 SR 혹은 RSR 타입인 경우에는 대칭적으로 증명할 수 있다.

다음으로 γ 가 CC, LSR 혹은 RSL인 경우를 고려하자. 경로의 첫 번째 원호의 길이가 π 이상이라면, 소정리 3의 증명에서 보인 것과 마찬가지로 항상 보다 짧은 새로운 경로를 만들 수 있다. 따라서 첫 번째 원호의 길이가 π 보다 작다고 가정하면, γ 는 s 로부터 수직 아랫방향으로의 반직선을 교차하여 지날 수 없다.

γ 의 첫 번째 원호가 L 타입이라고 가정한다. 먼저

γ 가 s 로부터 수직 위쪽 방향으로의 반직선을 지나지 않는 경우를 고려하자. 소정리 4에 의해 γ 의 마지막 원호의 길이는 최대 π 가 된다. γ' 을 LS 타입의 최단 경로라 하자. γ 의 첫 번째 원호가 L 타입이라면 그림 1(b)에서 보는 바와 같이 두 경로 γ 와 γ' 은 s 로부터 D_L 의 점 p 까지의 경로를 공유한다. γ 를 구성하는 두 원호가 서로 반대방향을 형성하기 때문에 γ 의 첫 번째 원호가 γ' 의 첫 번째 원호보다 더 길다. 따라서 부분경로 $\gamma'(p, t)$ 는 직선선분이고, 공리 2(i)에 의해 부분경로 $\gamma(p, t)$ 가 $\gamma'(p, t)$ 보다 더 길다는 사실을 알 수 있고, 이는 경로 γ' 이 γ 보다 더 짧다는 것을 의미한다.

이제 γ 가 s 로부터 수직 위쪽 방향으로의 반직선을 교차하여 지나는 경우를 고려하자. 이 경우, 그림 1(c)에서 보는 바와 같이, p 를 γ 의 마지막 교차점이라 하자. 공리 2(i)에 의해 $|\overline{sp}| < |\gamma(s, p)|$ 이다. 또한 p 는 γ 의 마지막 원호에 존재하며, \overline{sp} 와 $\gamma(pt)$ 는 볼록 커브 C 를 형성한다. 그림 1의 (c)와 같이 경로 γ' 을 RS 타입의 최단 경로라 한다면, C 는 γ' 의 외부 커브가 되고 공리 2(ii)에 의해 $|\gamma'| < |C|$ 이다. 따라서 $|\gamma'| < |\gamma|$ 이다. \square

2.2 목표점이 $(D_L \cup D_R)$ 내부에 속하는 경우

이제 목표점 t 가 s 에 정접하는 두 단위원 D_L 과 D_R 의 내부에 존재하는 경우에, 최단경로가 두 개의 원호로 구성된다는 사실을 증명하는 것이 남아있다.

소정리 6. 목표점 t 가 $t \in (D_L \cup D_R)$ 일 경우, LSL (혹은 RSR) 타입의 경로는 항상 SL(혹은 SR) 타입의 더 짧은 경로로 변형할 수 있다.

증명. 그림 2에서 보는 바와 같이 γ 를 원호 $L(sa)$ 와 선분 \overline{ab} , 그리고 단위원 D 의 원호 $L(bt)$ 로 구성된 LSL 타입 경로라 하자. 원 D' 은 점 t 를 지나고, s 를 지나는 수직선에 대해 점 b' 에서 접하는 단위원이라 하고, γ' 을 선분 $\overline{sb'}$ 와 D' 의 원호 $L(b't)$ 로 구성된 SC 타입의 경로라고 하자. γ' 은 제한된 곡률을 가지는 유효한 경로임을 알 수 있다.

그림 2에서와 같이, 점 c, c', c_L 를 각각 원 D, D', D_L 의 중심점이라 하자. 그리고 점 t' 을 점 t 를 벡터 $\overrightarrow{\alpha'}$ 만큼 평행이동 시킨 점이라 하자. 그러면 D' 은 D 를 벡터 $\overrightarrow{\alpha'}$ 만큼 평행이동 시킨 단위원으로 볼 수 있다.

두 경로 γ 와 γ' 을 구성하는 원호들의 길이 합을 각각 고려하면, γ 의 원호들의 길이 합은 $|L(sa)| + |L(bt)|$ 가 되고 γ' 의 원호의 길이는 $|L(b't)|$ 가 된다. 이때 γ 의 원호 $L(bt)$ 를 벡터 $\overrightarrow{\alpha'}$ 만큼, 원호 $L(sa)$ 를 $\overrightarrow{c_L c'}$ 만큼 평행이동 한다면, 이동된 두 원호는 원호 $L(b't')$ 과 정확히 일치한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 γ 의 원호들의 길이 합이 γ' 의 원호의 길이보다 $|L(tt')|$ 만큼 더 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 아래의 등식이 성립한다.

$$|\gamma| - |\gamma'| = |ab| - |sb'| + |L(tt')|$$

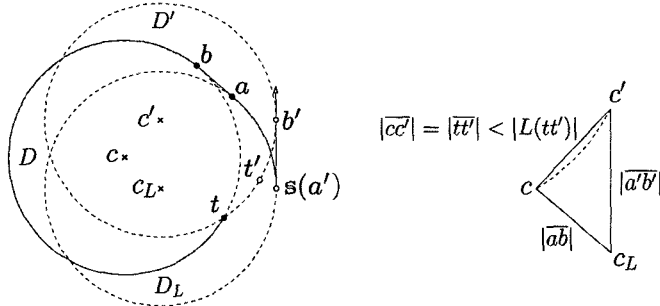


그림 2 $t \in (D_L \cup D_R)$ 일 경우, LSL 타입의 경로는 SL 타입의 더 짧은 경로로 변형할 수 있다.

이제 c, c', c_L 의 세 꼭지점으로 이루어진 삼각형을 고려하자. 원 D 는 D_L 을 벡터 $\vec{c_Lc}$ 만큼 평행이동 한 것이기 때문에 $|\vec{c_Lc}| = |\vec{ab}|$ 이다. 유사하게, 원 D' 은 D_L 을 벡터 $\vec{c_Lc'}$ 만큼 평행이동 한 것이기 때문에 $|\vec{c_Lc'}| = |\vec{sb'}|$ 이다. $|\vec{tt'}| < L(tt')$ 이므로 삼각 부등식에 의해, $|\vec{ab}| + |\vec{sb'}| > |\vec{tt'}|$ 가 된다. 따라서 γ' 가 γ 보다 더 짧다.

경로 γ 가 RSR 타입인 경우는 대칭에 의해 같은 방법으로 증명된다. □

따름정리 7. LSL 혹은 RSR 타입의 경로는 항상 첫 번째 원호의 길이를 줄임으로서 같은 타입의 더 짧은 경로로 변형할 수 있다.

증명. 시작점 구성 s 로부터 출발하여 도착점 t 를 잇는 두 개의 LSL 타입의 경로 γ 와 γ' 이 주어졌을 때, γ 의 첫 번째 원호가 γ' 의 첫 번째 원호보다 더 짧다고 가정하자. 그리고 $L(sa)$ 를 γ 의 첫 번째 원호라고 하자. 이 때, 점 a 에서 D_L 에 접하는 시계 반대 방향을 θ' 이라 할 때, 구성 $s' = (a, \theta')$ 을 시작점 구성으로 하여 t 에 도달하는 γ 와 γ' 의 두 부분 경로는 각각 SL 타입과 LSL 타입이다. 따라서 소정리 6에 의해 본 따름정리가 증명된다. □

소정리 8. 목표점 t 가 $t \in (D_L \cup D_R)$ 일 경우, SL

(혹은 SR) 타입의 경로는 항상 RSL(혹은 LSR) 타입의 더 짧은 경로로 변형할 수 있다.

증명. 그림 3에서와 같이 γ 를 선분 \vec{sb} 와 원호 $L(bt)$ 를 지나는 SL타입의 경로라 하고, γ' 를 원호 $R(sa')$, 선분 $\vec{a'b'}$, 원호 $L(b't)$ 를 지나는 RSL타입의 경로라 하자. 또한 b'' 은 점 b 를 벡터 $\vec{cc'}$ 만큼의 평행이동한 점이라 정의한다.

점 t' 을 t 를 $\vec{cc'}$ 만큼 평행이동 한 점이라 하면, 두 원호 $L(bt)$ 와 $L(b't)$ 의 길이는 아래와 같다.

$$|L(bt)| - |L(b't)| = L(tt')$$

점 p 를 선분 \vec{sb} 사이의 중점, q 를 선분 $\vec{a'b'}$ 사이의 중점이라 하자. 공리 2(ii)에 의해 아래의 부등식을 얻을 수 있다.

$$|R(sa')| + |\vec{a'q}| < |\vec{sp}| + |\vec{pq}|$$

원 D' 이 b'' 에 정접하고, 선분 $\vec{a'b'}$ 이 D_R 과 D' 에 그림 3과 같이 접하므로 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$|R(sa')| = |L(b'b'')|, |\vec{a'q}| = |\vec{qb''}|$$

위 부등식의 양변에 2를 곱하면,

$$|R(sa')| + |\vec{a'b'}| + |L(b'b'')| < |\vec{sb}| + |\vec{bb''}|$$

가 되는데,

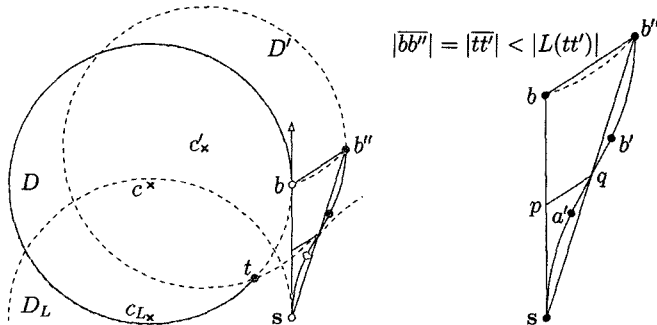


그림 3 $t \in (D_L \cup D_R)$ 일 경우, SL 타입의 경로는 RSL 타입의 더 짧은 경로로 변형할 수 있다.



안 회 갑

1996년 2월 경북대학교 컴퓨터공학과 학사. 1998년 2월 포항공과대학교 전자계산학과 석사. 2001년 12월 네덜란드 Utrecht 대학교 전산학과 박사. 2001년 10월~2004년 1월 한국과학기술연구원(KIST) 연구원. 2004년 2월~2006년 2월 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 연구교수. 2006년 3월~현재 세종대학교 컴퓨터공학과 조교수



배 상 원

1998년 2월 인천대학교 수료. 2002년 8월 카이스트 전자전산학과 전산학전공 학사. 2004년 2월 카이스트 전자전산학과 전산학전공 석사. 2004년 3월~현재 카이스트 전자전산학과 전산학전공 박사과정



Otfried Cheong

1988년 3월 독일 베를린 자유대학 수학과 학사. 1992년 6월 독일 베를린 자유대학 수학과 박사. 1992년 2월~1995년 7월 네덜란드 Utrecht대학교 전산학과 조교수. 1995년 8월~1997년 8월 포항공과대학교 전자계산학과 조교수. 1997년 9월~2000년 8월 홍콩과기대학교 전산학과 조교수. 2000년 9월~2002년 10월 네덜란드 Utrecht대학교 전산학과 조교수. 2003년 2월~2004년 11월 네덜란드 Eindhoven공대 부교수. 2005년 3월~현재 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 부교수