응용통계연구 제 **20**권 2호, 2007년, pp. 333–343

보조재생함수에 대한 근사*

배종호[1)] 김성곤[2)]

요 약

고객의 도착간격시간과 서비스시간 중 어느 하나가 지수분포가 아닌 큐를 분석할 때 중요하게 등장하는 함수가 보조재생함수(auxiliary renewal function)이다. 재생함수와 마찬가지로 보조재생함수도 이론적으로는 정의할 수 있으나 함수값을 실제로 계산하기에는 어려움이 많아 근사값을 구하는 연구가 필요하다. 본 논문에서는 보조재생함수의 값을 근사적으로 계산하는 두 가지 방법을 보여주고 부분적으로 알려져 있는 보조재생함수의 참값과의 비교를 통하여 두 방법을 서로 비교한다.

주요용어: 보조재생함수, 근사, 큐, 대기시간.

1. 서론

어떤 분포함수 $F(\cdot)$가 있을 때, F에 관한 재생함수(renewal function) $m(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

여기서 F^{*n}은 F의 n차 Stiletjes 중합(n-fold Stieltjes convolution)이다. 그리고 함수 F가 $\lim_{x\to\infty} F(x) = c \neq 1$인 것 외에 분포함수의 모든 성질을 갖는 함수일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x)$를 F에관한 보조재생함수(auxiliary renewal function)라 부른다.

확률모형으로서 큐(queue)를 연구하는데 있어서 보조재생함수는 매우 중요한 역할을 한다. 가령, 참을성 없는 고객이 있는 M/G/1 큐 모형을 생각해 보자. 이 모형에서 고객의 도착율은 ν, 고객 서비스시간의 분포는 $G(\cdot)$, 그 평균은 m, 그리고 교통밀도는 $\rho = \nu m$이라고 하자. 고객들은 k만큼의 시간을 기다려도 서비스가 시작되지 않으면 시스템을 중도에 떠난다. G의 평형분포함수를 G_e라고 하면 이때 고객의 가상대기시간(virtual waiting time)의 극한분포함수 F는 ρG_e에 관한 보조재생함수에 관한 식으로 표현된다. 그 결과는 다음과 같다.

$$F(z) = \frac{H(z)}{1 + \rho H(k)}, \quad 0 \leq z \leq k,$$

* 이 논문은 2005년도 충남대학교 학술연구비의 지원에 의하여 연구되었음.
1) (305-764) 대전시 유성구 궁동 200, 충남대학교 정보통계학과, 조교수
E-mail: bae-jongho@cnu.ac.kr
2) (660-701) 경상남도 진주시 가좌동 900, 경상대학교 정보통계학과, 조교수
E-mail: sgkim@gnu.ac.kr

$$F(k+y) = \frac{H(k) + \nu\int_0^y \int_{0-}^k (1 - G(s+k-u))\, dH(u) ds}{1 + \rho H(k)}, \quad y > 0.$$

여기서 $H(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n G_e^{*n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G_e^{*n}(t)$로 정의되며 G_e^{*0}는 Heaviside 함수이다. 결국 $H(x)$는 ρG_e에 관한 보조재생함수에 1을 더한 값이며, 고객의 가상대기시간의 극한분포함수는 ρG_e에 관한 보조재생함수의 식으로 표현된다. 또 서버의 바쁜기간의 기대값은 $mH(k)$와 같다는 것도 밝혀졌다(Bae 등, 2001). 그뿐 아니라, M/G/1 유한댐 모형이나 P_λ^M-서비스 정책이 적용되는 큐에서도 여러 중요한 성능척도들이 $H(\cdot)$으로 표현된다(Bae, 2003; Bae 등, 2002; Kim 등, 2006).

이와 같이 M/G/1 큐, M/G/1 댐 모형, 또는 어떠한 형태로든 용량에 제한이 있거나 서비스 정책에 변화가 있는 큐 모형을 분석할 때는 보조재생함수 또는 위에서 정의한 $H(\cdot)$ 함수가 매우 중요하게 사용된다. 하지만 $H(\cdot)$ 함수는 이론적으로는 정의할 수 있으나 실제 계산은 거의 불가능한 식이기 때문에 그 함수의 근사적인 계산법이 절실히 필요하다. 그런데 많은 큐의 여러 성능척도들이 $H(\cdot)$ 함수로 표현됨에도 불구하고 $H(\cdot)$ 함수에 관한 직접적인 근사법은 연구되어 있지 않다.

큐 모형 분석에 있어서 계산적 접근을 중요하게 여긴 대표적인 사람이 Tijms이다. Tijms(1986)는 큐 모형-주로 마르코비안 큐-의 수학적 결과들을 어떻게 계산할 것인지에 관하여 방대한 연구를 이루었다. 그 중에서 M/G/1 큐에서 고객대기시간의 분포함수를 근사한 방법이 있는데 고객대기시간의 분포함수는 $H(\cdot)$ 함수와 밀접한 관계가 있다. 따라서 이 관계를 이용하면 우선 손쉽게 $H(\cdot)$ 함수의 근사를 얻을 수 있다.

이 논문의 2절에서는 Tijms(1986)의 고객대기시간 분포함수의 근사를 이용하여 $H(\cdot)$ 함수의 근사를 간단히 보여줄 것이다. 그리고 3절에서는 $H(\cdot)$ 함수의 독특한 성질을 이용하여 먼저 $H(x)$의 도함수 $H'(x)$를 근사시킨 후 그 근사함수의 부정적분을 구하여 $H(\cdot)$ 함수를 근사할 것이다. 그 후에 4절에서는 $H(\cdot)$ 함수의 상기한 두 가지 근사함수의 값을 특별한 경우에 알려진 $H(\cdot)$ 함수의 참값과 비교한 후에 새롭게 제시된 두 번째 근사법의 사용가치를 언급할 것이다.

이 논문에서 $H(\cdot)$ 함수를 근사하는 이유는 큐의 분석에서 얻어지는 수학적 결과를 실제로 계산하기 위함이다. 우리는 M/G/1 큐를 염두해 둘 것인데, 그 큐에서 단위시간 동안 도착하는 평균 고객수, 즉 고객의 도착간격시간의 평균의 역수를 $\nu > 0$라 정의하자. 그리고 고객의 서비스시간을 S라 하고 그 분포함수를 $G(\cdot)$로 두자. 고객의 서비스시간은 연속형 확률변수이든 이산형 확률변수이든 아니면 혼합형이든 상관없다. 그리고 서비스시간의 평균을 m으로 표기하자. 다시 말해, $m = \int_0^\infty (1 - G(s))\, ds$이다. 또, $G(\cdot)$의 평형분포함수 $G_e(\cdot)$는 $G_e(x) = (1/m)\int_0^x (1 - G(s))\, ds$이 된다. 큐의 교통밀도 ρ는 흔히 $\rho = \nu m$으로 정의하는데 큐의 안정성(stability)을 위하여 $\rho < 1$이라고 가정하자. 그리고 $H(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n G_e^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G_e^{*n}(x).$$

참고로 $H(0-) = 0$이지만 $H(0) = 1$이고 $x > 0$인 범위에서 미분가능하다는 것이 밝혀져 있으며 $\lim_{x\to\infty} H(x) = 1/(1-\rho)$이다(Bae 등, 2001).

2. $H(x)$ 함수에 대한 첫 번째 근사함수

정상상태에 있는 M/G/1 큐에서 고객의 대기시간을 W라고 할 때, Tijms(1986)는 $q(x) = \Pr(W > x)$를 근사적으로 계산하는 방법을 소개하였다. 간단히 요약하자면 다음과 같다. 먼저 $q(x)$는 다음의 적분방정식을 만족함을 보일 수 있다.

$$q(x) = \rho(1 - G_e(x)) + \int_0^x q(x-y)\, d_y \{\rho G_e(y)\}, \quad x > 0. \tag{2.1}$$

그리고 G가 몇 가지 특별한 분포함수일 때 $q(x)$는 두 지수함수의 합으로 표현됨을 보일 수 있는데 이 점에 착안하여 $q(x)$의 근사함수 $q_{app}(x)$를 아래와 같이 둔다.

$$q_{app}(x) = \eta e^{-\xi x} + \gamma e^{-\delta x}, \quad x > 0.\ (\xi > \delta).$$

그리고나서 식 (2.1)을 이용하여 η, ξ, γ, δ를 찾을 수 있다. 먼저 δ는

$$\int_0^\infty e^{\delta y}\, d_y \{\rho G_e(y)\} = 1$$

을 만족하는 양수 해이고

$$\mu^* = \int_0^\infty x e^{\delta x} \nu(1 - G(x))\, dx, \quad \gamma = \frac{1-\rho}{\mu^* \delta}$$

이며

$$\eta = \rho - \gamma, \quad \xi = \eta \left(\frac{\nu E(S^2)}{2(1-\rho)} - \frac{\gamma}{\delta} \right)^{-1}$$

이다.

한편, 식 (2.1)의 해는

$$q(x) = (H * \rho(1 - G_e))(x)$$

임이 밝혀져 있다(Asmussen, 1987, p. 113). 여기서 $*$는 Stieltjes 중합을 의미한다. 더 나아가 우리는 다음의 등식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
(H * (\rho(1 - G_e))(x) &= \rho H(x) - \rho(H * G_e)(x) \\
&= \rho H(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1} G_e^{*(n+1)}(x) \\
&= \rho H(x) - (H(x) - 1) \\
&= 1 - (1 - \rho) H(x).
\end{aligned}$$

따라서 $H(x)$의 첫 번째 근사 함수 $H_{app1}(x)$를 다음과 같이 얻는다.

$$H_{app1}(x) = \frac{1 - q_{app}(x)}{1 - \rho}.$$

3. $H(x)$ 함수에 대한 두 번째 근사함수

먼저 다음과 같은 적분방정식을 고려하자.

$$f(x) = \nu(1 - G(x)) + \int_0^x f(x-y)\, d_y\{\rho G_e(y)\}, \quad x > 0. \tag{3.1}$$

그러면 이 방정식의 해는 다음과 같다.

$$f(x) = H * (\nu(1-G))(x).$$

이 해를 다시 풀면,

$$\begin{aligned} f(x) &= H * (\nu(1-G))(x) \\ &= \nu H(x) - \nu(H * G)(x) \\ &= \nu H(x) - \nu \int_{0-}^x G(x-u)\, dH(u) \\ &= \nu H(x) + \nu \int_{0-}^x (1 - G(x-u))\, dH(u) - \nu \int_{0-}^x dH(u) \\ &= \nu m \int_{0-}^x G_e'(x-u)\, dH(u) \end{aligned}$$

인데 $G_e(0) = 0$이므로 위의 식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \rho \frac{d}{dx} \int_{0-}^x G_e(x-u)\, dH(u) \\ &= \rho \frac{d}{dx}(H * G_e)(x) \\ &= \frac{d}{dx}(H(x) - 1) \\ &= H'(x). \end{aligned}$$

따라서 적분방정식 (3.1)의 해에 대한 근사함수를 구하는 것이 곧 $H'(x)$에 대한 근사함수를 구하는 것이다. 그리고 이 과정은 Tijms(1986)에서 $q(x)$를 근사하는데 사용했던 방법과 유사하다.

우선,

$$\int_0^\infty d_y\{\rho G_e(y)\} = \rho < 1$$

이므로

$$\int_0^\infty e^{\delta y}\, d_y\{\rho G_e(y)\} = 1$$

을 만족하는 양수 δ가 있을 것이다. 그리고 식 (3.1)의 양변에 $e^{\delta x}$를 곱하면 다음과 같은 재생방정식을 얻는다.

$$f^*(x) = e^{\delta x}\nu(1 - G(x)) + \int_0^x f^*(x-y) e^{\delta y} \nu(1 - G(y))\, dy,$$

여기서 $f^*(x) = e^{\delta x} f(x)$이다. 그런데 재생방정식에 관한 Key Renewal Theorem에 의하여 우리는 아래의 결과를 얻는다.

$$\lim_{x \to \infty} f^*(x) = \frac{1}{\mu^*}.$$

이 때 $\mu^* = \int_0^\infty x e^{\delta x} \nu(1 - G(x))\, dx$이다. 그러므로 $f(x)$는 x가 큰 값일 때 $\frac{1}{\mu^*} e^{-\delta x}$와 근사함을 알 수 있다.

x가 작은 값일 때도 근사하기 위하여 $f(x)$의 근사함수 $f_{app}(x)$를 다음과 같이 둔다.

$$f_{app}(x) = \alpha e^{-\xi' x} + \frac{1}{\mu^*} e^{-\delta x}, \quad \xi' > \delta.$$

여기서 α와 ξ'를 찾기 위하여 식 (3.1)로부터 다음의 두 가지 사실을 관찰한다.

(i) $f(0) = \nu$.

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)\, dx &= \int_0^\infty \nu(1 - G(x))\, dx + \int_0^\infty \int_0^x f(x - y)\, d_y \{\rho G_e(y)\}\, dx \\ &= \nu m + \int_0^\infty \int_y^\infty f(x - y)\, dx\, d_y \{\rho G_e(y)\} \\ &= \rho + \rho \int_0^\infty f(x)\, dx. \end{aligned}$$

이제 (i)에 근거하여 $f_{app}(0)$와 $f(0)$를 같게 두면

$$f_{app}(0) = \alpha + \frac{1}{\mu^*} = f(0) = \nu$$

를 얻고, 또 (ii)에 근거하여 $\int_0^\infty f_{app}(x)\, dx$와 $\int_0^\infty f(x)\, dx$를 같게 두면

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \frac{\rho}{1 - \rho} = \int_0^\infty f_{app}(x)\, dx = \frac{\alpha}{\xi'} + \frac{1}{\mu^* \delta}$$

을 얻는다. 그러면 우리는 다음과 같이 α와 ξ'을 정할 수 있다.

$$\alpha = \nu - \frac{1}{\mu^*}, \quad \xi' = \alpha \left(\frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{1}{\mu^* \delta} \right)^{-1}.$$

$f_{app}(x)$는 $f(x) = H'(x)$에 관한 근사함수이므로 $f_{app}(x)$의 부정적분함수를 $H(x)$의 근사함수로 정하면 다음과 같이 $H(x)$의 두 번째 근사함수 $H_{app2}(x)$를 유도할 수 있다.

$$H_{app2}(x) = \int_0^x f_{app}(u)\, du + H(0) = \int_0^x f_{app}(u)\, du + 1.$$

4. $H(x)$에 관한 두 가지 근사함수의 비교

앞의 두 절에서 유도한 두 개의 근사함수를 정리하면 아래와 같다.

$$H_{app1}(x) = \frac{1}{1-\rho} - \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\mu^*\delta}\right) e^{-\xi x} - \frac{1}{\mu^*\delta} e^{-\delta x},$$

$$H_{app2}(x) = \frac{1}{1-\rho} - \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\mu^*\delta}\right) e^{-\xi' x} - \frac{1}{\mu^*\delta} e^{-\delta x}.$$

여기서 δ는

$$\int_0^\infty e^{\delta y}\, d_y \left\{\rho G_e(y)\right\} = 1$$

을 만족하는 양수 해이고

$$\mu^* = \int_0^\infty x e^{\delta x} \nu (1 - G(x))\, dx$$

이며

$$\xi = \left(\rho - \frac{1-\rho}{\mu^*\delta}\right) \Big/ \left(\frac{\nu E(S^2)}{2(1-\rho)} - \frac{1-\rho}{\mu^*\delta^2}\right), \quad \xi' = \left(\nu - \frac{1}{\mu^*}\right) \Big/ \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\mu^*\delta}\right)$$

이다.

다행스럽게도 G가 소위 K_2분포라고 불리는 지수분포, Erlang(2)분포, 초지수분포에 대해서는 $q(x)$의 정확한 함수표현식이 밝혀져 있다. 다시 말해, $H(x)$의 정확한 함수 표현식이 있다(Bae 등, 2002; Tijms, 1986). 그리고 일반적인 Erlang(k)분포에 대해서는 비록 무한급수로 표현되어 있지만 $H(x)$의 값을 계산하기 위한 알고리즘이 구해져 있다(Tijms, 1986). 그래서 그러한 분포 하에서의 참값과 우리가 유도한 두 가지 근사함수의 값을 비교해 본다.

4.1. 서비스시간이 지수분포인 경우

고객의 서비스시간의 분포함수 G를 다음과 같이 두자.

$$G(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad \mu > \nu.$$

이 때는

$$H(x) = \frac{1}{1-\rho} - \frac{\rho}{1-\rho} e^{-\mu(1-\rho)x}$$

임이 알려져 있다(Bae 등, 2001). 그런데, $\delta = \mu - \nu$, $\mu^* = 1/\nu$이므로 $\xi = \xi' = 0$이다. 따라서

$$H_{app1}(x) = H_{app2}(x) = H(x)$$

임을 알 수 있다. 다시 말해, 고객의 서비스시간이 지수분포인 경우에는 $H(x)$에 관한 두 가지 근사함수가 ρ에 상관없이 모두 $H(x)$와 정확히 일치한다.

4.2. 서비스시간이 Erlang(2) 분포인 경우

고객의 서비스시간 S가 형상모수가 2인 감마분포를 따른다고 하자. 시간의 단위를 바꾸면 일반성을 잃지 않고 $m = 1$이라고 가정할 수 있다. 즉, $S \sim \text{Gamma}(2, 1/2)$, $E(S) = 1$이고 $c^2 = \text{Var}(S)/\{E(S)\}^2 = 1/2$이다. 이때 몇 개의 ρ와 여러 x에 따라 $H_{app1}(x)$와 $H_{app2}(x)$를 $H(x)$와 비교한 것이 표 4.1에 있다. 표에서 보여주는 모든 경우에 대하여 10^{-4} 자리수까지는 $H_{app1}(x)$와 $H_{app2}(x)$가 $H(x)$와 동일하다.

표 4.1: $S \sim$ Erlang(2)

$\nu = \rho$	x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.5	3.0
	$H(x)$	1.0201	1.0942	1.1607	1.2006	1.2356	1.2423
0.2	$H_{app1}(x)$	1.0201	1.0942	1.1607	1.2006	1.2356	1.2423
	$H_{app2}(x)$	1.0201	1.0942	1.1607	1.2006	1.2356	1.2423
	$H(x)$	1.0510	1.2543	1.4677	1.6255	1.8169	1.8721
0.5	$H_{app1}(x)$	1.0510	1.2543	1.4677	1.6255	1.8169	1.8721
	$H_{app2}(x)$	1.0510	1.2543	1.4677	1.6255	1.8169	1.8721
	$H(x)$	1.0828	1.4401	1.8785	2.2735	2.9246	3.1897
0.8	$H_{app1}(x)$	1.0828	1.4401	1.8785	2.2735	2.9246	3.1897
	$H_{app2}(x)$	1.0828	1.4401	1.8785	2.2735	2.9246	3.1897

표 4.2: $S \sim$ 초지수분포

$\nu = \rho$	x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.5	3.0
	$H(x)$	1.0190	1.0792	1.1291	1.1620	1.2006	1.2122
0.2	$H_{app1}(x)$	1.0190	1.0792	1.1291	1.1620	1.2006	1.2122
	$H_{app2}(x)$	1.0190	1.0792	1.1291	1.1620	1.2006	1.2122
	$H(x)$	1.0483	1.2122	1.3674	1.4849	1.6490	1.7079
0.5	$H_{app1}(x)$	1.0483	1.2122	1.3674	1.4849	1.6490	1.7079
	$H_{app2}(x)$	1.0483	1.2122	1.3674	1.4849	1.6490	1.7079
	$H(x)$	1.0784	1.3647	1.6739	1.9433	2.3986	2.5951
0.8	$H_{app1}(x)$	1.0784	1.3647	1.6739	1.9433	2.3986	2.5951
	$H_{app2}(x)$	1.0784	1.3647	1.6739	1.9433	2.3986	2.5951

표 4.3: $S \sim$ Erlang(3)

$\nu = \rho$	x	0.10	0.25	0.50	0.75	1.00
0.2	$H(x)$	1.0201	1.0508	1.0989	1.1398	1.1718
	$H_{app1}(x)$	1.0177	1.0482	1.0985	1.1406	1.1727
	$H_{app2}(x)$	1.0209	1.0532	1.1032	1.1439	1.1748
0.5	$H(x)$	1.0512	1.1316	1.2672	1.3934	1.5032
	$H_{app1}(x)$	1.0471	1.1278	1.2669	1.3947	1.5047
	$H_{app2}(x)$	1.0524	1.1360	1.2743	1.3997	1.5077
0.8	$H(x)$	1.0830	1.2190	1.4630	1.7115	1.9515
	$H_{app1}(x)$	1.0782	1.2145	1.4629	1.7133	1.9534
	$H_{app2}(x)$	1.0848	1.2245	1.4717	1.7192	1.9569

4.3. 서비스시간이 초지수분포인 경우

고객의 서비스시간이 평균이 1이고 $c^2 = 3/2$인 균형평균 초지수분포를 따른다고 가정하자. 즉,

$$G(x) = p_1\left(1 - e^{-\mu_1 x}\right) + p_2\left(1 - e^{-\mu_2 x}\right)$$

이고

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad p_1 = \frac{\mu_1}{2}, \quad \mu_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad p_2 = \frac{\mu_2}{2}$$

이다. 이 경우에 $H(x)$의 참값과 근사값을 비교한 것이 표 4.2에 있다. 서비스시간이 Erlang(2)인 경우와 동일한 결과를 보인다. x가 3보다 더 클 때는 고려하지 않았다. 왜냐하면, x가 클 때는 $H(x)$가 $1/(1-\rho) - e^{-\delta x}/(\mu^*\delta)$와 같이 행동하며 $H_{app1}(x)$와 $H_{app2}(x)$ 둘 다 그렇게 행동하도록 디자인되어 있기 때문이다.

4.4. 서비스시간이 Erlang(3) 분포인 경우

고객의 서비스시간 S가 형상모수가 3이고 평균이 1인 감마분포를 따른다고 하자. $S \sim$ Gamma$(3, 1/3)$, $E(S) = 1$이고 $c^2 = 1/3$인 경우이다. Erlang(2)와는 달리 $H_{app1}(x)$와 $H_{app2}(x)$가 다소 차이가 있기에 x의 범위를 1이하로 한정하되 좀 더 세분해서 비교하였다. 표 4.3를 참조하라.

4.5. 서비스시간이 Erlang(10) 분포인 경우

$S \sim$ Gamma$(10, 1/10)$, $E(S) = 1$이고 $c^2 = 1/10$ 이라고 가정하자. 이때는 $H(x)$를 특정한 식으로 표현할 수 없다. 대신 Tijms(1986)는 $H(x)$를 무한급수의 식으로 표현할 수 있는 알고리즘을 찾았다. Tijms(1986)가 제안한 알고리즘으로 계산한 값과 우리가 제시한 두 가지 근사값을 비교하면 표 4.4와 같다.

표 4.4: $S \sim$ Erlang(10)

$\nu=\rho$	x	0.10	0.25	0.50	0.75	1.00
0.2	$H(x)$	1.0203	1.0513	1.1048	1.1556	1.1946
	$H_{app1}(x)$	1.0050	1.0397	1.1094	1.1633	1.1983
	$H_{app2}(x)$	1.0233	1.0637	1.1259	1.1719	1.2023
0.5	$H(x)$	1.0512	1.1332	1.2828	1.4384	1.5746
	$H_{app1}(x)$	1.0277	1.1151	1.2914	1.4510	1.5796
	$H_{app2}(x)$	1.0560	1.1532	1.3188	1.4659	1.5869
0.8	$H(x)$	1.0835	1.2215	1.4900	1.7935	2.0940
	$H_{app1}(x)$	1.0549	1.1994	1.5011	1.8095	2.0994
	$H_{app2}(x)$	1.0889	1.2459	1.5356	1.8291	2.1094

4.6. 두 근사함수의 비교 및 정리

우선 첫 번째 근사함수의 정확도는 Tijms(1986)가 제안한 $q_{app}(x)$의 정확도와 동일하다. Tijms(1986)는 $q_{app}(x)$의 정확도가 대체로 만족스럽지만 고객 서비스시간의 분포의 c^2가 1보다 많이 작고 x가 작은 경우에 만족스럽지 않음을 언급하였다. 실제로 c^2가 0에 가깝고 x가 0.25이하인 경우에는 $H_{app1}(x)$가 $H(x)$와 많은 차이가 있음을 표들을 통하여 알 수 있다. 하지만 c^2가 1/2 이상인 경우에는 $H_{app1}(x)$가 $H(x)$를 매우 잘 근사함을 확인할 수 있다.

$H_{app2}(x)$도 c^2가 1/2 이상인 경우에 $H(x)$와 거의 일치하는 값을 계산해 준다. 사실 오차를 10^{-9} 단위까지 계산하면 $H_{app2}(x)$가 $H_{app1}(x)$보다 더 정확하다. 한편 c^2가 1/2보다 작은 경우에는 흥미로운 사실을 발견할 수 있다. 이때는 x의 값에 따라 $H_{app1}(x)$와 $H_{app2}(x)$의 정확도가 서로 차이를 보인다. x가 0.5 이상이고 1 이하일 때는 $H_{app2}(x)$의 정확도가 $H_{app1}(x)$의 정확도보다 떨어진다. 하지만, x가 작은 값-대략 0.25이하-일 때는 $H_{app2}(x)$가 $H_{app1}(x)$보다 훨씬 좋은 근사를 보여주고 있다. 물론 x가 클 때는 $H_{app1}(x)$나 $H_{app2}(x)$가 비슷한 값을 갖는다.

그러므로, $H_{app1}(x)$과 $H_{app2}(x)$는 모두 x가 큰 값일 때는 서로 비슷한 값을 가지며 $H(x)$에 대하여 좋은 근사값을 갖는다. 문제는 x가 작은 값일 때인데, $H_{app2}(x)$는 c^2가 1/2 이상이면 $H_{app1}(x)$와 마찬가지로 훌륭하게 근사하고, c^2가 1/2보다 작으면 $0.5 \le x \le 1.0$일 때 $H_{app1}(x)$보다 덜 좋은 근사를 보이며 $0 \le x \le 0.25$일 때 $H_{app1}(x)$보다 더 좋은 근사를 보여준다.

5. 결론 및 향후 연구방향

M/G/1 큐 및 M/G/1 큐의 변종모형들을 분석할 때 여러 중요한 성능척도들이 1절에서 정의한 $H(x)$를 포함한 식들로 표현된다. 그러나 $H(x)$를 계산하기는 현실적으로 어려우므

로 그 함수에 대한 근사함수를 구하는 것은 의미있는 일이다.

이 논문에서는 그 동안 $H(x)$에 관한 몇 가지 결과들과 Tijms(1986)가 M/G/1 큐에서 고객대기시간의 분포 $q(x)$를 근사하기 위하여 사용한 테크닉을 결합하여 $H(x)$를 위한 두 가지 근사법을 제시한다. 그 중 첫 번째 방법은 본질적으로 Tijms(1986)의 $q(x)$에 대한 근사법과 동일한 근사이고 두 번째 방법은 새로운 적분방정식을 고려하는 아이디어를 통해 $H(x)$에 대하여 첫 번째와는 다른 근사함수를 제시한다.

$H(x)$의 참값이 계산되는 몇 가지 특수한 상황에서 $H(x)$에 대한 두 가지 근사함수를 비교해 본 결과, 두 번째 근사함수가 모든 경우에서 첫 번째 근사함수보다 더 좋은 결과를 보여주는 것은 아니었다. 그러나 첫 번째 근사함수가 좋은 결과를 보여주는 상황 중 대부분의 경우엔 두 번째 근사함수도 좋은 결과를 보여주었고, 무엇보다도 첫 번째 근사함수가 불량한 근사값을 보여주는 경우가 있는데 이러한 경우에 두 번째 근사함수는 상당히 뛰어난 근사결과를 보여주었다. 결론적으로 두 번째 근사함수는 첫 번째 근사함수의 취약점을 보완해 주는 역할을 할 수 있음을 알게 되었다.

향후에 두 번째 근사함수와 첫 번째 근사함수를 절충하여 새로운 근사함수를 고안할 수 있을 것이다. 가령, 두 함수의 값을 가중치를 주어 평균을 계산하는 것도 한 방법이 될 수 있다. 물론 이러한 제삼의 근사함수를 제시하기 위해서는 좀더 정확히 어떠한 c^2와 어떠한 x 값에서 두 번째 근사함수가 첫 번째 근사함수보다 더 좋거나 나쁜지를 알 수 있어야 한다.

또 이 논문에서는 큐의 교통밀도 ρ에 대하여 $\rho < 1$이라는 가정을 두었는데 실제로는 $\rho \geq 1$인 큐-가령 유한댐 모형-도 고려할 수 있으며 $H(x)$도 정의할 수 있다. 즉, $\rho \geq 1$인 경우에 $H(x)$를 근사하는 것도 중요한 주제이며 이 주제로 연구가 확장될 것이다.

참고문헌

Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues,* John Wiley & Sons, New York.

Bae, J. (2003). The optimal capacity of the finite dam with compound Poisson inputs, *Journal of the Korean Statistical Society,* **32**, 65–71.

Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2001). The virtual waiting time of the $M/G/1$ queue with impatient customers, *Queueing Systems,* **38**, 485–494.

Bae, J., Kim, S. and Lee, E. Y. (2002). A P_λ^M-policy for an $M/G/1$ queueing system, *Applied Mathematical Modelling,* **26**, 929–939.

Kim, J., Bae, J. and Lee, E. Y. (2006). An optimal P_λ^M-service policy for an M/G/1 queueing system, *Applied Mathematical Modelling,* **30**, 38–48.

Tijms, H. C. (1986). *Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach,* John Wiley & Sons, New York.

[2006년 12월 접수, 2007년 3월 채택]

The Approximation for the Auxiliary Renewal Function*

Jongho Bae[1)] Sunggon Kim[2)]

ABSTRACT

The auxiliary renewal function has an important role in analyzing queues in which the either of the inter-arrival time and the service time of customers is not exponential. As like the renewal function, the auxiliary renewal function is hard to compute although it can be defined theoretically. In this paper, we suggest two approximations for auxiliary renewal function and compare the two with the true value of auxiliary renewal function which can be computed in some special cases.

Keywords: Auxiliary renewal function, approximation, queue, waiting time of customers.

* This study was financially supported by research fund of Chungnam National University in 2005.
1) Assistant Professor, Department of Information Statistics, Chungnam National University
E-mail: bae-jongho@cnu.ac.kr
2) Assistant Professor, Department of Information Statistics, Gyeongsang National University
E-mail: sgkim@gnu.ac.kr