

적응 법칙 기반의 퍼지 기초 함수를 이용한 도립진자의 마찰력 관측기 설계 및 마찰력 보상

An Observer Design and Compensation of the Friction in an Inverted Pendulum using Adaptive Fuzzy Basis Functions Expansion

박 덕 기, 박 민 호, 좌 동 경, 홍 석 교*

(Duckgee Park, Minho Park, Dongyoung Chwa, and Suk-Kyo Hong)

Abstract : This paper deals with the method to estimate the friction in a system. We study a nonlinear friction model to estimate the friction in an inverted pendulum and approximate the friction model using fuzzy basis functions expansion. To demonstrate the friction observer using FBFs, we derive a update rule based on the error term that is formed by the output from a real system and observer output with a friction estimate. And two compensation algorithms to improve the response of an inverted pendulum are proposed. The first method that a observer parameter is updated in on-line and the friction is compensated at the same time. The second method is to compensate the friction with observer parameter estimated priori. The two methods is compared through the experimental results.

Keywords : friction observer, fuzzy basis functions, adaptive observer, inverted pendulum

I 서론

지구상에서 운동하는 물체는 항상 마찰력의 영향 밑에 놓이게 된다. 실제 물리 시스템을 수학적 모형으로 표현하고자 할 때 다양한 필요성에 의해서 비선형성의 마찰력 성분은 곧잘 무시되고 다루기 쉬운 선형 성분의 마찰력만 근사되곤 한다. 이러한 간단한 방법의 근사화로 인하여 우리가 다루고자 하는 시스템은 그 응답에서 예상치 못한 현상을 보여주기도 한다. 근사화시 무시되었던 비선형 마찰력 요소에 의해 발생하는 현상들은 일반적으로 그 특징이 매우 복잡하다. 이러한 강한 비선형성으로 대표되는 마찰력은 이미 오래전부터 연구가 되어 왔다. 움직이는 물체와 접촉면의 상대 속도에 선형적으로 비례하여 커지는 점성 마찰력(viscous friction) 외에 상대 속도의 방향에 반대로 일정한 크기만큼 발생하는 쿨롱 마찰력(Coulomb friction)은 오래전부터 마찰력의 중요한 한 요소로 인식되어왔다. 이 두 가지 마찰력 요소만으로도 마찰력의 비선형성은 상당부분 표현될 수 있다. 하지만, 정밀한 제어를 요하는 소형 모터의 제어나 상대 속도가 매우 느린 영역에서 동작하는 기계를 부드럽게 제어하는데 이용하기에는 부족하다. 특히 일반적인 예상과는 다르게 상대 속도가 매우 느린 영역에서는 그 크기가 오히려 속도에 반비례하는 마찰력 요소가 존재하기도 한다(Strbeck effect)[4]. 이렇게 복잡한 마찰력을 정확하게 표현할 수 있는 다양한 마찰력 모형들이 최근까지 연구되어 왔다. 과거 점성 마찰력과 쿨롱 마찰력, 정

지 마찰력 등으로 표현되는 정적 마찰력 성분에 더하여 스프링의 탄성력과 비슷한 성질을 포함하는 Dahl 모형이나 LuGre 모형 등의 동적 마찰력 모형으로 표현한다.

이러한 마찰력 모형을 구하는 다양한 방법이 제안되고 연구되고 있다. 마찰력 모형의 구조를 우선 정하고 구해야 하는 모형의 계수들을 체계적인 실험 절차에 의해서 구하는 방법이 제시되었다[1,2]. 하지만, 이 방법은 정밀한 실험 기구와 신뢰성 있는 계측이 동반되어야 하는 만큼 그 유용성면에서 좋은 방법이라 할 수 없다. 실제로 시스템의 종류에 따라서는 계측 불가능한 물리량이 존재하기도 한다. 그래서 많은 연구에서는 마찰력 모형의 계수들을 추정하기 위한 관측기를 사용한다. 예상된 출력과 실제 출력과의 오차를 이용하여 최소 자승법이나 칼만필터 등을 통하여 마찰력 추정하는 방법은 온라인과 오프라인 모두 적용 가능한 특징이 있다. 이러한 필터를 이용한 관측기 외에 마찰력 모형의 계수를 적응 기법을 통해 갱신하는 적응 기반의 관측기에 관한 연구가 다양하게 진행되고 있다[3-7]. 하지만, 관측기를 이용하여 마찰력을 추정하는 연구들에서는 마찰력 모형에 대한 구조적인 정보가 필수적이다. 추정하고자 하는 마찰력 모형이 실제와는 다른 구조로 설계 되었다면, 관측기의 성능은 더 이상 장담하지 못하게 된다.

모델 기반의 관측기가 갖는 제약에 비해 퍼지 기반의 관측기는 마찰력의 정확한 구조를 알지 않아도 된다는 점에서 그 유용성은 크다고 할 수 있다. 이러한 특성은 퍼지 시스템이 갖는 일반적인 장점이기도 하다. 퍼지 기반의 관측기를 이용하여 시스템에 존재하는 불확실성을 예측하고 개선하는 연구[8,9]에서는 외란 관측기를 퍼지 기초 함수를 이용하여 구성하고 이를 역진자 시스템의 제어에 사용하였다. 이 연구들에서는 역진자 시스템에 존재하는 불확실성 혹은 외란의 영향을 제거하기 위해 퍼지 관측기를 구성하

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 1. 25., 채택확정 : 2007. 2. 17.

박덕기, 박민호, 좌동경, 홍석교 : 아주대학교 전자공학과

(duckgee@ajou.ac.kr/minhinf@gmail.com/dkchwa@ajou.ac.kr/skhong@ajou.ac.kr)

※ 본 논문은 한국과학재단 특정기초연구 R01-2006-000-11373-0 지원으로 수행되었음.

는데 초점을 맞췄다. 역진자 시스템은 불안정하며 비선형 다변수 시스템으로 비선형 마찰력의 영향 또한 많이 받는 시스템이다. 앞서 연구된 퍼지 기반의 외란 관측기를 통해서 어느 정도 마찰력의 영향이 제거될 수 있기는 하나, 그 관측기의 목적 자체가 마찰력의 관측에 있지 않고 범용의 외란 관측기이므로 마찰력의 영향을 많이 받고 있는 상황에서는 그 성능의 제고가 필요하다. 이를 위해 비선형 마찰력의 특성을 기반으로 보다 적절한 마찰력을 관측하기 위한 퍼지 기초 함수 기반의 마찰력 관측기를 제안한다. 퍼지 기반의 마찰력 관측기를 구성하기 위해서 시스템의 전반적인 이해가 필수적이다. 이를 위해서 2장에서는 비선형 마찰력의 특성과 영향에 대해서 살펴보기로 한다. 그 후 3장에서는 퍼지 기반의 마찰력 관측기를 구성하기 위해 퍼지 기초 함수를 이용한 비선형 함수의 근사화 기법에 대해서 다룬다. 4장에서는 역진자 시스템에 존재하는 마찰력을 관측하기 위한 퍼지 기반 마찰력 관측기의 매개변수를 적용 기법을 통해 갱신하는 법칙을 유도하여 퍼지 기반 마찰력 관측기를 완성한다. 5장에서는 추정된 마찰력을 보상하는 방법에 관해서 논의한다. 6장에서는 실제 비선형 마찰력이 포함되어 그 영향으로 리밋사이클 현상을 보이는 역진자 시스템에 적용하여 그 보상 결과를 확인해본다. 마지막으로 7장에서 이 논문에서 제안된 마찰력 추정과 보상 방법에 대해 결론을 맺는다.

II. 비선형 마찰력을 포함하는 역진자 시스템

마찰력이 포함되어 있는 역진자 시스템의 특성을 이해하기 전에 우선 역진자 시스템의 고유한 불안정성으로 인하여 역진자의 응답을 관찰하거나 여러 가지 목적에 의해 on-off 라인 상에서 데이터를 받아내기 위해서는 역진자 시스템의 안정화를 위한 제어가 필요하다. 이를 위해 일반적으로 마찰력이 배제되어 있는 역진자 시스템의 선형 모델을 이용하여 상태 궤환 제어기를 구성한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 상태 변수 벡터 $x = [\theta \ \dot{\theta} \ x]^T$ 이다. 상태 변수와 입력에 대해서

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{2}$$

으로 주어지는 성능지수를 최소화하는 제어입력은

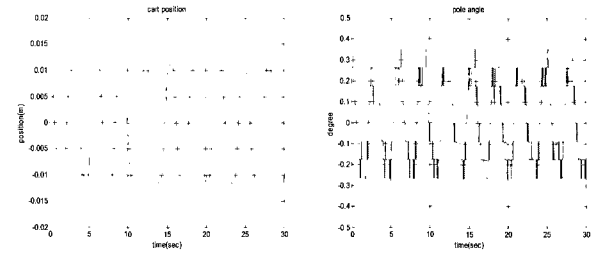
$$u = -Kx \tag{3}$$

의 형태로 상태 변수 궤환 제어기로 간단히 구현할 수 있다. 여기서 적절한 가중행렬 Q 와 R 에 대하여 (2)의 성능지수를 만족하는 상태변수 이득 K 는

$$K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4] \tag{4}$$

으로 주어진다.

만일 역진자 시스템을 위해서 위에서 얻은 안정화 제어



(a) 수레위치 (b) 진자각도

그림 1. 선형 제어기를 이용한 역진자 시스템의 안정화 실험 결과.

Fig. 1. The results of regulation experiment of an inverted pendulum by a linear controller.

기를 이용하여 제어할 때, 시스템에 비선형 마찰력이 존재하지 않는다면 일정한 영역($x \approx 0$)에서는 만족할만한 결과를 보여주지만 실제 역진자 시스템에서는 무시하지 못할 정도의 비선형 마찰력의 영향이 존재하여 그림 1과 같이 진동이 계속 발생하는 정상 상태 응답을 나타낸다. 이렇게 비선형 마찰력이 시스템의 응답에서 리밋사이클의 유발하는 이유는 여러 연구에서 언급되었다[12].

이 논문에서는 시스템에 존재하는 마찰력 특성을 이해하기 위해서 C. Canudas 등이 제안한 LuGre 마찰력 모형을 이용한다[4]. 이 모형은 비선형 마찰력의 다양한 특성을 잘 표현하고 있다. LuGre 마찰력 모형의 경우, 비선형 마찰력 특성 중 정적인 특성과 물체의 동역학이 현재의 마찰력에 영향을 미치는 동적 특성을 동시에 가지고 있다. 이러한 마찰력 모형을 동적 마찰력 모형이라 일컫는다[3,4].

움직이는 물체와 미끄러짐 면의 상대속도를 \dot{x} 라 정의하면 마찰력 F 와 상대속도의 관계는 다음의 수식으로 표현할 수 있다.

$$F = \sigma_0 \dot{x} + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \alpha_2 \dot{x} \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \frac{\sigma_0}{g(\dot{x})} z |\dot{x}| \tag{6}$$

여기서, $g(\dot{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(\dot{x}/v_s)^2}$ 이다. (5)와 (6)에서 상수 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 는 LuGre 마찰력 모형에서 정적 특성에 관계되는 계수들이며, 상수 σ_0, σ_1 은 동적 마찰력 특성에 관계하는 계수들이고 v_s 는 Stribeck 속도이다. 이 마찰력 모형에서는 마찰 표면의 두 접촉 부분이 각각 일정한 탄성과 강도(stiffness)를 가지는 편모(bristle)의 형태로 접촉한다고 가정하였다. 이 편모들의 평균적인 휨(deflection) 정도를 나타내는 마찰력 내부 변수 z 에 의하여 마찰력의 동적 특성이 결정된다. 마찰력 모형에서 만일 $z=0$ 으로 하여 (5)와 (6)을 합치면 다음의 정적 마찰력 특성을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} F(\dot{x}) &= g(\dot{x}) \frac{v}{|\dot{x}|} + \alpha_2 \dot{x} \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 e^{-(\dot{x}/v_s)^2}) \text{sgn}(\dot{x}) + \alpha_2 \dot{x} \end{aligned} \tag{7}$$

(7)에서 각각의 계수들이 의미하는 바는 다음과 같다.

- α_0 : 쿨롱 마찰력(Coulomb friction) 계수
- $\alpha_0 + \alpha_1$: 정지 마찰력(stiction) 계수
- α_2 : 점성 마찰력(viscous friction) 계수

여기서 (5)의 비선형 마찰력을 포함하며, (3)의 안정화 제어기에 의해서 제어되고 있는 시스템의 선형 상태 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u - F) \\ u &= -Kx \end{aligned} \quad (8)$$

이 된다. 마찰력은 실제 외부에서 가한 입력에서 마찰력이 빠진 만큼의 입력이 시스템에 전달이 되어 실제보다 작은 입력이 가해지는 것과 같은 효과를 주게 되고 이 때문에 시스템의 응답에는 원래 예상치 못했던 리밋싸이클이나 히스테리시스, 스틱-슬립 현상 등이 발생하여 시스템 응답을 저하시키는 원인이 된다. 그리고 경우에 따라서는 이러한 비선형 마찰력으로 인해 시스템이 불안정해지기도 한다.

III. 퍼지 기초 함수를 이용한 비선형 마찰력 정의

L. X. Wang와 Jerry M. Mendel은 실수 영역에서 정의된 모든 연속 함수는 퍼지 기초 함수(fuzzy basis functions)를 이용하여 근사화 할 수 있다는 사실을 밝혔다[10]. 단일 퍼지화기(singleton fuzzifier)와 곱 추론(product inference), 무게 중심 역퍼지화기(centroid defuzzifier)와 가우시안 멤버 함수(Gaussian membership function)를 가지고 있는 퍼지 시스템은 다음의 형태로 표현된다.

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^M z^j \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)} \quad (9)$$

여기서 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ 로 퍼지 시스템의 입력 변수이며 $f: U \subset R^n \rightarrow R$ 이다. z^j 는 출력 퍼지 멤버 함수의 값을 최대화 만드는 상수 값이다. 그리고 $\mu_{A_i^j}(x_i)$ 는 가우시안 멤버 함수로써

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \alpha_i^j \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

으로 정의된다. (9)의 퍼지 시스템은 결과적으로 퍼지 기초 함수들이 선형 조합된 함수로 간주 할 수 있다. 연구 [10]의 정의 2와 [10]의 정리를 상기해 볼 필요가 있다.

정의 1: 퍼지 기초 함수 $p_j(x)$ 를 다음과 같이 정의하도록 하자.

$$p_j(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

그러면, (9)의 퍼지 시스템은 (11)의 퍼지 기초 함수의 선형 조합을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다[10].

$$f(x) = \sum_{j=1}^M p_j(x) k_j \quad (12)$$

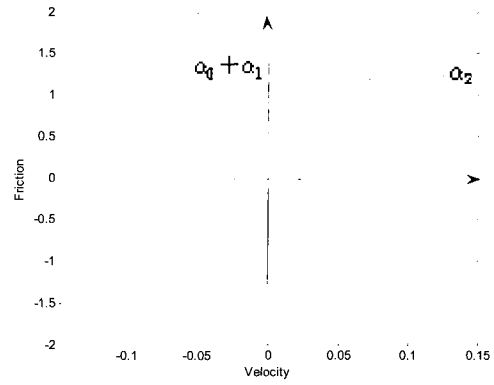


그림 2. 퍼지 기초 함수로 표현된 비선형 마찰력.
Fig. 2. Nonlinear friction force expressed by FBFs.

여기서 $k_j \in R$ 는 각 기초 함수들의 가중치 상수이다. ■

정리 1: 실수 영역에서 정의된 어떤 연속 함수 $g(x)$ 에 대해서도 임의의 $\delta > 0$ 에 대해서 다음을 만족하는 함수 퍼지 기초 함수 $f(x)$ 가 존재한다.

$$\sup_x |g(x) - f(x)| < \delta \quad (13)$$

증명: 연구 [10] 참조 ■

정리 1에 의해서 (7)의 비선형 마찰력 $F(v)$ 를 퍼지 기초 함수를 이용하여 근사화 할 수 있다. (식 전개와 간결함을 위하여 마찰력의 입력 변수에 해당하는 속도를 x 대신 v 로 표기한다.)

$$\begin{aligned} F(v) &= \sum_{j=1}^M p_j(v) k_j \\ &= \underline{k}^T \underline{p}(v) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 퍼지 기초 함수 $p(v)$ 와 가중치 상수 벡터 \underline{k} 는

$$\underline{p}(v) = [p_1(v), p_2(v), \dots, p_M(v)]^T \in R^M \quad (15)$$

$$\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_M]^T \in R^M \quad (16)$$

으로 정의한다. (14)-(16)으로 정의된 퍼지 기초 함수를 이용하여 (7)로 정의된 비선형 마찰력을 근사화한 결과를 그림 2에 도식하였다. 그림 2에서 보듯이 퍼지 기초 함수를 이용하여 비선형 마찰력 모형인 LuGre 모형을 근사화 할 수 있음을 확인하였다. 여기에 사용된 LuGre 마찰력 모형의 계수는 $\alpha_0 = 0.9$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 4$, $v_s = 0.02$ 로 선정하였고 퍼지 기초 함수의 가중치 벡터는 최소 자승법으로 구하였다.

(14)로 표현된 비선형 마찰력을 포함하는 시스템의 상태 방정식은 (8)에 대입하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu - BF(v) \\ &= Ax + Bu - B\underline{k}^T \underline{p}(v) \end{aligned} \quad (17)$$

(17)에서 만약 시스템의 응답 성능을 저하시키는 비선형 마찰력을 알고 있다면, (3)의 선형 제어기에 우리가 알고 있는 마찰력을 보상해 줌으로써 간단히 마찰력의 악영향을 제거 해줄 수 있다. 즉 우리가 알고 있는 마찰력을 $\hat{F}(v)$ 라고 한다

면 이를 (3)의 제어입력에 다음과 같이 보상해 줄 수 있다.

$$u = -Kx + \hat{F}(v) \tag{18}$$

마찰력이 보상된 제어입력 (18)에 의해서 (17)의 비선형 마찰력에 의해 영향을 받고 있는 시스템의 상태 방정식은

$$\dot{x} = Ax - BKx - B(F(v) - \hat{F}(v)) \tag{19}$$

로 바뀌게 되고 알고 마찰력이 실제의 것과 정확히 같다면, $F(v) - \hat{F}(v) = 0$ 이 되어 주어진 역진자 시스템은 마찰력이 정확히 보상된다. 그 결과로 선형 제어기를 설계할 때 목표로 했던 성능을 회복할 수 있게 된다. 이를 위해서 비선형 마찰력을 추정해야하며, 이는 (14)의 퍼지 기초 함수로 표현된 비선형 마찰력에서 미지의 상수 벡터 \underline{k} 를 추정해야한다는 것을 의미한다.

IV. 적응형 퍼지 마찰력 관측기 구현

앞 장에서 역진자 시스템 내부에 존재하는 비선형 마찰력이 제어 시스템에 미치는 영향을 살펴보고 퍼지 기초 함수로 이 비선형 마찰력을 근사하고자 제안하였다. 퍼지 기초 함수를 이용하여 비선형 마찰력을 표현하기 위해서는 각 m 개의 퍼지 기초 함수들이 어떤 가중치를 가지고 선형 조합을 이뤄야 비선형 마찰력을 근사할 수 있는지 알아야 한다. 이 장에서는 가중치 상수 벡터 \underline{k}^T 를 위한 적응형 갱신 법칙(adaptive update law)을 유도하여 일반적인 불안정 시스템에 존재하는 비선형 마찰력을 보상하기 위한 비선형 마찰력 관측기를 구성하고자한다. 비선형 마찰력이 포함되어 있는 불안정한 선형 모델을 다시 한 번 상기해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu - BF(v) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 시스템의 모든 상태 변수는 측정 가능하다고 가정한다. 비선형 마찰력을 포함하고 동시에 (3)의 선형 제어기에 의해 제어되고 있는 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BKx - BF(v) \\ &= \bar{A}x - BF(v) \end{aligned} \tag{21}$$

여기서 $\bar{A} = (A - BK)$ 이다. (21)에 퍼지 기초 함수로 표현된 (14)의 비선형 마찰력을 대입해보면 시스템의 상태 방정식은

$$\dot{x} = \bar{A}x - B\hat{k}^T p(v) \tag{22}$$

으로 정해진다. (22)의 시스템 상태 방정식에서 모든 시스템 행렬 \bar{A} 와 B 는 알려져 있지만, 시스템에 존재하는 비선형 마찰력을 모르기 때문에 퍼지 기초 함수의 가중치를 나타내는 상수 벡터 \underline{k}^T 는 우리가 알지 못하는 유일한 상수이다. 모든 상태 변수가 측정 가능하므로 $p(v)$ 는 항상 계산 가능한 값이다. 그러므로 $p(v)$ 를 입력으로 하는 관측기를 구성한다고 하면, 관측기의 상태 변수 추정값 \hat{x} 에 대해서 관측기의 동역학식은

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} - B\hat{k}^T p(v) \tag{23}$$

으로 주어진다. 이 관측기를 이용한 추정오차를 $\underline{\epsilon} = x - \hat{x}$ 로 정의하면 우리는 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 2: (22)의 퍼지 기초 함수의 가중치 상수 벡터 \underline{k} 의 추정값을 $\hat{\underline{k}}$ 라 정의하고, $\hat{\underline{k}}$ 을 임의의 상수 $\gamma > 0$ 에 대해서 (24)와 같이 갱신 하면 (23)의 관측기의 상태 변수 추정값과 가중치 벡터의 추정값은 시간이 지남에 따라 각각 실제 상태 변수와 가중치 상수 벡터로 수렴한다.

$$\dot{\hat{\underline{k}}} = -\gamma(B^T B)^{-1} B^T \underline{\epsilon} p^T(v) \tag{24}$$

증명: 상태변수의 추정오차를 시간에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax - B\hat{k}^T p(v) - \bar{A}\hat{x} + B\hat{k}^T p(v) \\ &= \bar{A}(x - \hat{x}) - B(\hat{k}^T - \underline{k}^T)p(v) \\ &= \bar{A}\underline{\epsilon} - B\tilde{k}^T p(v) \end{aligned} \tag{25}$$

으로 주어진다. (25)에서 $\tilde{k} = \hat{k} - \underline{k}$ 으로 가중치 벡터의 추정 오차를 나타낸다. 추정오차 $\underline{\epsilon}$ 과 \tilde{k} 에 대한 Lyapunov 함수를 $V(\underline{\epsilon}, \tilde{k})$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V(\underline{\epsilon}, \tilde{k}) = \underline{\epsilon}^T P \underline{\epsilon} + tr \left(\frac{\tilde{k} B^T P B \tilde{k}^T}{\gamma} \right) > 0 \tag{26}$$

여기서 $P = P^T > 0$ 이고 $\bar{A}^T P + P \bar{A} = -I$ 를 만족하도록 P 를 선택한다. 불안정한 시스템 행렬 A 가 상태 궤환 안정화 제어 입력 $u = -Kx$ 에 의해 안정화되었으므로 \bar{A} 는 안정하며, 조건을 만족하는 행렬 P 는 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{\epsilon}, \tilde{k}) &= \dot{\underline{\epsilon}}^T P \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon}^T P \dot{\underline{\epsilon}} + tr \left(\frac{\dot{\tilde{k}} B^T P B \tilde{k}^T}{\gamma} + \frac{\tilde{k} B^T P B \dot{\tilde{k}}^T}{\gamma} \right) \\ &= (\bar{A}\underline{\epsilon} - B\tilde{k}^T p(v))^T P \underline{\epsilon} + \underline{\epsilon}^T P (\bar{A}\underline{\epsilon} - B\tilde{k}^T p(v)) \\ &\quad + 2tr \left(\frac{\tilde{k} B^T P B \dot{\tilde{k}}^T}{\gamma} \right) \\ &= \underline{\epsilon}^T (\bar{A}^T P + P \bar{A}) \underline{\epsilon} - 2p^T(v) \tilde{k} B^T P \underline{\epsilon} \\ &\quad + 2tr \left(\frac{\tilde{k} B^T P B \dot{\tilde{k}}^T}{\gamma} \right) \\ &= -\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} - 2tr \left(\frac{\tilde{k} B^T P \underline{\epsilon} p^T(v) - \tilde{k} B^T P B \dot{\tilde{k}}^T}{\gamma} \right) \\ &= -\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} - 2tr \left(\tilde{k} B^T P \left[\underline{\epsilon} p^T(v) - \frac{B \dot{\tilde{k}}^T}{\gamma} \right] \right) \end{aligned} \tag{27}$$

\underline{k} 는 상수 벡터이므로 $\dot{\underline{k}} = -\dot{\tilde{k}}$ 가 되고, (24)에 의해서 (27)은

$$\dot{V}(\underline{\epsilon}, \tilde{k}) = -\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon} < 0 \tag{28}$$

이 된다. (28)이 의미하는 바는 시간이 지남에 따라서 (23)의 관측기의 추정치 \hat{x} 는 상태 변수 x 에 수렴하고, $\hat{\underline{k}}$ 는 퍼지 기초 함수의 실제 가중치 벡터 \underline{k} 에 수렴한다. ■

이로써 알려지지 않았던 시스템의 비선형 마찰력을

$$\hat{F}(v) = \hat{k}^T p(v) \tag{29}$$

으로 추정할 수 있게 된다. 따라서 (29)로 표현된 마찰력 관측기의 추정치 마찰력을 이용하면 (18)로 제안된 마찰력 보상 방법을 통하여 시스템에 존재하는 비선형 마찰력을 상쇄시킬 수 있다. 즉, 마찰력의 영향에 의해 손실되었던 제어기의 제어 성능을 회복할 수 있다.

V. 추정된 마찰력을 이용한 마찰력 보상 알고리즘

앞 장에서 시스템의 응답 성능을 개선시키기 위해 시스템에 존재하는 마찰력을 관측기를 통하여 추정하고 이를 이용하여 선형 제어기에 보상하는 방법을 제안하였다. 여기서 우리는 마찰력 관측기에 의한 보상 방법을 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다. 첫 번째 방법으로는 실시간 보상 알고리즘으로써 이 방법은 시스템에 영향을 미치는 마찰력 이외에도 제어기를 설계할 때 고려되지 않은 시스템의 불확실성이나 외란에 대해서도 적절히 대응할 수 있다는 장점이 있다. 두 번째 방법은 제어기에 보상해 줄 추정치 마찰력을 계산하는 마찰력 관측기에서 미리 구해진 퍼지 기초 함수의 가중치 벡터를 이용하여 계산해 내는 것이다. 이 방법은 첫 번째 방법에 비해서 외란이나 시스템의 외부 변수에 민감하게 반응하지 않고 충실히 마찰력만을 보상할 수 있다는 장점이 있다. 각각의 보상 방법에 대해서 다음 두 소절에서 논의해보기로 한다. 각 방법에 대한 개념도는 그림 3과 4에 나타난 바와 같다.

1. 실시간 갱신을 통한 보상 방법(On-line update of \hat{k})

(29)의 마찰력 관측기의 매개변수 \hat{k} 를 실시간 갱신함과 동시에 이루어지는 마찰력 보상 방법은 마찰력 관측 뿐 아니라 갑작스런 외란의 변화도 감지하여 추정치 마찰력에 반영을 할 수는 장점이 있다. 하지만 (24)의 적응화 기법으로 갱신되는 가중치 벡터 \hat{k} 의 추정값이 안정적으로 수렴하지 않는 경우도 발생할 수 있기 때문에 발산을 방지하는 추가적인 노력이 필요하다. 외란 관측기를 적응 기법으로 구현하는 연구 등에서 발산을 방지하기 위해서 투영 기법 (projection algorithm)을 이용하기도 한다[8,9]. 하지만 본 연구에서는 단순히 발산을 막기 위한 투영 기법보다는 \hat{k} 의 갱신 법칙에 무반응 영역(dead zone)을 추가하여 사소한 외란이나 잡음에도 민감하게 반응하여 발산하는 일이 없도록 한다. 임의의 $\|g_0\| > 0$ 에 대하여 개선된 갱신 법칙은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{k}}_d^T = -\gamma(B^T B)^{-1} B^T (\epsilon + q) p^T(v) \tag{30}$$

여기서 $q = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\epsilon\| \geq \|g_0\| \\ -\epsilon & \text{if } \|\epsilon\| < \|g_0\| \end{cases}$ 으로 주어진다. 무반응 영역이 추가된 (30)의 새로운 적응화 갱신 법칙에 의해서 추정된 가중치 벡터 \hat{k}_d 를 이용한 마찰력 보상 제어 입력은 다음과 같이 결정이 된다.

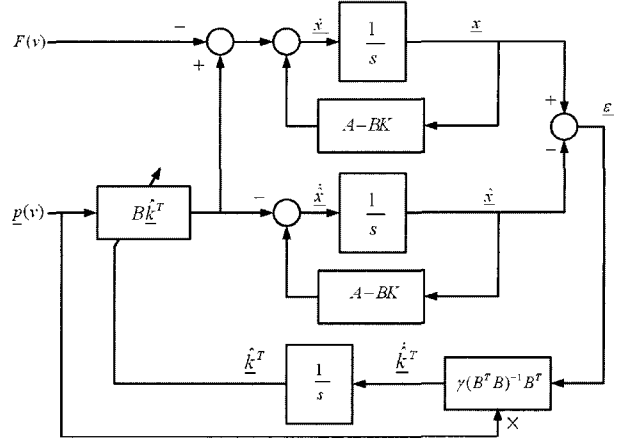


그림 3. 실시간 마찰력 보상을 위한 신호 흐름도.
Fig. 3. Block diagram for on-line compensation of the friction.

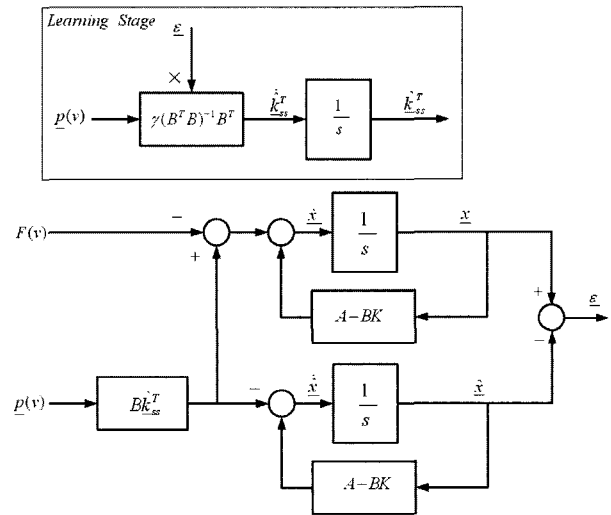


그림 4. 추정 후 사후 보상을 위한 신호 흐름도.
Fig. 4. Block diagram for off-line compensation of the friction.

$$u = -Kx + \hat{F}(v) = -Kx + \hat{k}_q^T p(v) \tag{31}$$

2. 가중치 벡터의 사전 추정을 통한 보상 방법(Priori estimation of \hat{k})

가중치 벡터의 사전 추정을 통한 마찰력 보상 방법은 앞서 설명했듯이 (29)의 마찰력 관측기에서 미리 추정된 퍼지 기초 함수의 가중치 벡터를 이용하여 마찰력 추정치를 만들어 보상 입력을 만드는 방법이다. 마찰력을 보상하지 않는 상황에서 실시간으로 마찰력을 추정하면 결국 일정 시간이 지난 후에 마찰력을 근사화 하는 퍼지 기초 함수의 가중치 벡터의 추정값 \hat{k} 는 일정한 값으로 수렴하게 되는데 이 값을 \hat{k}_{ss} 로 정의한다. 그러면, 수렴된 가중치 벡터 \hat{k}_{ss} 를 매개변수 \hat{k} 대신 사용하여 마찰력 관측기에서 마찰력을 추정하게 된다.

$$\hat{F}(v) = \hat{k}_{ss}^T p(v) \tag{32}$$

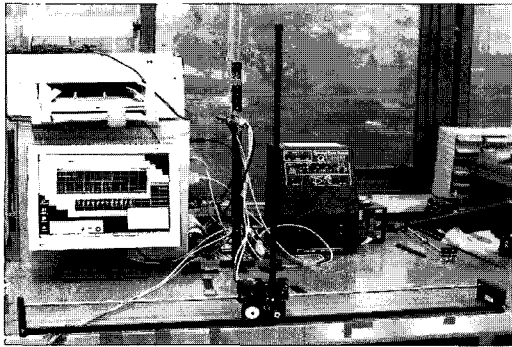


그림 5. 실험에 사용된 역진자 실험 장치.
Fig. 5. The apparatus for the experiment of an inverted pendulum.

표 1. 역진자 시스템의 계원.

Table 1. The specification of coefficients of inverted pendulum.

	실제값
수레 질량	0.94kg
진자 질량	0.23kg
진자 길이	0.33m
진자 관성 모멘트	$7.8837 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

(32)로 계산된 현재 시점에서의 추정치 마찰력을 앞의 경우와 마찬가지로 선형 제어기의 입력에 더하여 마찰력 보상 입력을 만들어낸다. 즉, 실시간으로 마찰력을 보상하는 것은 앞의 방법과 같지만 마찰력을 추정하기 위한 마찰력 관측기의 매개변수에 해당하는 퍼지 기초 함수의 가중치 벡터 \hat{k} 가 시간에 따라서 계속 변하지 않고 \hat{k}_{ss} 로 고정되어 마찰력만을 추정해 낸다는 것이 차이점이다. 추정된 마찰력을 이용하여 보상하는 방법에 있어서는 앞의 방법 동일하다.

$$u = -K\hat{x} + \hat{k}_{ss}^T p(v) \tag{33}$$

VI. 실험 및 실험 결과

앞서 제안되었던 비선형 마찰력이 포함된 시스템의 응답 성능 개선 방법의 유용성을 확인하기 위해 역진자 시스템을 활용한다. 실험 장치는 Quanser사에서 제작된 IP02 모델로써 그 실제 모습과 실험 환경은 그림 5와 같다. 이 논문에서 고려한 비선형 마찰력은 수레에 고정된 모터의 회전축에 연결되어 있는 기어와 수레의 레일(rail)에서 발생한다. 이 실험에서 사용된 역진자 시스템의 물리적인 실제 값은 표 1에 나타냈다.

상태 궤환 제어기의 설계 조건으로, $Q = \text{diag}\{4 \ 0 \ 0.75 \ 0\}$, $R = 0.0003$ 로 정하면 그 결과 상태변수 이득을 K 는

$$K = [175.97 \ 27.65 \ -50.0 \ -46.18] \tag{34}$$

으로 결정된다.

마찰력 추정을 위한 퍼지 기초 함수의 멤버 함수는 앞서 가정한 비선형 마찰력 모형인 LuGre 모형의 비선형적 특성을 잘 표현하도록 6개의 가우시안 멤버 함수와 4개의 시그

모이드 멤버 함수(sigmoid membership function)로 구성하였다. 각 멤버 함수 μ_{A_i} 의 구체적인 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{A_1} &= 1/(1 + e^{60(x+0.12)}) \\ \mu_{A_2} &= \exp\{-(v+0.125)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_3} &= \exp\{-(v+0.075)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_4} &= \exp\{-(v+0.025)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_5} &= 1/(1 + e^{5000x}) \\ \mu_{A_6} &= 1/(1 + e^{-5000x}) \\ \mu_{A_7} &= \exp\{-(v-0.025)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_8} &= \exp\{-(v-0.075)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_9} &= \exp\{-(v-0.125)^2/2\sigma^2\} \\ \mu_{A_{10}} &= 1/1 + e^{-60(x-0.12)} \end{aligned}$$

앞서 제안된 마찰력 보상 실험을 위하여 세 절차로 나누어 실행하였다. 우선, 첫 번째 실험에서는 관측기의 성능을 검증하기 위하여 마찰력의 보상 없이 관측기의 정확도를 살펴본다. 이때, 마찰력을 추정하기 위해 \hat{k} 는 (24)를 이용하여 계속 갱신이 되는데, \hat{k} 의 수렴값을 \hat{k}_{ss} 로 정하고, \hat{k}_{ss} 는 세 번째 마찰력 보상 실험에 사용이 된다. 두 번째 실험은 \hat{k} 이 실시간으로 갱신되는 동시에 마찰력 보상이 진행된다. 마지막으로 세 번째 실험에서는 앞서 미리 추정이 된 \hat{k} 의 수렴값인 \hat{k}_{ss} 를 이용하여, (29)와 (32)의 마찰력 관측기를 통해 계산된 추정치 마찰력을 마찰력 보상 제어기에 추가하여 마찰력 보상을 하게 된다.

1. 관측기 성능 실험

(23)의 관측기가 어느 정도의 정확도를 가지는지 확인하기 위하여 관측기로부터 실시간으로 추정되는 수레의 위치와 진자의 각도, 마찰력을 실제 역진자 시스템에서 측정되는 데이터와 비교한다. 이 실험에서는 오로지 관측기의 실시간 추정 능력을 비교하기 위한 실험으로서 마찰력에 대한 보상은 이루어지지 않는다. 그림 6(a)와 (b)에 나타난 수레 위치와 진자 각도 실험 결과를 보면, 관측기의 추정값이 실제 역진자의 측정값을 매우 잘 추정함을 알 수 있다. 또한 추정된 마찰력 그림 6(c)에서 볼 수 있듯이 역진자 시스템에는 지속적으로 응답 성능을 저하시키는 비선형 마찰력이 존재함을 확인할 수 있다.

2. 가중치 벡터 실시간 업데이트를 통한 마찰력 보상 실험

실시간으로 갱신되는 \hat{k} 와 (29)의 마찰력 관측기를 이용하여 추정된 마찰력을 (31)의 마찰력 보상 제어기에 추가하여 마찰력을 보상한다. 마찰력을 보상하는 중에도 \hat{k} 은 계속 갱신이 된다. 이렇게 실시간으로 추정된 마찰력을 보정한 실험 결과는 그림 7(a)와 (b)에서 알 수 있듯이 마찰력 보상 전에 비하여 수레나 진자의 진동 폭이 30% 이하로 줄어들었다. 이는 마찰력 보상에 의해서 마찰력의 영향이

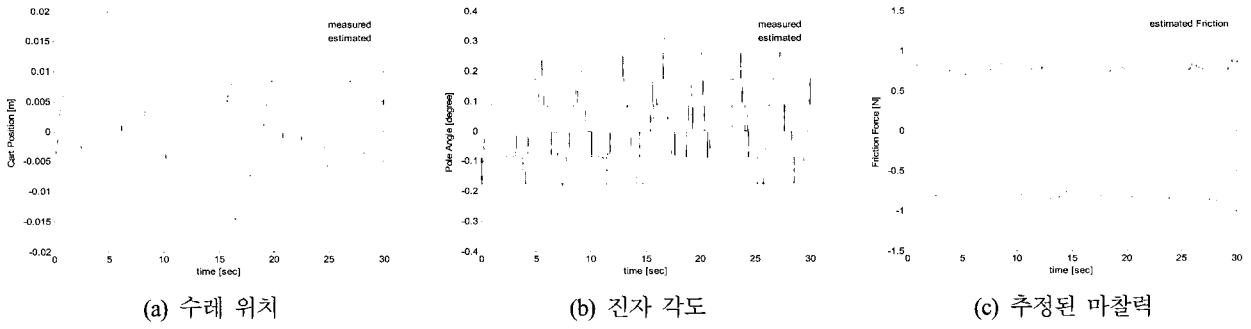


그림 6. 마찰력 보상이 존재하지 않는 관측기 성능 실험 결과(실선: 측정, 점선: 추정).

Fig. 6. Experimental results of the estimation performance of the estimator.

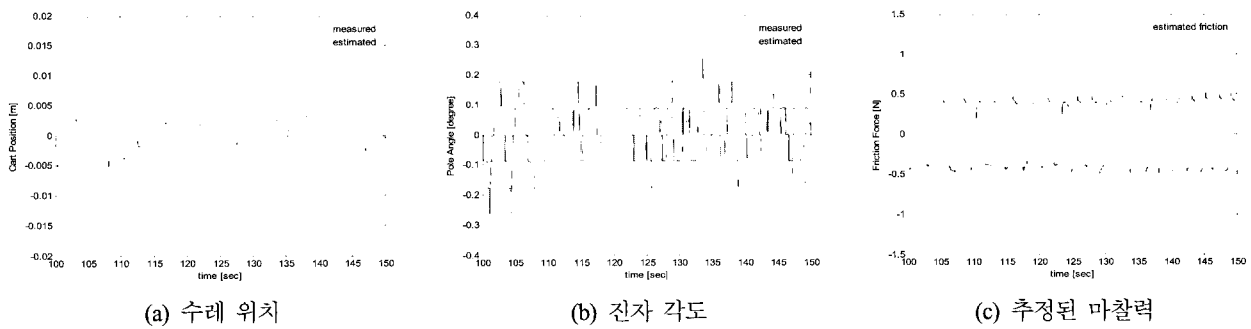


그림 7. \hat{k} 실시간 갱신을 통한 마찰력 보상 실험 결과(실선: 측정, 점선: 추정).

Fig. 7. Experimental results of the friction compensation by on-line update of \hat{k} .

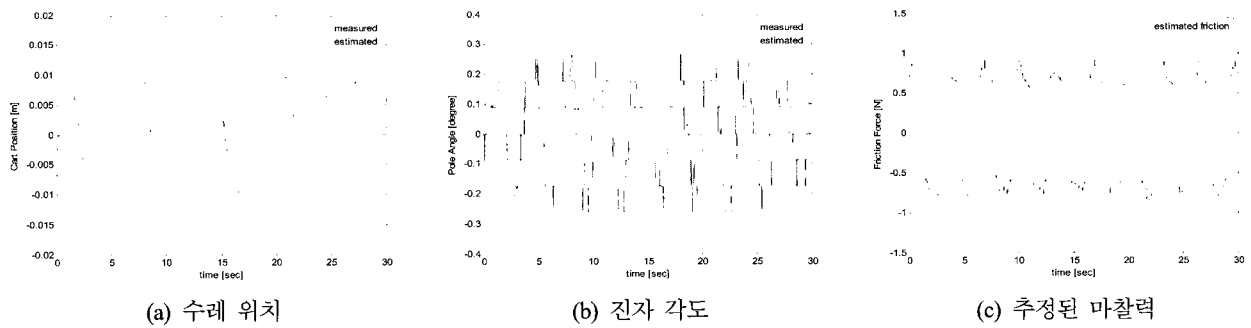


그림 8. $\hat{k}_{s,s}$ 를 이용한 관측기 성능 실험 결과(실선: 측정, 점선: 추정).

Fig. 8. Experimental results of the estimation performance of the estimator with $\hat{k}_{s,s}$.

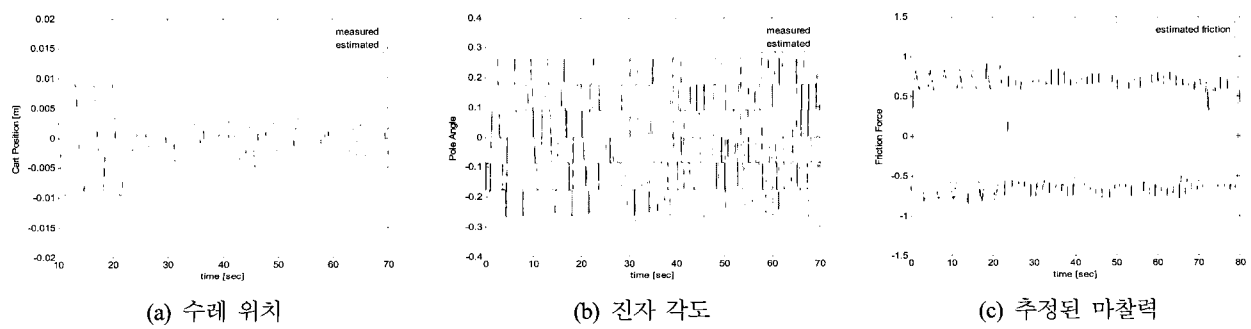


그림 9. $\hat{k}_{s,s}$ 를 이용하여 마찰력 보상을 한 실험 결과(실선: 측정, 점선: 추정).

Fig. 9. Experimental results of the friction compensation using $\hat{k}_{s,s}$.

감소했다는 것을 의미하며, 실시간 업데이트를 통해 계산되는 마찰력 추정치 또한 실제값에 가깝게 추정이 된다고 말할 수 있다.

3. 가중치 벡터 사전 추정 후 마찰력 보상 실험

마찰력을 보상하기 위해서 사전에 관측기 성능 실험의 결과에서 마찰력 추정기의 매개변수 \hat{k} 는 정상 상태 \hat{k}_{ss} 로 수렴하였고 그 실제값은 다음과 같다.

$$\hat{k}_{ss} = [-0.0079 \quad -0.32 \quad -1.29 \quad -1.12 \quad -1.9 \\ 1.9 \quad 1.14 \quad 1.32 \quad 0.32 \quad 0.0075]^T$$

이렇게 사전에 추정된 \hat{k}_{ss} 과 (32)의 마찰력 관측기를 이용하여 현재의 마찰력을 계산한다. 마찰력 보상 실험에서는 더 이상 \hat{k} 의 갱신은 이루어지지 않고 오로지 마찰력 보상만 이루어진다. 그림 8(a)와 (b)는 각각 수레와 진자에 대해서 사전 추정된 마찰력을 추가하였을 때의 관측기 추정치와 비교를 한 결과다. 이 결과 또한 실시간 갱신에 의한 마찰력 보상 실험에 비해서도 떨어지지 않는 추정 결과를 보여준다. 그리고 마찰력 보상 실험에서는 그림 9에서 볼 수 있듯이 수레의 진동 성분의 경우 보상 전에 비해 25%로 줄어 실시간 매개변수 갱신을 통한 마찰력 보상 실험 보다 나은 결과를 보여주고 있다.

VII. 결론

지금까지 시스템에 존재하는 비선형 마찰력을 추정하고 보상하는 방법에 관해서 논의했다. 비선형 마찰력을 추정하기 위해서 퍼지 기초 함수를 이용하였으며, 퍼지 기초 함수의 가중치를 결정하는 가중치 벡터를 실시간으로 갱신하는 적응 법칙을 유도하였다. 제안된 방법을 확인하기 위한 실험에는 역진자 시스템을 사용하였다. 역진자 시스템의 마찰력을 보상하는 실험 결과는 제안된 방법이 비선형 마찰력을 보상하는데 매우 유용함을 보여줬다. 또한, 가중치 벡터를 실시간으로 갱신하는 방법 외에도 미리 수렴된 가중치 벡터를 사용하여 마찰력을 추정하고 보상하는 방법도 제안하였다. 이 방법의 경우 역진자의 수레 위치의 응답 개선에 뛰어난 성능을 보여주었다. 제안된 두 가지 방법은 알려지지 않은 비선형 마찰력을 관측함으로써, 비선형 마찰력으로부터 발생한 시스템의 응답 성능 저하를 개선시키는데 매우 효과적임을 실험 결과들을 통하여 확인하였다.

참고문헌

[1] C. T. Johnson and R. D. Lorenz, "Experimental identification of friction and Its compensation in precise, position controlled mechanisms," *IEEE Transactions on*

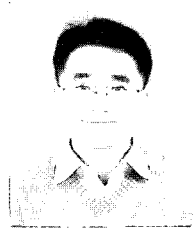
Industry Applications, vol. 28, no. 6, pp. 1392-1398, November/December 1992.

- [2] R. Kelly, J. Llamas, and R. Campa, "A measurement procedure for viscous and coulomb friction," *IEEE Trans. Instrumentation and Measurement*, vol. 49, no. 4, pp. 857-861, Aug. 2000.
- [3] B. Armstrong-Hltouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083-1138, 1994.
- [4] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 40, pp. 419-425, Mar. 1995.
- [5] J. Amin, B. Friedland, and A. Harnoy, "Implementation of a friction estimation and compensation technique," *IEEE Control System Magazine*, vol. 17, pp. 71-76, 1997.
- [6] B. Friedland and Y.-J. Park, "On adaptive friction compensation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 10, pp. 1609-1612, Oct. 1992.
- [7] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky, "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 11, pp. 65-80, 1997.
- [8] E. T. Kim, "A fuzzy disturbance observer and Its application to control," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 77-84, Feb. 2002.
- [9] M. I. El-Hawwary, A. L. Elshafei, H. M. Emara, and H. A. Abdel Fattah, "Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp. 1135-1144, Nov. 2006.
- [10] L.-X. Wang and J. M. Mendel, "Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, Sep. 1992.
- [11] J. S. R. Jang and C. T. Sun, "Functional Equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 4, no. 1, pp. 156-159, Jan. 1993.
- [12] H. Olsson and K. J. Åström, "Friction generated limit cycles," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, no. 4, pp. 629-636, July 2001.



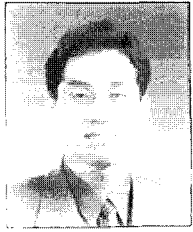
박 덕 기

1999년 아주대 전자공학과 졸업. 2001년 동 대학원 석사. 2001년~현재 동 대학원 박사과정. 관심분야는 추정이론, 비선형 제어, 모델링.



박 민 호

1991년 아주대학교 제어공학과 졸업. 1993년 동 대학원 제어계측공학과 석사. 1999년 9월~현재 아주대학교 전자공학과 박사과정. 관심분야는 최적제어, Robust Control.



좌 동 경

1995년 서울대 제어계측공학과 졸업. 2001년 동 대학원 박사. 2005년~현재 아주대 전자공학부 조교수. 관심분야는 비선형 적응제어, 로봇제어 응용.



홍 석 교

1971년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1976년~현재 아주대학교 전자공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 컴퓨터 응용, 지능제어.