

손실 매질에 대한 2차원 등방 시간 영역 유한 차분법

Two Dimensional Explicit ID(Isotropic-Dispersion)-FDTD Scheme for Lossy Media

고 일 석 · 김 현* · 육 종 관*

Il-Suek Koh · Hyun Kim* · Jong-Gwan Yook*

요 약

본 논문에서는 참고문헌 [1], [2]에서 무손실 매질을 가정하고 보고하였던 ID-FDTD 기법을, 손실 매질로 확장 시켜 정리하였다. 확장된 내용으로는 기법의 안정도 분석(stability analysis), 손실 매질에 대한 ID-FDTD 기법의 분산 관계(dispersion relation), 무손실 · 손실 매질 모두에 적용할 수 있는 보정치를 수식 등 크게 세 가지이다. 이러한 분석 결과 ID-FDTD 기법은 참고문헌 [3]의 standard 기법보다 큰 시간 증분에서도 안정성을 유지하면서도 적은 분산 오차(dispersion error)를 가지는 것을 확인할 수 있었다. 이는 두 가지 경우의 전자기파 산란 문제를 계산함으로써 검증하였다.

Abstract

In this paper, the ID-FDTD scheme, proposed in Reference [1] and [2], is modified and completely analyzed. The modifications are composed of three parts: rigorous stability analysis, dispersion relation for linear lossy media, and new scaling factors for permittivity, permeability, and conductivity. As a result, it is shown that the proposed scheme has lower dispersion error in spite of larger time step than the conventional standard scheme of Reference [3]. To validate the scheme, there are presented two scattering examples, which show excellent results.

Key words : FDTD, ID-FDTD, Dispersion Relation, Stability, Isotropic Dispersion

I. 서 론

시간 영역 맥스웰 방정식은 전기장과 자기장의 현상을 시간과 공간에 대한 미분 방정식의 관계식으로 표현된다. 이를 해석하기 위해 여러 기법들이 제안되었는데, 그 중 K. Yee는 중앙 유한 차분법(central Finite Difference Method: central FDM)을 기반으로, 맥스웰 방정식을 푸는 표준 시간 영역 유한 차분법(standard Finite Difference Time Domain method: stan-

dard FDTD)을 제안하였다^[3]. 전자기 현상 해석에 있어, 널리 이용되는 모멘트법(Method of Moment: MoM) 또는 유한 요소법(Finite Element Method: FEM)과 비교했을 때, FDTD 기법은 구현의 상대적 용이성, 넓은 해석 및 적용 범위 등의 장점으로 인해 다양한 문제에 적용되어 왔다^{[3],[4]}.

Standard FDTD 기법은 계산 공간을 Yee 셀(Yee cell)이라 알려진 단위 셀로 모델링하고 시간의 진행에 따라 계산을 반복하게 된다. 다시 말해 이 단위

「이 논문은 2006년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2006-331-D00398).」

「본 연구는 정보통신부 및 정보통신연구진흥원의 대학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음(ITA-2006-C1090-0603-0038).」
인하대학교 정보통신대학원(Graduate School of Information and Communication, Inha University)

*연세대학교 전기전자공학과(Department of Electrical and Electronics Engineering, Yonsei University)

· 논문 번호 : 20070315-035

· 수정완료일자 : 2007년 5월 9일

셀의 모서리와 면에서 각각 전기장과 자기장을 순차적으로 계산하게 된다. 이 계산 과정에서 공간과 시간에 대한 미분 연산자를 유한 차분법을 통해 근사화하기 때문에 standard FDTD 기법은 몇 가지 문제점을 가지고 있다. 이 문제점들 중 하나인 비등방성 분산 오차(anisotropic dispersion error)는 등방성 무손실의 계산 공간에서 전자기장의 수치 위상 속도(numerical phase velocity)가 방향에 따라 각기 다른 현상을 말하는데, 이는 계산 공간이 실제 매질과 다른 유전율과 투자율을 가지는 것을 의미한다. 이러한 분산 오차는 셀 크기(cell size)와 시간 증분(time step)이 커질수록 증가하므로 공간을 조밀한 샘플링을 통해 모델링하지 않는다면, standard FDTD 기법의 해석 결과는 큰 오차를 갖는다^{[1],[2]}.

분산 오차를 줄이기 위한 2차원 등방성 분산 시간 영역 유한 차분법(Isotropic Dispersion Finiter Difference Time Domain method: ID-FDTD)이 제안되었다^{[1],[2]}. ID-FDTD 기법은 두 개의 유한 차분 스텐실(finite difference stencil)의 가중치 합(weighting sum)으로 표현되는 스텐실을 사용한다. 그리고 이 스텐실을 이용한 업데이트 식으로부터 등방성 분산 특성을 유도한 다음 정확한 전파 상수를 가지도록 보정치(scaling factor)로 매질의 특성을 수정하였다. 이 보정 과정을 거쳐 정확한 위상 속도를 맞추는 ID-FDTD 기법은 모의 실험 결과 분산 오차를 줄임으로써 정확한 계산 결과가 도출됨을 확인하였다^{[1],[2]}. 하지만 이 기법을 손실 매질(lossy media)로 확장하여 해석할 경우, 해석 결과가 정확한 해와 큰 차이가 발생함을 확인하였다^{[5],[6]}. 이와 같은 현상이 발생하는 이유는 손실 매질의 전파 상수(propagation constant)가 실수부의 감쇠 상수(attenuation constant)와 허수부의 위상 상수(phase constant)로 이뤄진 복소수 형태인데 참고문헌 [1], [2]에서 제안한 무손실 매질의 보정치를 사용하여 손실 매질의 특성을 보정할 경우 위상 속도뿐만 아니라 감쇠 상수에 대해 정확한 보정이 이뤄지지 않았기 때문이다^{[5],[6]}. 이에 본 논문에서는 손실 매질에 대한 내용을 보강하여 무손실 매질을 포함하도록 ID-FDTD 기법을 확장하였고 그 결과 손실 매질의 정확한 전파 상수와 거의 차이 없이, 등방성으로 전자기장이 전파하는 분산 특성의 ID-FDTD 기법을 개발하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2

장에서는 Z-변환을 통해 손실 매질의 분산 관계를 구하였고 참고문헌 [1]에서 보고하였던 ID-FDTD 기법의 안정도 분석을 좀 더 엄밀히 하였다. 또한, 분산 관계를 이용하여 손실 매질에 대해 정확한 감쇠 상수와 전파 상수를 얻기 위한 매질의 보정치를 수식으로 유도하였다. 3장에서는 이를 적용하여 두 가지 형태의 유전체에 대한 전자기파 산란 문제를 계산함으로써 ID-FDTD 기법의 타당성을 확인하였다.

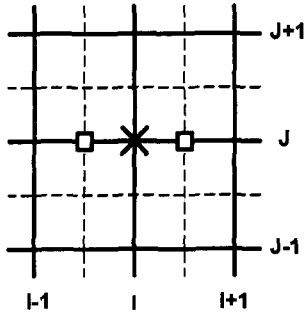
II. Isotropic Dispersion FDTD Scheme

ID-FDTD 기법은 무손실 매질로 이뤄진 2차원 공간에서 standard FDTD 기법의 비등방성 분산 특성을 해결할 수 있음을 보였다^{[1],[2]}. 참고문헌 [1]의 표 1의 FLOPs에서 보듯 ID-FDTD 기법은 standard FDTD 기법과는 달리 6개 지점에서 샘플링을 하여 미분 연산자를 근사화하기 때문에 많은 계산량이 필요하다는 단점을 가진다. 하지만 standard 기법의 치명적인 약점인 비등방성 분산 특성을 확연히 줄일 뿐만 아니라 기존에 등방성 분산 특성을 위해 참고문헌 [7]에서 제안된 NS-FDTD(Nonstandard FDTD) 기법이나 참고문헌 [8]의 기법과 비교하였을 때보다 적은 분산 오차를 가지는 것으로 나타났다^[1].

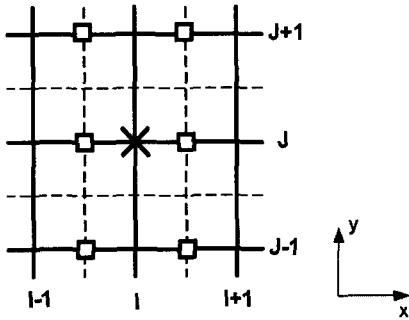
2-1 스텐실(Stencil)과 손실 매질로 확장

2차원 공간에서 standard FDTD 기법은 그림 1의 (a)와 같이 한쪽 방향으로 놓인 두 지점에서 값을 샘플링하여 미분값을 근사화 하는 2-points 스텐실인 식 (1)을 사용한다. 2차원의 등방성 무손실 매질의 공간에서 이 방식의 샘플링은 45°에서 최대의 위상 속도를 가지고 0°와 90°에서는 최소의 위상속도를 가지는 비등방성 분산 특성을 가진다. 한편, 식 (2)의 6-points 스텐실의 경우 이와 반대로 45°에서 최소, 0°, 90°에서는 최대인 비등방성 분산 특성을 보인다^{[1],[2]}. ID-FDTD 기법은 서로의 비등방성을 보완하고자 두 스텐실, 식 (1)과 식 (2)를 합하여 식 (3)과 같은 형태의 가중합(weighting sum)으로 표현되는 스텐실을 사용하였다.

$$\frac{\partial}{\partial x} f|_{i,j}^n \approx \bar{\alpha}_x^2 f|_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x} [f|_{i+1/2,j}^n - f|_{i-1/2,j}^n] \quad (1)$$



(a) 2-points 스텐실
(a) 2-points stencil



(b) 6-points 스텐실
(b) 6-points stencil

그림 1. $\partial/\partial x$ 의 유한 차분에 대한 2-points와 6-points 스텐실(x: 편미분 지점, □: 샘플링 지점)

Fig. 1. 2-points and 6-points stencil for finite difference of $\partial/\partial x$ (x: point of partial derivative, □: point of sampling).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_{i,j}^n &\approx \bar{a}_x^6 f_{i,j}^n \\ &\equiv \frac{1}{4} [\bar{a}_x^2 f_{i,j+1}^n + 2 \bar{a}_x^2 f_{i,j}^n + \bar{a}_x^2 f_{i,j-1}^n] \quad (2) \end{aligned}$$

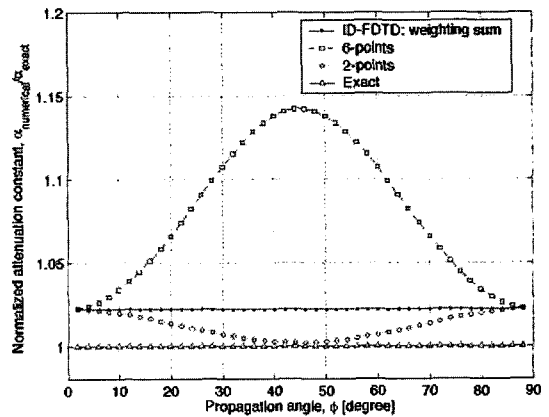
$$\frac{\partial}{\partial x} f_{i,j}^n \approx \bar{a}_x f_{i,j}^n \equiv (1-\alpha) \bar{a}_x^6 f_{i,j}^n + \alpha \bar{a}_x^6 f_{i,j}^n \quad (3)$$

여기에서 유한 차분 연산자인 \bar{a}_x^2 , \bar{a}_x^6 , \bar{a}_x 는 참고문헌 [1], [2]에서 정의된 것과 같다. α 는 서로 다른 두 개의 연산자의 비중을 결정해 주는 가중치 (weighting factor)가 된다. 첨자인 n, I, J 는 시간과 공간에 대한 좌표로서 $f_{i,j}^n \equiv f(I\Delta x, J\Delta y, n\Delta t)$ 이고 $\Delta x, \Delta y$ 는 공간에서 각각 x, y 방향으로 셀 크기이다.

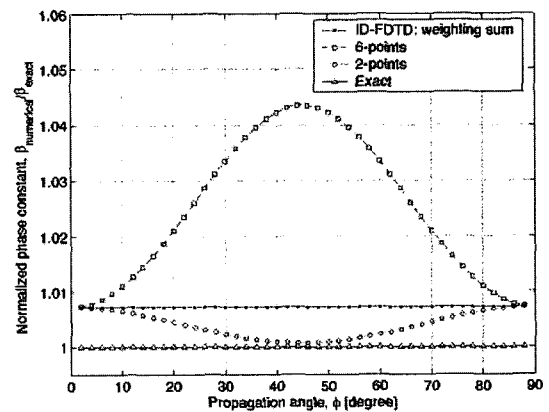
ID-FDTD 기법의 스텐실을 손실 매질의 경우에도 확장하기 위해 앞서 언급한, 세 가지 스텐실에 대한 수치 감쇠 상수와 위상 상수의 분산 특성을 확인해

보았다. 이 때 업데이트 식은 2-2절의 식 (4)와 같고 분산 관계(dispersion relation)는 2-3절의 식 (7)과 같다. 그 결과 2-points와 6-points의 스텐실은 무손실 매질과 같이 손실 매질에서도, 그림 2와 같이 감쇠 상수와 위상 상수, 모두 최대와 최소의 지점이 반대로 나타나는 분산 특성을 보였다. 따라서 손실 매질 역시 무손실 매질과 유사하게 다른 분산 특성의 스텐실이 서로 보완하여 계산 공간 내에서 등방성의 전파 상수가 구현된다(그림 2의 ID-FDTD: weighting sum).

2-2 분산 관계(Dispersion Relation)



(a) 수치 감쇠 상수
(a) Numerical attenuation constant



(b) 수치 위상 상수
(b) Numerical phase constant

그림 2. 세 가지 스텐실의 분산 특성($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW, $S=0.7$)

Fig. 2. Dispersion of three stencils ($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW and $S=0.7$).

TM_z 모드와 선형 손실 매질에 대해 ID-FDTD 기법을 적용하면 식 (4)와 같은 업데이트 식을 얻을 수 있다^{[5],[6]}. 이 때 매질은 상대 유전율이 $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$ 이고, 상대 투자율은 μ_r 로 가정하였다. 손실을 의미하는 ϵ'' 은 손실 매질일 경우, $\epsilon'' = \sigma/j\omega\epsilon_0$ 로 표현되는데, 여기에서 σ , ω , ϵ_0 는 각각 도전율, 각 주파수, 자유 공간의 유전율을 나타낸다. $j = \sqrt{-1}$ 이고 그 밖의 기호들은 실수이다.

$$\begin{aligned} \partial_x^2 H_x|_{I,J+1/2}^n &= -\frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r \Delta y} \partial_y E_z|_{I,J+1/2}^n \\ \partial_x^2 H_y|_{I+1/2,J}^n &= \frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r \Delta x} \partial_x E_z|_{I+1/2,J}^n \\ \partial_x^2 E_z|_{I,J}^{n+1/2} + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_0 \epsilon'} [E_z|_{I,J}^{n+1} + E_z|_{I,J}^n] \\ &= \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon' \Delta x} \partial_x H_y|_{I,J}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon' \Delta y} \partial_y H_x|_{I,J}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 μ_0 는 자유 공간의 투자율이고, Δt 는 시간 증분을 의미한다.

식 (4)와 같은 식으로 계산되는 ID-FDTD 기법의 분산 관계는 Z-변환(Z-transform)을 통해 구할 수 있다^[5]. E_z , H_x , H_y 는 손실 매질에서 진행하기 때문에 전파 상수는 복소수이기 때문에 샘플링된 이들은 식 (5)와 같이 복소수 형태 기저 함수(basis function)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E_z|_{I,J}^n &= E_{z0}(\xi_x, \xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x^n \xi_x^I \xi_y^J \\ H_x|_{I,J}^n &= H_{x0}(\xi_x, \xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x^n \xi_x^I \xi_y^J \\ H_y|_{I,J}^n &= H_{y0}(\xi_x, \xi_x, \xi_y) \cdot \xi_x^n \xi_x^I \xi_y^J \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)에서 ξ_x , ξ_x , ξ_y 는 각각 이산된(discreted) 시간, x, y 공간의 복소 기저 함수를 나타낸다. 이 때 전기장, 자기장을 공간에 대해서는 감쇠가 있지만 시간 축에서는 무손실인 주기 함수라고 가정한다면, 기저 함수들은 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi_t &= e^{j\omega \Delta t} \\ \xi_x &= e^{-\gamma_x \Delta x} = e^{-\alpha_x \Delta x} e^{-j\beta_x \Delta x} \\ \xi_y &= e^{-\gamma_y \Delta y} = e^{-\alpha_y \Delta y} e^{-j\beta_y \Delta y} \end{aligned} \quad (6)$$

γ_x , γ_y 는 x, y방향의 수치 복소 전파 상수(numerical complex propagation constant)를 나타내고, α_x , α_y 는 각 방향의 수치 감쇠 상수(numerical

attenuation constant), β_x , β_y 는 수치 위상 상수(numerical phase constant)이다. 또한 $\gamma_x = \gamma \cos \phi$, $\gamma_y = \gamma \sin \phi$ 로 정의되고 벡터인 γ 의 x, y 방향 성분을 의미한다. ϕ 는 파가 진행하는 방향을 나타내고, γ 는 ϕ 방향으로 진행하는 전자기장의 수치 복소 전파 상수를 의미한다.

E_z , H_x , H_y 의 치환을 통해 식 (4)를 정리하면 ID-FDTD 기법의 분산 관계를 확인할 수 있다. 최종의 분산 관계는 다음과 같은 식으로 정리된다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} \left[\sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} - j \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_0 \epsilon'} \cos \frac{\omega \Delta t}{2} \right] \\ &= \frac{c_0^2}{\epsilon' \mu_r} \left[\frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{j\gamma_x \Delta x}{2} \left(1 - \alpha \sin^2 \frac{j\gamma_y \Delta y}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{j\gamma_y \Delta y}{2} \left(1 - \alpha \sin^2 \frac{j\gamma_x \Delta x}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 이고 자유 공간에서 전파 속도를 나타낸다. 식 (7)에서 가중치, α 가 0이 되면 식 (7)은 손실 매질에 대한 standard FDTD 기법의 분산 관계식이 된다. 또한 식 (7)에서, $\sigma = 0$, $\gamma_x = j\beta_x$, $\gamma_y = j\beta_y$ 을 치환할 경우, 이는 무손실 매질에 대한 ID-FDTD 기법의 분산 관계식으로 변환된다^{[1],[2]}.

2.3 안정성 분석(Stability Analysis)

참고문헌 [1]은 정방형 셀(square cell)에서 전파 방향이 45°일 때의 분산 관계식을 이용하여 무손실 매질에 대한 ID-FDTD 기법의 안정성(stability)를 분석하여 standard 기법보다 큰 시간 증분에서도 안정성이 유지됨을 보였다. 하지만 이는 정방형 셀이고 한 방향만을 가정하였기 때문에 완전한 분석이 되지 않는다. 이에 본 논문에서는 내용을 추가하여 직사각형 셀과 모든 전파 방향을 고려한 경우에 대해 안정성을 엄밀히 분석하였고 그 결과 standard 기법보다 큰 시간 증분을 가지는 것을 확인할 수 있었다.

무손실 매질에 대한 ID-FDTD 기법의 분산 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t^2} \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} \\ &= \frac{c_0^2}{\epsilon' \mu_r} \left[\frac{1}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\beta_x \Delta x}{2} \left(1 - \alpha \sin^2 \frac{\beta_y \Delta y}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{\beta_y \Delta y}{2} \left(1 - \alpha \sin^2 \frac{\beta_x \Delta x}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 무손실 매질의 상대 유전율과 상대 투자율은 ϵ_r, μ_r 이다. $\beta_x = \beta \cos \phi$ 와 $\beta_y = \beta \sin \phi$ 이고, β 는 수치 위상 상수(numerical phase constant)이다.

$S_x = \sin^2(\beta_x \Delta x/2)$, $S_y = \sin^2(\beta_y \Delta y/2)$ 로 치환하여 식 (8)을 표현하면

$$\sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} = [C_1 S_x (1 - \alpha S_y)^2 + C_2 S_y (1 - \alpha S_x)^2] \quad (9)$$

$C_1 = c_0^2 \Delta t^2 / (\epsilon_r \mu_r \Delta x^2)$, $C_2 = c_0^2 \Delta t^2 / (\epsilon_r \mu_r \Delta y^2)$ 이다.

식 (9)에서 좌변은 $[0, 1]$ 사이의 값을 가지게 되고 우변을 $f(S_x, S_y)$ 라 한다면 $f(S_x, S_y)$ 는 가중치, α 에 따라 값이 변하게 된다. 여기에서 β_x, β_y 를 실수라고 가정한다면 $(S_x, S_y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 이므로 우변의 범위는 제한되게 된다. 우선 고정된 S_x, S_y 에 대해 표현하면 다음과 같이 각각 S_y, S_x 에 대한 이차 방정식 형태로 나타난다(고정된 $S_x, S_y = S_0$).

$$\begin{aligned} f(S_0, S_y) &= C_1 S_0 \alpha^2 \left(S_y - \frac{2C_1 S_0 \alpha - C_2 (1 - \alpha S_0)^2}{2C_1 S_0 \alpha^2} \right)^2 \\ &\quad + C_1 S_0 - \frac{[2C_1 S_0 \alpha - C_2 (1 - \alpha S_0)^2]^2}{4C_1 S_0 \alpha^2} \\ f(S_x, S_0) &= C_2 S_0 \alpha^2 \left(S_x - \frac{2C_2 S_0 \alpha - C_1 (1 - \alpha S_0)^2}{2C_2 S_0 \alpha^2} \right)^2 \\ &\quad + C_2 S_0 - \frac{[2C_2 S_0 \alpha - C_1 (1 - \alpha S_0)^2]^2}{4C_2 S_0 \alpha^2} \end{aligned} \quad (10)$$

또한 $f(S_x, S_y)$ 는 $[0, 1] \times [0, 1]$ 영역의 경계에서 다음과 같은 값으로 정의된다.

$$\begin{aligned} f(S_x, S_y) &\leq \begin{cases} C_1 S_x & \text{for } (S_x, 0) \\ C_2 S_y & \text{for } (0, S_y) \\ C_2 \alpha^2 \left(S_x - \frac{2C_2 \alpha - C_1 (1 - \alpha)^2}{2C_2 \alpha^2} \right)^2 & \text{for } (S_x, 1) \\ C_1 \alpha^2 \left(S_y - \frac{2C_1 \alpha - C_2 (1 - \alpha)^2}{2C_1 \alpha^2} \right)^2 & \text{for } (1, S_y) \end{cases} \\ &\quad + C_2 - \frac{[2C_2 \alpha - C_1 (1 - \alpha)^2]^2}{4C_2 \alpha^2} \\ &\quad + C_1 - \frac{[2C_1 \alpha - C_2 (1 - \alpha)^2]^2}{4C_1 \alpha^2} \end{aligned} \quad (11)$$

우선 식 (11)에서 보면 $f(S_x, S_y)$ 는 2차 항의 계수가 양수(positive number)인 이차 방정식 형태이므로 꼭지점을 중심으로 단조 증가(monotone increasing) 혹은 단조 감소(monotone decreasing)하는 이차 곡선이 된다. 따라서 꼭지점이 영역 밖에 존재할 경우, 단조 증가 혹은 단조 감소하므로 경계에서 최대 혹은 최소값을 가지게 되고 만약 꼭지점이 영역 범위 내에 존재한다면 2차 항의 계수가 양수이므로 이는 경계에서 최대값을 가지게 된다. 다시 말해 꼭지점의 위치에 상관없이 최대값은 경계에 존재하게 되고 결국 최대값이 존재할 수 있는 점은 $(S_x, S_y) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ 이 된다. 이 지점들에서 $f(S_x, S_y)$ 의 값은 각각 $C_1, C_2, (C_1 + C_2) \cdot (1 - \alpha)^2$ 이 되고 이 중 최대값이 $[0, 1] \times [0, 1]$ 영역의 최대값이 된다. 이를 정리하면

$$\begin{aligned} \max \{f(S_x, S_y)\} &= \begin{cases} (C_1 + C_2) \cdot (1 - \alpha)^2 & \text{for } \alpha \leq 1 - \sqrt{\frac{\max(C_1, C_2)}{C_1 + C_2}} \\ \max(C_1, C_2) & \text{for otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

우변의 최대값은 식 (12)에 의해 정해진다. 그런데 이 식은 다시 식 (9)의 좌변에 의해 1로 제한되어야 한다. 그러므로 ID-FDTD 기법의 최대 시간 증분은 다음과 같다.

$$\Delta t \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} & \text{for } \alpha \leq 1 - \sqrt{\frac{\max(\Delta x^2, \Delta y^2)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} \\ \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0} \min(\Delta x, \Delta y) & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

참고문헌 [1]에서 전제한 정방향 셀일 경우 $\Delta x = \Delta y = \Delta$ 이므로 식 (13)은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta t \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \Delta}{\sqrt{2} c_0} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} & \text{for } \alpha \leq 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0} \Delta & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

가중치, α 는 대략 0.167 근방의 값으로 계산되기 때문에^{[1][2]} 식 (14)의 첫 번째 식에 의해 최대 시간 증분이 결정된다. 따라서 ID-FDTD 기법은 standard 기법보다 큰 시간 증분에서도 안정성을 유지하게 된

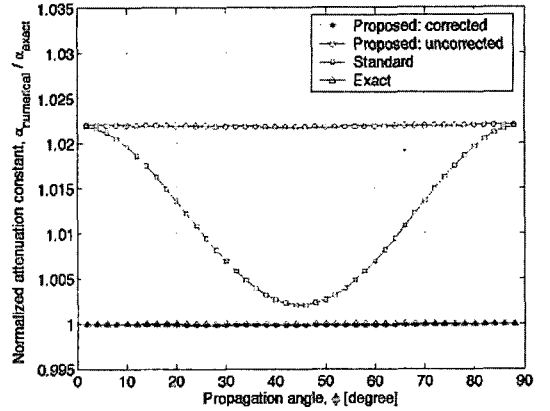
다($1/(1-\alpha) > 1$).

2-4 보정치(Scaling Factor)

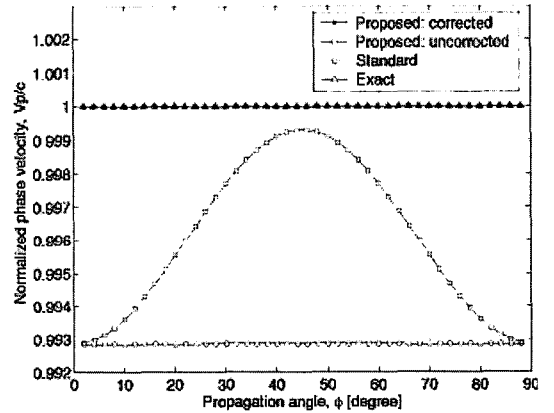
본 논문에서는 무손실 매질인 자유 공간의 가중치를 손실 매질의 경우에도 적용하였다.; 손실 매질의 경우에도 자유 공간 가중치를 사용하는 것에 대한 이유와 타당성은 2-5절에서 언급하였다. 우선 자유공간의 가중치를 손실 매질에 대한 가중치로 사용하여 ID-FDTD 기법의 분산 특성을 보았다. 이 때 매질 특성은 $\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, $\mu_r = 1.0$ 이고 셀 크기, Δ 는 자유 공간 파장인 λ_0 의 1/12(12 CPW: Cells Per Wavelength)로 가정하고 시간 증분, Δt 는 $S=0.7$ ($S = c_0 \Delta t / \Delta x$, Courant number)로 정하였다. 이러한 조건 아래 ID-FDTD 기법은 (a) 감쇠 상수와 (b) 위상 상수 또는 위상 속도, 모두 비등방성 분산 특성이 급격하게 줄어들어 거의 등방성의 분산 특성을 보였다(그림 2의 ID-FDTD: weighting sum, 그림 3의 proposed: uncorrected). 하지만 ID-FDTD 기법이 등방성의 분산 특성을 보인다고 하더라도 실제 매질의 전파 상수(exact propagation number)와는 큰 차이가 나타나는데, 이는 매질의 특성을 보정해 줌으로써 정확한 파수의 분산 특성을 얻을 수 있음을 참고문헌 [1], [2]에서 보고하였다. 따라서 참고문헌 [1], [2]의 무손실 매질에 대한 보정치 결정 과정을 손실 매질에 대해 확장, 적용하여 손실 매질에 대한 수식을 유도하였다. 우선 $\phi = 0^\circ$ 일 때의 분산 관계식을 유도하면 식 (15)와 같이 표현된다(이하 본 논문에서는 $\Delta x = \Delta y = \Delta$ 인 정방형 셀(square cell)을 가정하여 식을 유도하였다.).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \left[\sin \frac{\omega \Delta t}{2} - j \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_0 \epsilon'} \cos \frac{\omega \Delta t}{2} \right] \\ & = \frac{c_0^2}{\epsilon' \mu_r} \frac{1}{\Delta^2} \sin^2 \frac{j \tilde{\gamma} \Delta}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서 보면 $\tilde{\gamma}$ 는 α 에 상관없는 함수 관계로 셀 크기와 시간 증분이 고정되어 있을 경우 매질의 특성을 나타내는 ϵ' , σ , μ_r 에 의해 결정된다. 다시 말해 매질의 특성인 ϵ' , σ , μ_r 를 보정해 줌으로써 정확한 파수(wavenumber), $\tilde{\gamma}_{exact}$ 를 구현할 수 있음을 의미한다. 이때 $\tilde{\gamma}_{exact} = \tilde{\alpha}_{exact} + j \tilde{\beta}_{exact}$ 으로 정의된다.



(a) 수치 감쇠 상수
(a) Numerical attenuation constant



(b) 수치 위상 상수
(b) Numerical phase constant

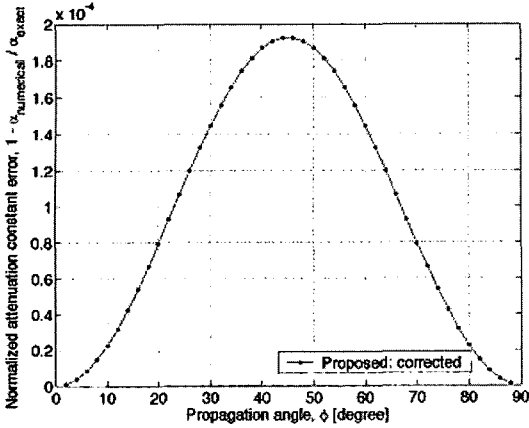
그림 3. 방향에 따른 제안한 방법의 분산 특성 ($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW, $S=0.7$)

Fig. 3. Dispersion of proposed method at propagation angles ($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW and $S=0.7$).

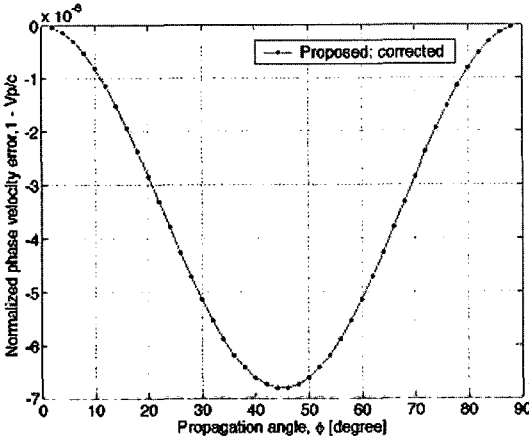
위상 속도에 대한 보정치만 제안한 참고문헌 [1], [2]와 달리 손실 매질은 감쇠 상수에 대한 보정도 고려해야 하기 때문에 도전율에 대한 보정치가 추가되어야 한다. 따라서 ϵ' 과 μ_r 에 대해서는 sc_1 , σ 에 대해서는 sc_2 를 보정치라 할 경우 식 (15)는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \left[\sin \frac{\omega \Delta t}{2} - j \frac{sc_2 \cdot \sigma \Delta t}{2\epsilon_0 sc_1 \cdot \epsilon'} \cos \frac{\omega \Delta t}{2} \right] \\ & = \frac{c_0^2}{sc_1^2 \cdot \epsilon' \mu_r} \frac{1}{\Delta^2} \sin^2 \frac{j \tilde{\gamma}_{exact} \Delta}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

으로 표현된다. 여기에서 식 (16)의 좌변은 실수부와 허



(a) 감쇠 상수 오차
(a) Normalized attenuation constant error



(b) 위상 속도 오차
(b) Normalized phase velocity error

그림 4. 전파 방향에 따른 제안한 방법의 분산 오차 ($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW, $S=0.7$)

Fig. 4. Dispersion error of proposed method at propagation angles ($\epsilon_r = 1.1 - j0.01$, 12 CPW and $S=0.7$).

수부로 구분할 수 있고 복소수 상등에 의해 sc_1 , sc_2 는 다음의 식 (17), (18)과 같이 결정된다.

$$sc_1 = \frac{S}{\sqrt{\epsilon' \mu'} \sin \frac{\omega \Delta t}{2}} \sqrt{\operatorname{Re} \left(\sin^2 \frac{j \hat{\gamma}_{exact} \Delta t}{2} \right)} \quad (17)$$

$$sc_2 = sc_1 \cdot \frac{-2 \epsilon_0 \epsilon' \tan \frac{\omega \Delta t}{2}}{\omega \Delta t} \left[\frac{\operatorname{Im} \left(\sin^2 \frac{j \hat{\gamma}_{exact} \Delta t}{2} \right)}{\operatorname{Re} \left(\sin^2 \frac{j \hat{\gamma}_{exact} \Delta t}{2} \right)} \right] \quad (18)$$

$\operatorname{Re}(\cdot)$ 와 $\operatorname{Im}(\cdot)$ 는 각각 ‘ \cdot ’의 실수부와 허수부를 의미한다. 이 식에서 $\sigma=0$ 으로 하고 전파 상수

$\hat{\gamma}_{exact} = j \beta_{exact}$ 라 한다면 식 (17)은 무손실 매질에 대한 보정치인 참고문헌 [1], [2]의 sc 로 바뀐다.

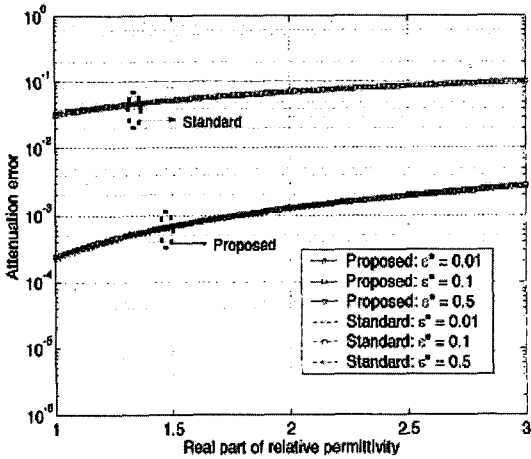
식 (17)과 (18)의 보정치를 적용하였을 경우, 손실 매질의 분산은 정확한 값을 가지면서도 등방성의 특성을 가지게 된다(그림 3의 proposed: corrected). 이때 ID-FDTD 기법의 정확한 전파 상수에 대한 분산 오차는 그림 4의 그래프처럼 계산된다. 그림에서 보듯이 ID-FDTD 기법의 경우, 감쇠 상수와 위상 속도의 비등방성 분산 특성이 눈에 띄게 감소하여 정확한 파수에 대해, 감쇠 상수는 2×10^{-4} 정도, 위상 속도는 7×10^{-6} 정도의 최대 상대 오차가 발생하여 거의 등방성의 특성을 보였다.

2-5 가중치(Weighting Factor)

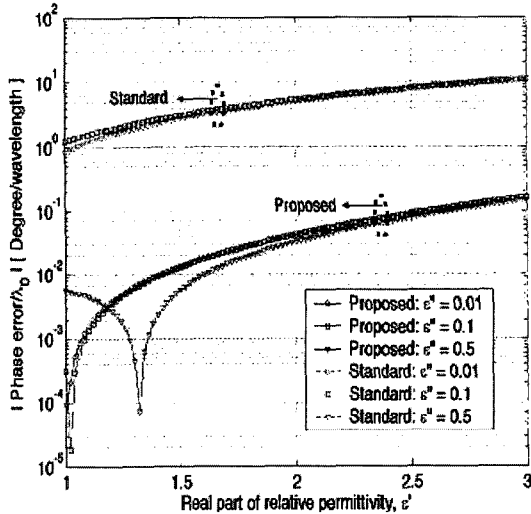
2차원 공간에 대한 ID-FDTD 기법의 분산 관계식은 무손실 매질의 경우, 식 (8)과 같이 가중치 α 에 대한 실계수(real coefficient) 이차 방정식 형태로 표현된다. 따라서 근의 공식을 사용하여 α 에 대한 정확한 해를 구할 수 있었다^{[1],[2]}. 하지만 손실 매질의 경우, 분산 관계는 식 (7)처럼 α 에 대한 복소 계수(complex coefficient) 이차 방정식으로 표현되므로 실수 α 에 대해 두 개의 식이 존재하는 과결정 방정식(over-determined equation)이 유도되고 결국 α 에 대한 해를 결정할 수 없게 된다. 이에 본 논문에서는 자유 공간의 가중치를 손실 매질에 대해서도 적용하는 방법을 사용하였다. 물론 이는 최적화된 가중치가 아니지만 분산 오차가 standard 기법에 비해 많이 감소하는 것을 그림 5를 통해 확인할 수 있었다. 그림 5는 2-4절에서 설명하는 보정치(scaling factor)를 적용하여 보정된 매질의 분산 관계식에 대한 최대 오차를 표시한 것이다. 그림에서 보듯이 감쇠 상수와 위상 속도에 대한 오차는 손실이 커진다 하더라도 standard 기법보다 작아 상대적으로 등방성을 유지하는 것을 확인할 수 있다. 그림 5에서 감쇠 오차는 $\max(|1 - \hat{\alpha} / \hat{\alpha}_{exact}|)$ 로 정의하였고, 위상 오차는 참고문헌 [9]와 같이 $\max(|1 - \hat{\beta} / \beta_{exact}|) \times 360^\circ$ 로 정의된다. $\max(\cdot)$ 는 ‘ \cdot ’의 최대값을 의미한다.

III. 모의 실험 결과

손실 매질에 대한 2차원 등방 시간 영역 유한 차분법



(a) 감쇠 오차
(a) Attenuation error



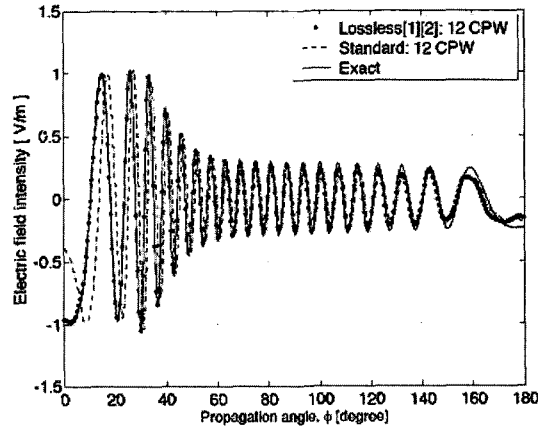
(b) 파장 대비 위상 오차
(b) Phase error per wavelength

그림 5. 자유 공간의 가중치를 적용할 때 매질에 따른 분산 오차(12 CPW, $S=0.7$)

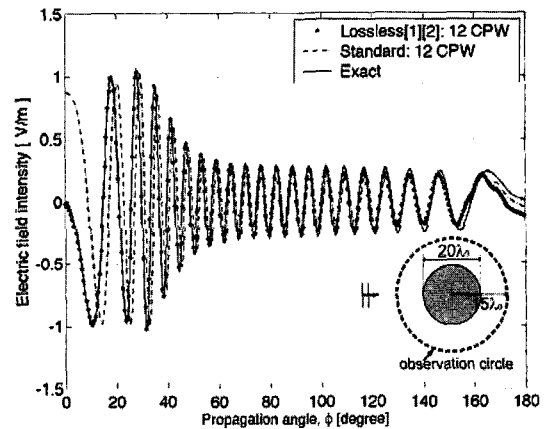
Fig. 5. Dispersion error of different medium with weighting factor of freespace(12 CPW and $S=0.7$).

제안한 ID-FDTD 기법의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 경우를 다루었다. 첫 번째는 자유 공간 상에 놓인, 반지름 $10\lambda_0$ 의 원형 유전체 기둥에 평면파가 입사할 경우 기둥으로부터 산란되는 전기장을 계산하는 문제이다(유전체를 모델링할 때 실제 유전체와 기하학적 오차를 최소화 하기 위해 큰 반지름의 원형 기둥을 고려하였다). 유전체의 매질은

$\epsilon_r = 4.0 - j0.2$, $\mu_r = 1.0$ 이고 입사파는 주파수 300 MHz에 E_z 성분의 x 축으로 진행하는 평면파를 가정하였다. 계산 조건은 셀 크기가 $\lambda_0/12$, $S=0.7$ 로 하였다. 산란된 전기장은, 원기둥의 중심으로부터 $15\lambda_0$ 의 원을 따라 관측하였고 그 결과는 그림 6과 같다. 그림은 제안한 방법이 같은 셀 크기의 standard 기법에 비해 정확한 해를 계산함을 보이고 있다. 이는 제안한 ID-FDTD 기법에 의해 분산 오차가 확연하게 감소하게 되고, 이로 인해 정확한 전기



(a) 실수부
(a) Real part



(b) 허수부
(b) Imaginary part

그림 6. 원형 유전체 기둥으로부터 산란되는 전기장 ($\epsilon_r = 4.0 - j0.2$, 300 MHz, 12 CPW, $S=0.7$)

Fig. 6. Electric field scattered from a dielectric circular cylinder($\epsilon_r = 4.0 - j0.2$, 300 MHz, 12 CPW, $S=0.7$).

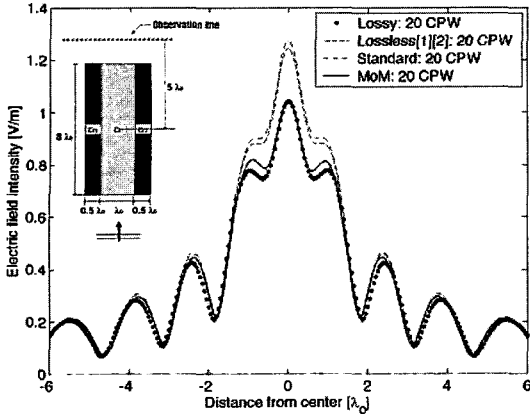


그림 7. 샌드위치 모양의 유전체 사각 기둥으로부터 산란되는 전기장의 크기($\epsilon_{r1}=2.0-j0.01$, $\epsilon_{r2}=2.0-j0.1$, 300 MHz, 20 CPW, $S=0.7$)

Fig. 7. Magnitude of electric field scattered from a dielectric sandwich-shape rectangular cylinder ($\epsilon_{r1}=2.0-j0.01$, $\epsilon_{r2}=2.0-j0.1$, 300 MHz, 20 CPW, $S=0.7$).

장의 위상과 크기를 계산하기 때문이다. 비교를 위한, 원기둥으로부터 산란되는 전기장의 정확한 해는 고유 급수(eigen-series) 방법을 이용해 구하였다^[10].

두 번째 계산은 비등질성 문제에 대해 검증하기 위해 고려되었다. 자유 공간에 놓여 있는 샌드위치 모양의 사각 기둥에 평면파가 입사하였을 때 산란되는 전기장을 계산하였다. 이 때 사각기둥은 그림 7 처럼 $2\lambda_0 \times 8\lambda_0$ 의 직사각형이고 전부 세 개의 층으로 이뤄진 유전체이다. 양 옆의 외곽층은 두께가 각각 $0.5\lambda_0$ 에 상대 유전율이 $\epsilon_{r2}=2.0-j0.1$ 이고, 중간층은 두께가 λ_0 에 상대 유전율이 $\epsilon_{r1}=2.0-j0.01$ 이다. 매질의 상대 투자율은 1.0이다. 계산 조건은 셀 크기가 20 CPW인 것만 제외하고는 첫 번째 경우와 동일하다. 두 기법의 계산 결과는, 사각 기둥의 중심을 원점으로 하였을 경우, 확연히 구분되는 전방 산란(forward scattering) 영역인 ($5\lambda_0, -6\lambda_0 \sim -6\lambda_0$)의 직선을 따라 비교해 보았다. 이 경우 사각 기둥에 대한 정확한 해를 구할 수 없기 때문에 펄스 기반 기저 함수(pulse-based basis function)를 이용한 MoM 기법의 계산값과 비교하였다. 그 결과, 그림 7의 그래프를 통해 ID-FDTD 기법이 standard 기법에 비해 분산 오차가 적어서 MoM과 유사한 결

과값을 가지는 것을 확인할 수 있었다.

IV. 결 론

본 논문은 참고문헌 [1], [2]에서 제안한 FDTD 방법을 손실 매질에 적용할 수 있도록 수정, 확장하였다. 다시 말해 무손실 매질과 선형 손실 매질 둘다에 적용 가능하도록 ID-FDTD 기법의 내용을 정리하여 일반화하였다. 이를 위해 손실 매질에 대한 ID-FDTD 기법의 분산 관계를 구하였고, 이에 대한 보정치를 제시하였는데 분산 관계는 복소 파수를 가정한 Z-변환을 통해 유도하였고, 보정치는 이 분산 관계식을 이용하여 수식으로 표현하였다. 이 분산 관계와 보정치는 손실 매질의 도전율을 0으로 할 경우 ($\sigma=0$), 무손실 매질인 경우와 일치하여 참고문헌 [1], [2]의 내용을 포함하게 된다.

참 고 문 헌

- [1] I. Koh, H. Kim, J. Lee, J. Yook, and C. Pil, "Novel explicit 2-D FDTD scheme with isotropic dispersion and enhanced stability", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 11, pp. 3505-3510, Nov. 2006.
- [2] 고일석, 김 현, 육종관, "등방성 분산 특성과 개선된 시간 증분을 가지는 2차원 시간 영역 유한 차분법", *한국전자파학회논문지*, 17(2), pp. 165-170, 2006년 2월.
- [3] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, pp. 302-307, May 1966.
- [4] A. Taflove, S. Hagness, *Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method*, Norwood, 2nd Edition, MA: Artech House, 1995.
- [5] H. Kim, I. Koh, and J. Yook, "2-D FDTD scheme with exact attenuation and phase velocity for lossy media", *2006 IEEE Int'l Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI*, pp. 3825-3828.
- [6] 김 현, 고일석, 육종관, "손실 매질에 대해 정확한 전파상수를 가지는 비등방성 분산특성의 2-D 시

간 영역 유한 차분법", *춘계 마이크로파 및 전파 전파 학술대회논문집*, 29(1), pp. 527-530, 2006년 5월.

- [7] J. B. Cole, "A high-accuracy realization of the Yee algorithm using non-standard finite differences", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Technology*, vol. 45, pp. 991-996, Jun. 1997.
- [8] E. A. Forgy, W. C. Chew, "A time-domain method with isotropic dispersion and increased stability on an overlapped lattice", *IEEE Trans. on Antennas*

and Propagation, vol. 50, pp. 983-996, Jul. 2002.

- [9] K. L. Shlager, J. B. Schneider, "Comparison of the dispersion properties of several low-dispersion finite-difference time-domain algorithm", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 3, pp. 642-653, Mar. 2003.
- [10] N. Morita, N. Kumagai, and J. R. Mautz, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, Boston, Artech House, 1990.

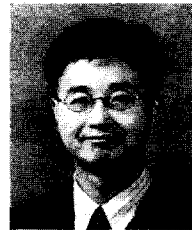
고 일 석



1992년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)
 1994년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)
 1994년 1월~1996년 4월: LG 전자 연구원
 2002년 8월: The University of Michigan at Ann Arbor 전기 및 전산과 (공학박사)

2004년 5월~2004년 2월: Research Fellow at University of Michigan at Ann Arbor
 2004년 3월~현재: 인하대학교 정보통신대학원 교수
 [주 관심분야] Theoretical Electromagnetic, Numerical Analysis, Channel Modeling

육 중 관



1998년: University of Michigan 전기 컴퓨터공학과 (공학박사)
 2000년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학부 부교수
 [주 관심분야] 마이크로파 구조/시스템 해석 및 설계, EMI/EMC, Antenna, Computational Electromagnetics, RFIC/MMIC 설계

김 현



2002년 8월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학사)
 2005년 2월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학석사)
 2005년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 박사과정
 [주 관심분야] 마이크로파 수치해석

석