

## 베이지안 접근에 의한 모비율 선형함수의 신뢰구간\*

이승천<sup>1)</sup>

### 요약

모비율에 대한 신뢰구간의 구축에 있어 정규근사에 의한 Wald 신뢰구간이 표준으로 인식되어 왔으나, 최근 여러 학자들에 의해 Wald 신뢰구간은 근사성에서 심각한 문제가 있다는 것이 밝혀지고 있어 Agresti와 Coull(1998)에 의해 제안된 방법이 새로운 표준이 되어 가고 있다. Agresti-Coull 방법은 간편하면서도 근사성 문제를 획기적으로 개선하였으나 모비율에 대한 여러 가지 문제에서 보수적인 신뢰구간을 제시하고 있다. 본 연구에서는 베이지안 접근 방법에 의해 Agresti-Coull 방법의 보수성을 개선한 모비율 선형함수의 신뢰구간을 제시한다.

주요용어: 모비율 선형함수, 가중 Polyá posterior, Agresti-Coull 신뢰구간, 포함확률.

### 1. 서론

자료분석에 있어 모비율에 관한 구간추정은 매우 중요한 위치를 차지하고 있으며, 그동안 고전적인 Wald 신뢰구간이 표준적인 방법으로 인식되어 왔다. Brown 등(2001)에 의하면 Wald의 신뢰구간이 많이 사용되고 있는 이유의 하나는 이해하기 쉬운 간단한 식에 의해 구할 수 있다는 장점에 기인하는 바가 크다고 한다. 그러나 Ghosh(1979), Blyth와 Still(1983), Agresti와 Coull(1998), Brown 등(2001, 2002) 등 많은 연구에서 표본크기가 작은 경우는 물론, 표본크기가 큰 경우라고 할 지라도 Wald의 신뢰구간의 포함확률(coverage probability)이 명목 신뢰수준과는 상당한 차이를 갖을 수 있어 포함확률의 근사성에 있어 심각한 문제가 있다는 것을 지적하고 있다. 이에 Agresti와 Coull(1998), Brown 등(2002) 등은 이항 비율에 대한 새로운 신뢰구간을 발표하였다. 새로운 신뢰구간은 주로 Edgeworth expansion 등과 같은 근사이론에 기초한 것으로 특성상 매우 복잡한 신뢰구간이 될 수 밖에 없으나, Agresti와 Coull(1998)은 단지 가상적인 4개(2개의 성공과 2개의 실패)의 자료를 첨가하고 Wald 식에 의해 신뢰구간을 구하는 간편한 방법을 제안하여 주목을 받았다.

Agresti와 Coull의 신뢰구간은 기존의 Wald 식을 그대로 적용할 수 있는 간편성과 더불어, 포함확률의 근사성을 획기적으로 개선한 실용적인 신뢰구간으로 각광을 받게 되었다. 이후, Agresti-Coull 방법은 독립표본에서 모비율 차이 신뢰구간(Agresti와 Caffo, 2000), 동일 표본에서 모비율 차이 신뢰구간(Agresti와 Min, 2005), 모비율 선형함수의 신뢰구간(Price와

\* 이 논문은 2007년도 한신대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

1) (447-791) 경기도 오산시 양산동 411, 한신대학교 정보통계학과, 교수

E-mail: seung@hanshin.ac.kr

Bonett, 2004), 이종표본추출에서 모비율 신뢰구간(Lee, 2007) 등, 모비율에 대한 여러 가지 신뢰구간의 구축에 있어 매우 효과적인 방법이 되어 왔다. 그러나 Agresti-Coull 방법은 포함확률이 명목확률을 상회하는 경향을 갖는 보수적인 신뢰구간을 구하게 된다. 이에 이승천(2005, 2006)은 Agresti-Coull 방법의 보수성을 개선하기 위해 무정보 사전분포에 의한 베이저안 접근 방법에 의해 새로운 신뢰구간을 발표하였다. 그의 연구결과에 의하면 새로운 신뢰구간은 Wald 또는 Agresti-Coull과 같은 간편성을 확보하고 있고, 근접성 및 구간의 넓이에 있어서도 Agresti-Coull(1998)의 신뢰구간보다 우수하다고 한다.

Anbar(1983), Beal(1987), Newcombe(1998), Agresti와 Caffo(2000) 및 이승천(2006)에서 다루어진 모비율 차이는 모비율의 선형함수로 표현될 수 있다. 이 밖에 주효과(main effect), 교호작용(interaction effect), 대비(contrast), 경향(trend) 등, 데이터 분석에 있어 중요한 의미를 갖는 많은 요소들이 모비율들의 선형함수로 표현될 수 있다. 모비율 선형함수에 대한 보다 자세한 예제는 Bonett와 Woodward(1987), Price와 Bonett(2004)를 참조할 수 있다. 본 연구에서는 이승천(2005)에 의해 제안된 방법을 이용하여 모비율 선형함수의 신뢰구간을 구하였고, Price와 Bonett(2004)에 의한 Agresti-Coull 유형의 신뢰구간과 포함확률의 근접성 및 구간의 넓이를 비교하기로 한다.

## 2. 모비율 선형함수의 신뢰구간

$X_i(i = 1, 2, \dots, g)$ 가 각각 독립적으로 모수  $n_i, p_i$ 인 이항분포를 따른다고 할 때, Wald 방법에 따른 모비율 선형함수  $\psi = \sum_{i=1}^g c_i p_i$ 의  $(1 - \alpha) \times 100\%$  신뢰구간은

$$CI(Wald) = \sum_{i=1}^g c_i \hat{p}_i \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^g c_i^2 \hat{p}_i (1 - \hat{p}_i) / n_i} \quad (2.1)$$

와 같이 구할 수 있다. 단  $\hat{p}_i = X_i / n_i$ 이다. 한편 Agresti와 Coull(1998)에 의해 제안된 이항비율의 신뢰구간은  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ 라고 할 때,  $(1 - \alpha) \times 100\%$  신뢰수준에서

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p}) / \bar{n}} \quad (2.2)$$

와 같이 구하여진다. 이때  $\bar{n} = n + 4, \bar{p} = (X + 2) / \bar{n}$ 이다. 이는 2개의 성공과 2개의 실패를 가정한 4개의 가상 자료를 본래의 관측값에 더하여 구하여진 Wald 신뢰구간과 같다. Price와 Bonett(2004)는 모비율 선형함수  $\psi = \sum_{i=1}^g c_i p_i$ 에 대해

$$CI(Agresti) = \sum_{i=1}^g c_i \bar{p}_i \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^g c_i^2 \bar{p}_i (1 - \bar{p}_i) / \bar{n}_i} \quad (2.3)$$

와 같이 신뢰구간을 제시하였다. 여기서  $\bar{n}_i = n_i + 4/k, \bar{p}_i = (X_i + 2/k) / \bar{n}_i, i = 1, 2, \dots, g$ 이고,  $k$ 는  $\psi$ 에서 0이 아닌  $c_i$ 의 개수를 나타낸다. 즉, Agresti와 Coull(1998)과 같이 4개의 가상자료를 더하여 구한 Wald 신뢰구간을 제안하였다.

Agresti-Coull 유형의 신뢰구간으로 Greenland(2001)는  $k = 2$ 를 제시하였으나 Price와 Bonett(2004)에 의하면 Greenland의 신뢰구간은 포함확률의 근사성에 있어 (2.3)에 미치지

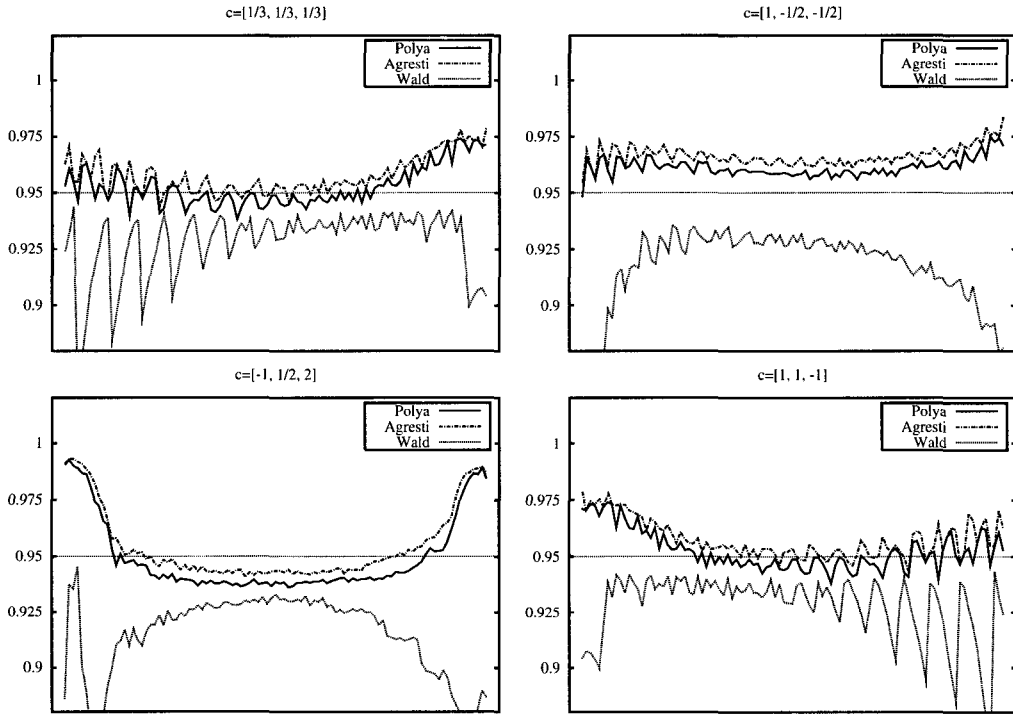


그림 2.1:  $n_1 = n_2 = n_3 = 20, p_1 = p_2 = 0.1, p_3 = 0.01, \dots, 0.99$ 에서 95% Wald, Agresti, 가중 폴라사후분포 신뢰구간의 포함확률

못한다고 하며, 논문에 포함되지는 않았으나 본 연구에서도 같은 결론을 얻게 되어 Greenland의 신뢰구간은 3절의 비교분석에는 포함하지 않기로 한다.

이승천(2005)에 의한 이항비율  $p$ 의 신뢰구간은 가중 폴라 사후분포(weighted Poly posterior) 또는 모비율의 베타사전분포에 의한 사후분포의 평균과 분산을 이용한 것으로

$$\tilde{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}+1}} \tag{2.4}$$

와 같이 구하여진다. 단,  $\tilde{n} = n + z_{\alpha/2}^2, \tilde{p} = (X + z_{\alpha/2}^2/2)/\tilde{n}$ 이다.  $z_{0.025}^2 = 1.96^2 \approx 4$ 이므로 95% 신뢰수준에서 Agresti와 Coull의 신뢰구간과 거의 같은 신뢰구간이 되는 것을 알 수 있다. 이를 이용하면  $\tilde{n}_i = n_i + z_{\alpha/2}^2/k, \tilde{p} = (X + (1/2)z_{\alpha/2}^2/k)/\tilde{n}$ 이라고 할때,  $\psi$ 의 신뢰구간은

$$CI(Polya) = \sum_{i=1}^g c_i \tilde{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^g c_i^2 \tilde{p}_i (1-\tilde{p}_i) / (\tilde{n}_i + 1)} \tag{2.5}$$

와 같이 구할 수 있다.

$g = 1, c_1 = 1$ 인 경우, (2.3)과 (2.5)는 각각 (2.2)과 (2.4)와 같고,  $g = 2, c_1 = 1, c_2 = -1$ 일 때에는 Agresti와 Caffo(2000)와 이승천(2006)에서 구한 모비율 차이의 신뢰구간과 같아진다. 이승천(2005, 2006)은 두 경우에서 모두 (2.5)는 (2.3)의 보수성을 개선하여 근사성 및 신뢰구간의 넓이에 있어 선호된다고 한다.

신뢰구간 (2.4)는 모집단의 분포가 좌 또는 우로 치우친 경우에 효과적인 것으로,  $p$ 가 0 또는 1에 가까울 때 포함확률의 근사성에서 Agresti와 Coull의 신뢰구간보다 우수하다고 하며(이승천, 2005), 본 연구의 실험에서도 (2.5)의 신뢰구간에 대해 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 예를 들어 두 모집단의 분포가 좌로 치우친 경우 ( $p_1 = p_2 = 0.1$ ),  $\psi_1 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3$ ,  $\psi_2 = p_1 - 0.5p_2 - 0.5p_3$ ,  $\psi_3 = -p_1 + 0.5p_2 + 2p_3$ ,  $\psi_4 = p_1 + p_2 - p_3$ 에 대한  $CI(Wald)$ ,  $CI(Agresti)$ ,  $CI(Polya)$ 의 포함확률을 그려보면 그림 2.1과 같다. 4 가지 경우에서 모두  $p_3$ 가 0 또는 1에 가까울 경우  $CI(Polya)$ 의 포함확률은  $CI(Agresti)$  보다 명목 신뢰수준에 근접해 있는 것을 볼 수 있다. 그러나  $p_3$ 가 0.5 근처에서는 포함확률이 명목신뢰수준보다 작은 경향이 있다. 즉,  $p$ 가 0.5에 가까울 때 분산이 과소 추정되는 경향을 갖는다.

분산의 과소추정 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 수정 신뢰구간을 고려할 수 있다.

$$CI(Polya(m)) = \sum_{i=1}^g c_i \tilde{p}_i \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{i=1}^g c_i^2 \tilde{p}_i (1 - \tilde{p}_i) / (\tilde{n}_i + m)} \quad (2.6)$$

여기서  $m$ 은  $0 \leq m \leq 1$ 을 만족하는 임의의 수이다. 특히,  $m = 0$ 일 때  $CI(Polya(0))$ 은 95% 신뢰수준에서  $CI(Agresti)$ 와 거의 유사한 신뢰구간이 된다. 그러나 신뢰구간의 넓이는  $CI(Agresti)$ 과 비교하여 근소하게 짧아져  $CI(Agresti)$ 의 보수성을 개선할 수 있다.

### 3. 신뢰구간의 평가

Price와 Bonnett(2004)는 모의 실험을 통하여  $CI(Wald)$ ,  $CI(Agresti)$  및 Greenland(2001)의 신뢰구간에 대해, 평균포함확률, 포함확률의 최소값, 포함확률이  $1 - \alpha - 0.02$ 이하인 비율을 구하여 신뢰구간을 평가하였다. 그러나 이러한 기준에 의한 평가에서는 보수적인 신뢰구간이 좋은 평가를 받게 마련이다. 일반적으로 근사신뢰구간의 평가에 있어 중요한 요소는 포함확률의 근사성과 신뢰구간의 넓이라고 할 수 있다. 그러므로 본 절에서는  $m = 0, 1/2, 1/k, 1$ 의 4가지 경우와 Price와 Bonnett(2004)가 제안한  $CI(Agresti)$ 에 대해 포함확률의 근사성 및 신뢰구간의 넓이의 관점에서 비교하기로 한다. 이를 위해 신뢰구간들의 평균기대포함확률(average expected coverage probability, AECP)과 포함확률의 평방평균 제곱오차(root mean square deviation, RMSD) 및 평균기대넓이(average expected width, AEW)를 구하기로 한다. 즉,  $(x_1, \dots, x_g)$ 에서 구한 신뢰구간  $CI(A)$ 를  $CI_A(x_1, \dots, x_g)$ 이고,  $W(CI_A(x_1, \dots, x_g))$ 를  $CI_A(x_1, \dots, x_g)$ 의 넓이라고 할 때, 모수  $(p_1, \dots, p_g)$ 에서 신뢰구간  $CI(A)$ 가  $\psi$ 를 포함할 확률  $C_A(p_1, \dots, p_g)$ 와  $CI(A)$ 의 기대넓이  $EW_A(p_1, \dots, p_g)$ 는 각각

$$C_A(p_1, \dots, p_g) = \sum_{x_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{x_g=0}^{n_g} \prod_{i=1}^g \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} I(\psi \in CI_A(x_1, \dots, x_g)),$$

$$EW_A(p_1, \dots, p_g) = \sum_{x_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{x_g=0}^{n_g} \prod_{i=1}^g \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1-p_i)^{n_i-x_i} W(CI_A(x_1, \dots, x_g))$$

와 같이 나타낼 수 있다. 또 이항비율들에 대해 균등분포를 가정할 경우 평균기대포함확률, 포함확률의 RMSD 및 평균기대넓이는 각각

$$AECP(A) = \iiint \cdots \int C_A(p_1, \dots, p_g) dp_1 dp_2 \cdots dp_g,$$

$$RMSD(A) = \left\{ \iiint \cdots \int (C_A(p_1, \dots, p_g) - (1-\alpha))^2 dp_1 dp_2 \cdots dp_g \right\}^{1/2},$$

$$AEW(A) = \iiint \cdots \int EW_A(p_1, \dots, p_g) dp_1 dp_2 \cdots dp_g$$

과 같이 나타낼 수 있다.

표본크기  $n_i$ 가 커지면 5개 신뢰구간은 사실상 같은 신뢰구간이므로 표본크기가 클 때 신뢰구간의 비교는 의미가 없다. 그러므로 본 절에서는 소표본을 가정하여 비교하기로 한다. 또 Price와 Bonett(2004)과 비교를 위해 그들이 평가를 위해 사용한 실험모형을 이용하기로 한다.

3개의 이항비율(3 그룹)의 선형함수에서는 0.02 간격의 격자점  $(p_1, p_2, p_3)$ 에서 총  $49^3 = 117649$ 개의  $C_A(p_1, p_2, p_3)$ 와  $EW_A(p_1, p_2, p_3)$ 를 계산하고, 평균기대포함확률, RMSD, 평균기대넓이를 구하였다. 이와 같은 계산은 매우 많은 횟수의 연산을 필요로 한다. 예를 들어 실험모형 중 가장 적은 횟수의 연산을 요구하는  $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$ 인 경우에도 하나의  $C_A(p_1, p_2, p_3)$  또는  $EW_A(p_1, p_2, p_3)$ 를 구하기 위해서는  $11 \times 11 \times 11 = 1331$ 의 이항확률의 계산이 필요하므로 천문학적인 횟수의 연산이 요구된다. 특히 4개의 이항비율(4 그룹)의 선형함수에 대해서는 연구에 사용된 컴퓨터로는 감당이 불가능할 정도로 많은 연산이 요구된다. 그러므로 4 그룹에 대한 비교에서는 10000번의 모의실험을 통하여 필요한 통계값을 구하였다. 즉, 각 그룹의 모비율을 균일분포에서 임의 표본추출하고 이를 모수로 하여 포함확률의 기대값 및 기대넓이를 구하였고, 이러한 과정을 10000번 반복하여 필요한 통계값을 구하였다. 모든 계산은 R 2.3.1에서 실행되었으며 결과는 표 3.1, 표 3.2와 같다.

3그룹의 비교에서 RMSD에 의해 포함확률의 근사성을 판단하다면 모든 경우 최적의 근사성을 갖는 신뢰구간은 존재하지 않는다. 또 48회 비교에서 RMDS의 최대값과 최소값의 비율은 대부분 1.07에서 1.42 정도이므로 RMDS에서 큰 차이가 있다고 보기는 어렵다. 또 RMDS의 최대값은 0.0381이므로 근사성에 있어서 5개의 신뢰구간은 모두 큰 문제는 없는 것으로 판단된다. 그러나  $CI(Polya(0))$ 는 50%의 빈도(24회)에서 가장 작은 RMSD 값을 갖는 것으로 나타나 근사성에서 가장 선호될 수 있다. 또  $CI(Polya(1/k))$ 도 약 30%의 비율로 가장 작은 RMSD를 갖고 있고, 특히 널리 사용되는 신뢰수준인 95%에서는 9회(약 56%)에서 가장 작은 RMSD 값을 갖는다. 특기할 만한 사항은  $CI(Polya(0))$ 는 7회에 걸쳐 가장 큰 RMSD 값을 갖는 경우가 있으나  $CI(Polya(1/k))$ 는 가장 큰 RMSD 값을 갖는 경우는 발견되지 않았다.

표 3.1에서  $CI(Agresti)$ 은 90%와 95%의 신뢰수준에서, 평균기대포함확률이 명목수준보다 약간씩 큰 값을 갖고 있어 보수적인 경향이 있는 것을 알 수 있다. 그러나 99% 신

표 3.1: 3그룹 디자인에서 신뢰구간들의 평균기대포함확률, RMSD, 평균기대넓이

| $n_1, n_2, n_3$        |      | $1 - \alpha$ |        | 평균기대포함확률, RMSD, 평균기대넓이 |       |        |        |       |        |                 |       |                   |        |                   |        |        |
|------------------------|------|--------------|--------|------------------------|-------|--------|--------|-------|--------|-----------------|-------|-------------------|--------|-------------------|--------|--------|
|                        |      |              |        | Agresti                |       |        | Polya  |       |        | Adjust Polya(0) |       | Adjust Polya(1/2) |        | Adjust Polya(1/k) |        |        |
| $c = [1/3, 1/3, 1/3]$  |      |              |        |                        |       |        |        |       |        |                 |       |                   |        |                   |        |        |
| 10, 10, 10             | 0.90 | 0.910        | 0.0190 | 0.2341                 | 0.888 | 0.0200 | 0.2239 | 0.902 | 0.0145 | 0.2340          | 0.896 | 0.0156            | 0.2288 | 0.898             | 0.0151 | 0.2305 |
|                        | 0.95 | 0.956        | 0.0112 | 0.2789                 | 0.946 | 0.0115 | 0.2673 | 0.955 | 0.0110 | 0.2789          | 0.951 | 0.0104            | 0.2729 | 0.952             | 0.0105 | 0.2749 |
|                        | 0.99 | 0.991        | 0.0032 | 0.3665                 | 0.990 | 0.0045 | 0.3504 | 0.993 | 0.0043 | 0.3644          | 0.991 | 0.0042            | 0.3572 | 0.992             | 0.0042 | 0.3596 |
| 20, 20, 20             | 0.90 | 0.905        | 0.0111 | 0.1694                 | 0.893 | 0.0109 | 0.1654 | 0.901 | 0.0084 | 0.1693          | 0.897 | 0.0087            | 0.1673 | 0.898             | 0.0083 | 0.1680 |
|                        | 0.95 | 0.953        | 0.0065 | 0.2018                 | 0.948 | 0.0070 | 0.1972 | 0.953 | 0.0064 | 0.2018          | 0.950 | 0.0062            | 0.1995 | 0.951             | 0.0061 | 0.2002 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0020 | 0.2652                 | 0.990 | 0.0027 | 0.2591 | 0.992 | 0.0028 | 0.2649          | 0.991 | 0.0026            | 0.2619 | 0.991             | 0.0027 | 0.2629 |
| 30, 30, 30             | 0.90 | 0.904        | 0.0080 | 0.1394                 | 0.895 | 0.0076 | 0.1372 | 0.900 | 0.0058 | 0.1394          | 0.898 | 0.0062            | 0.1382 | 0.899             | 0.0059 | 0.1386 |
|                        | 0.95 | 0.952        | 0.0047 | 0.1661                 | 0.948 | 0.0049 | 0.1635 | 0.951 | 0.0045 | 0.1661          | 0.950 | 0.0044            | 0.1648 | 0.950             | 0.0043 | 0.1652 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0015 | 0.2183                 | 0.990 | 0.0020 | 0.2149 | 0.991 | 0.0021 | 0.2182          | 0.991 | 0.0020            | 0.2165 | 0.991             | 0.0020 | 0.2171 |
| 30, 10, 10             | 0.90 | 0.910        | 0.0174 | 0.2071                 | 0.889 | 0.0188 | 0.1990 | 0.902 | 0.0143 | 0.2070          | 0.895 | 0.0153            | 0.2028 | 0.897             | 0.0145 | 0.2042 |
|                        | 0.95 | 0.955        | 0.0110 | 0.2468                 | 0.946 | 0.0116 | 0.2376 | 0.954 | 0.0108 | 0.2468          | 0.950 | 0.0105            | 0.2421 | 0.952             | 0.0104 | 0.2436 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0038 | 0.3244                 | 0.990 | 0.0037 | 0.3117 | 0.992 | 0.0038 | 0.3230          | 0.991 | 0.0035            | 0.3172 | 0.992             | 0.0036 | 0.3191 |
| $c = [1.0, -5, -5]$    |      |              |        |                        |       |        |        |       |        |                 |       |                   |        |                   |        |        |
| 10, 10, 10             | 0.90 | 0.911        | 0.0229 | 0.4946                 | 0.888 | 0.0253 | 0.4726 | 0.902 | 0.0209 | 0.4938          | 0.895 | 0.0220            | 0.4828 | 0.897             | 0.0214 | 0.4864 |
|                        | 0.95 | 0.955        | 0.0154 | 0.5893                 | 0.945 | 0.0168 | 0.5648 | 0.954 | 0.0153 | 0.5893          | 0.950 | 0.0156            | 0.5766 | 0.951             | 0.0154 | 0.5808 |
|                        | 0.99 | 0.989        | 0.0063 | 0.7745                 | 0.990 | 0.0052 | 0.7414 | 0.992 | 0.0048 | 0.7712          | 0.991 | 0.0048            | 0.7559 | 0.992             | 0.0048 | 0.7609 |
| 20, 20, 20             | 0.90 | 0.906        | 0.0136 | 0.3576                 | 0.892 | 0.0140 | 0.3490 | 0.900 | 0.0115 | 0.3572          | 0.896 | 0.0122            | 0.3530 | 0.898             | 0.0118 | 0.3544 |
|                        | 0.95 | 0.952        | 0.0094 | 0.4262                 | 0.947 | 0.0103 | 0.4164 | 0.952 | 0.0094 | 0.4261          | 0.949 | 0.0095            | 0.4212 | 0.950             | 0.0094 | 0.4228 |
|                        | 0.99 | 0.989        | 0.0041 | 0.5601                 | 0.990 | 0.0038 | 0.5478 | 0.991 | 0.0036 | 0.5600          | 0.991 | 0.0036            | 0.5538 | 0.991             | 0.0036 | 0.5558 |
| 30, 30, 30             | 0.90 | 0.904        | 0.0097 | 0.2943                 | 0.895 | 0.0095 | 0.2895 | 0.900 | 0.0077 | 0.2941          | 0.897 | 0.0083            | 0.2918 | 0.898             | 0.0080 | 0.2925 |
|                        | 0.95 | 0.951        | 0.0069 | 0.3507                 | 0.948 | 0.0072 | 0.3452 | 0.951 | 0.0067 | 0.3507          | 0.949 | 0.0068            | 0.3479 | 0.950             | 0.0067 | 0.3488 |
|                        | 0.99 | 0.989        | 0.0030 | 0.4609                 | 0.990 | 0.0029 | 0.4541 | 0.991 | 0.0029 | 0.4611          | 0.990 | 0.0028            | 0.4576 | 0.991             | 0.0028 | 0.4588 |
| 30, 10, 10             | 0.90 | 0.908        | 0.0141 | 0.3747                 | 0.891 | 0.0138 | 0.3627 | 0.902 | 0.0100 | 0.3746          | 0.897 | 0.0106            | 0.3685 | 0.898             | 0.0101 | 0.3705 |
|                        | 0.95 | 0.954        | 0.0084 | 0.4464                 | 0.947 | 0.0085 | 0.4327 | 0.954 | 0.0080 | 0.4465          | 0.950 | 0.0076            | 0.4394 | 0.951             | 0.0076 | 0.4417 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0024 | 0.5867                 | 0.990 | 0.0034 | 0.5678 | 0.992 | 0.0034 | 0.5846          | 0.991 | 0.0033            | 0.5760 | 0.991             | 0.0033 | 0.5788 |
| $c = [-1.0, 0.5, 2.0]$ |      |              |        |                        |       |        |        |       |        |                 |       |                   |        |                   |        |        |
| 10, 10, 10             | 0.90 | 0.911        | 0.0267 | 0.9225                 | 0.887 | 0.0304 | 0.8806 | 0.901 | 0.0263 | 0.9201          | 0.894 | 0.0275            | 0.8997 | 0.896             | 0.0269 | 0.9064 |
|                        | 0.95 | 0.954        | 0.0185 | 1.0992                 | 0.945 | 0.0206 | 1.0534 | 0.953 | 0.0187 | 1.0991          | 0.949 | 0.0192            | 1.0755 | 0.951             | 0.0189 | 1.0832 |
|                        | 0.99 | 0.988        | 0.0084 | 1.4446                 | 0.990 | 0.0060 | 1.3846 | 0.992 | 0.0054 | 1.4402          | 0.991 | 0.0056            | 1.4116 | 0.991             | 0.0055 | 1.4209 |
| 20, 20, 20             | 0.90 | 0.906        | 0.0166 | 0.6668                 | 0.892 | 0.0170 | 0.6502 | 0.899 | 0.0146 | 0.6656          | 0.896 | 0.0154            | 0.6578 | 0.897             | 0.0151 | 0.6604 |
|                        | 0.95 | 0.952        | 0.0119 | 0.7945                 | 0.946 | 0.0128 | 0.7763 | 0.951 | 0.0118 | 0.7944          | 0.949 | 0.0121            | 0.7852 | 0.950             | 0.0119 | 0.7882 |
|                        | 0.99 | 0.988        | 0.0054 | 1.0441                 | 0.990 | 0.0046 | 1.0221 | 0.991 | 0.0042 | 1.0449          | 0.990 | 0.0044            | 1.0333 | 0.991             | 0.0043 | 1.0371 |
| 30, 30, 30             | 0.90 | 0.904        | 0.0119 | 0.5487                 | 0.894 | 0.0117 | 0.5393 | 0.899 | 0.0099 | 0.5480          | 0.897 | 0.0105            | 0.5436 | 0.898             | 0.0103 | 0.5451 |
|                        | 0.95 | 0.951        | 0.0087 | 0.6538                 | 0.947 | 0.0093 | 0.6435 | 0.951 | 0.0086 | 0.6537          | 0.949 | 0.0088            | 0.6485 | 0.950             | 0.0087 | 0.6502 |
|                        | 0.99 | 0.988        | 0.0040 | 0.8592                 | 0.990 | 0.0036 | 0.8471 | 0.991 | 0.0034 | 0.8602          | 0.990 | 0.0035            | 0.8536 | 0.990             | 0.0035 | 0.8558 |
| 30, 10, 10             | 0.90 | 0.912        | 0.0323 | 0.8607                 | 0.887 | 0.0381 | 0.8225 | 0.900 | 0.0341 | 0.8573          | 0.893 | 0.0356            | 0.8393 | 0.895             | 0.0351 | 0.8452 |
|                        | 0.95 | 0.953        | 0.0228 | 1.0256                 | 0.944 | 0.0257 | 0.9849 | 0.952 | 0.0232 | 1.0253          | 0.948 | 0.0242            | 1.0045 | 0.949             | 0.0238 | 1.0113 |
|                        | 0.99 | 0.986        | 0.0111 | 1.3479                 | 0.989 | 0.0073 | 1.2971 | 0.991 | 0.0064 | 1.3465          | 0.990 | 0.0067            | 1.3211 | 0.991             | 0.0066 | 1.3294 |
| $c = [1., 1., -1.]$    |      |              |        |                        |       |        |        |       |        |                 |       |                   |        |                   |        |        |
| 10, 10, 10             | 0.90 | 0.910        | 0.0190 | 0.7022                 | 0.888 | 0.0200 | 0.6718 | 0.902 | 0.0145 | 0.7019          | 0.896 | 0.0156            | 0.6864 | 0.898             | 0.0151 | 0.6915 |
|                        | 0.95 | 0.956        | 0.0112 | 0.8367                 | 0.946 | 0.0115 | 0.8020 | 0.955 | 0.0110 | 0.8368          | 0.951 | 0.0104            | 0.8188 | 0.952             | 0.0105 | 0.8247 |
|                        | 0.99 | 0.991        | 0.0032 | 1.0996                 | 0.990 | 0.0045 | 1.0511 | 0.993 | 0.0043 | 1.0933          | 0.991 | 0.0042            | 1.0716 | 0.992             | 0.0042 | 1.0787 |
| 20, 20, 20             | 0.90 | 0.905        | 0.0111 | 0.5081                 | 0.893 | 0.0109 | 0.4961 | 0.901 | 0.0084 | 0.5079          | 0.897 | 0.0087            | 0.5019 | 0.898             | 0.0083 | 0.5039 |
|                        | 0.95 | 0.953        | 0.0065 | 0.6054                 | 0.948 | 0.0070 | 0.5916 | 0.953 | 0.0064 | 0.6054          | 0.950 | 0.0062            | 0.5984 | 0.951             | 0.0061 | 0.6007 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0020 | 0.7956                 | 0.990 | 0.0027 | 0.7773 | 0.992 | 0.0028 | 0.7946          | 0.991 | 0.0026            | 0.7858 | 0.991             | 0.0027 | 0.7887 |
| 30, 30, 30             | 0.90 | 0.904        | 0.0080 | 0.4182                 | 0.895 | 0.0076 | 0.4115 | 0.900 | 0.0058 | 0.4181          | 0.898 | 0.0062            | 0.4147 | 0.899             | 0.0059 | 0.4158 |
|                        | 0.95 | 0.952        | 0.0047 | 0.4983                 | 0.948 | 0.0049 | 0.4905 | 0.951 | 0.0045 | 0.4983          | 0.950 | 0.0044            | 0.4944 | 0.950             | 0.0043 | 0.4957 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0015 | 0.6549                 | 0.990 | 0.0020 | 0.6447 | 0.991 | 0.0021 | 0.6546          | 0.991 | 0.0020            | 0.6496 | 0.991             | 0.0020 | 0.6513 |
| 30, 10, 10             | 0.90 | 0.910        | 0.0174 | 0.6214                 | 0.889 | 0.0188 | 0.5969 | 0.902 | 0.0143 | 0.6209          | 0.895 | 0.0153            | 0.6085 | 0.897             | 0.0145 | 0.6126 |
|                        | 0.95 | 0.955        | 0.0110 | 0.7405                 | 0.946 | 0.0116 | 0.7127 | 0.954 | 0.0108 | 0.7405          | 0.950 | 0.0105            | 0.7262 | 0.952             | 0.0104 | 0.7308 |
|                        | 0.99 | 0.990        | 0.0038 | 0.9731                 | 0.990 | 0.0037 | 0.9350 | 0.992 | 0.0038 | 0.9689          | 0.991 | 0.0035            | 0.9515 | 0.992             | 0.0036 | 0.9572 |

표 3.2: 4그룹 디자인에서 신뢰구간들의 평균기대포함확률, RMSD, 평균기대넓이( $n_1, n_2, n_3, n_4 = (10, 10, 10, 10)$ )

| 계수   | $1 - \alpha$ | 평균기대포함확률, RMSD, 평균기대넓이 |       |       |       |       |       |                 |       |       |                   |       |       |                   |       |       |
|--|--------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|
|  |              | Agresti                |       |       | Polya |       |       | Adjust Polya(0) |       |       | Adjust Polya(1/2) |       |       | Adjust Polya(1/k) |       |       |
| $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$   | 0.90         | 0.906                  | 0.013 | 0.202 | 0.883 | 0.020 | 0.192 | 0.898           | 0.010 | 0.201 | 0.891             | 0.014 | 0.197 | 0.895             | 0.012 | 0.199 |
|  | 0.95         | 0.953                  | 0.008 | 0.240 | 0.942 | 0.011 | 0.230 | 0.952           | 0.008 | 0.240 | 0.947             | 0.008 | 0.235 | 0.950             | 0.008 | 0.237 |
|  | 0.99         | 0.990                  | 0.003 | 0.316 | 0.989 | 0.004 | 0.303 | 0.992           | 0.004 | 0.315 | 0.991             | 0.003 | 0.309 | 0.991             | 0.003 | 0.312 |
| -1, 2, -3, 2   | 0.90         | 0.906                  | 0.016 | 1.707 | 0.882 | 0.023 | 1.628 | 0.897           | 0.014 | 1.703 | 0.889             | 0.017 | 1.664 | 0.893             | 0.015 | 1.683 |
|  | 0.95         | 0.952                  | 0.011 | 2.034 | 0.941 | 0.014 | 1.947 | 0.951           | 0.011 | 2.033 | 0.946             | 0.012 | 1.989 | 0.949             | 0.011 | 2.011 |
|  | 0.99         | 0.988                  | 0.005 | 2.673 | 0.989 | 0.005 | 2.565 | 0.992           | 0.004 | 2.673 | 0.990             | 0.004 | 2.618 | 0.991             | 0.004 | 2.645 |
| $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1$            | 0.90         | 0.905                  | 0.026 | 0.461 | 0.879 | 0.033 | 0.438 | 0.894           | 0.026 | 0.459 | 0.887             | 0.029 | 0.448 | 0.890             | 0.027 | 0.453 |
|  | 0.95         | 0.949                  | 0.019 | 0.550 | 0.939 | 0.024 | 0.525 | 0.948           | 0.020 | 0.549 | 0.944             | 0.021 | 0.537 | 0.946             | 0.020 | 0.542 |
|  | 0.99         | 0.985                  | 0.011 | 0.721 | 0.988 | 0.008 | 0.694 | 0.990           | 0.007 | 0.723 | 0.989             | 0.007 | 0.708 | 0.990             | 0.007 | 0.716 |
| $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | 0.90         | 0.906                  | 0.014 | 0.403 | 0.883 | 0.020 | 0.385 | 0.898           | 0.010 | 0.402 | 0.891             | 0.014 | 0.393 | 0.895             | 0.012 | 0.397 |
|  | 0.95         | 0.953                  | 0.008 | 0.480 | 0.942 | 0.011 | 0.456 | 0.952           | 0.008 | 0.480 | 0.947             | 0.008 | 0.469 | 0.950             | 0.008 | 0.475 |
|  | 0.99         | 0.990                  | 0.003 | 0.631 | 0.989 | 0.004 | 0.605 | 0.992           | 0.004 | 0.631 | 0.991             | 0.003 | 0.617 | 0.992             | 0.003 | 0.624 |
| -3, -1, 1, 3   | 0.90         | 0.906                  | 0.018 | 1.790 | 0.881 | 0.026 | 1.706 | 0.896           | 0.017 | 1.784 | 0.888             | 0.020 | 1.743 | 0.892             | 0.018 | 1.763 |
|  | 0.95         | 0.951                  | 0.013 | 2.138 | 0.941 | 0.017 | 2.048 | 0.950           | 0.013 | 2.132 | 0.946             | 0.014 | 2.085 | 0.948             | 0.013 | 2.108 |
|  | 0.99         | 0.988                  | 0.006 | 2.803 | 0.989 | 0.005 | 2.701 | 0.991           | 0.004 | 2.806 | 0.990             | 0.004 | 2.748 | 0.991             | 0.004 | 2.777 |
| -2, -1, 1, 2   | 0.90         | 0.906                  | 0.016 | 1.270 | 0.882 | 0.023 | 1.211 | 0.897           | 0.013 | 1.266 | 0.890             | 0.017 | 1.238 | 0.893             | 0.015 | 1.252 |
|  | 0.95         | 0.952                  | 0.010 | 1.513 | 0.941 | 0.014 | 1.450 | 0.951           | 0.010 | 1.513 | 0.946             | 0.011 | 1.479 | 0.949             | 0.011 | 1.496 |
|  | 0.99         | 0.989                  | 0.004 | 1.988 | 0.989 | 0.004 | 1.911 | 0.992           | 0.004 | 1.989 | 0.990             | 0.004 | 1.948 | 0.991             | 0.004 | 1.968 |

회수준에서는 평균기대포함확률이 명목수준보다 작은 경우를 많이 볼 수 있다. 이와 비교하여  $CI(Polya(0))$ 는 세 신뢰수준에서 모두 보수적인 경향이 있다. 99% 신뢰수준에서  $CI(Agresti)$ 는 가장 작은 RMSD를 갖는 경우가 많이 있으나 평균기대넓이가  $CI(Polya(0))$ 보다 큰 것을 감안한다면  $CI(Agresti)$ 는 구간의 넓이에 비해 포함확률이 상대적으로 작다는 것을 알 수 있다. 즉, 구간의 중심위치로서  $CI(Polya(0))$ 가  $CI(Agresti)$ 보다 적절한 것으로 이해될 수 있다.  $CI(Polya(1/k))$ 는  $CI(Polya(0))$ 보다 평균기대넓이가 더욱 좁으므로 이와 같은 상황은  $CI(Polya(1/k))$ 와의 비교에서 더욱 두드러지게 나타난다.

각 신뢰수준 별로 최적의 RMSD를 갖는 빈도가 많은 신뢰구간은 각각  $CI(Polya(0))$ ,  $CI(Polya(1/k))$ ,  $CI(Agresti)$ 이다. 그러나 99% 신뢰수준에서  $CI(Agresti)$ 와  $CI(Polya(0))$ 의 빈도는 각각 7회와 6회로 큰 차이가 없다. 또, 두 신뢰구간은 가장 큰 RMSD를 갖는 경우도 9회와 7회나 되어 매우 불안정하다. 이와 비교하여  $CI(Polya(1/2))$  또는  $CI(Polya(1/k))$ 는 RMSD가 가장 작은 경우는 상대적으로 많지 않으나 (5회와 3회), 가장 큰 경우는 없으므로 안정성을 갖고 있으며 신뢰구간의 넓이도 좁아 선호된다고 하겠다. 그러므로 90% 신뢰수준에서는  $CI(Polya(0))$ , 95%와 99% 신뢰수준에서는  $CI(Polya(1/k))$ 가 선호된다고 하겠다. 표 3.2에 나타난 4 그룹의 비교에 있어서도 같은 결론을 얻을 수 있다. 근사성을 고려할 때 90%와 95% 신뢰수준에서는 각각  $CI(Polya(0))$ 와  $CI(Polya(1/k))$ 가 가장 선호되며, 99% 신뢰수준에서는  $CI(Polya(1/2))$  또는  $CI(Polya(1/k))$ 가 선호된다.

#### 4. 결론

Agresti와 Coull(1998)에 의해 제안된 “2 개의 성공과 2 개의 실패를 첨가”는 최근 두 모비율 차이의 신뢰구간 등과 같은 모비율과 관련된 여러 신뢰구간의 구축에서 매우 성공적으로 적용되고 있다. Agresti-Coull 방법에 의한 신뢰구간은 포함확률의 근사성에서 심각한 오류가 있는 Wald 방법을 획기적으로 개선하였을 뿐 아니라 Wald와 같은 공식에 의해 신뢰구간을 구할 수 있으므로 간편성에 있어서도 여타의 다른 신뢰구간과 비교하여 장점을 갖고 있다. 그러나 이승천(2005, 2006)에 의하면 Agresti-Coull 방법에 의한 신뢰구간은 보수성 때문에 포함확률이 필요 이상으로 큰 값을 갖는 경향이 있다고 한다. 즉, 필요 이상으로 넓은 구간을 구한다고 한다.

Price와 Bonett(2004)에 의해 제시된 모비율 선형함수의 신뢰구간도 Agresti-Coull 방법을 적용하여 구한 것으로 구간의 보수성을 시사하고 있다. 본 연구에 의하면 Price와 Bonett의 신뢰구간은 90%와 95% 신뢰수준에서는 보수성을 갖고 있으나, 99% 신뢰수준에서는 포함확률이 오히려 명목수준보다 작은 경향이 있다는 것을 발견하였다. 그러나 이와 같이 포함확률이 작은 값을 갖는 것은 구간의 넓이가 좁아서라기 보다는 구간의 중심위치가 잘못된 것으로 판단할 수 있어 보수성 및 중심위치를 수정이 요구된다고 하겠다. 이승천(2005)에서 제안된 베이저안 방법은 Agresti-Coull 방법의 보수성 등을 수정할 수 있는 것으로 이틀비율 선형함수의 신뢰구간에 적용하여 Price와 Bonett(2004)이 제시한 신뢰구간의 문제점을 성공적으로 개선할 수 있었다. 새로운 신뢰구간들은 Wald 식과 거의 같은 공식에 의해 구할 수 있어 간편성도 확보하고 있다.

본 연구된 사용된 실험모형이 충분치는 않으나 다음과 같은 결론을 얻기에는 큰 문제가 없을 것으로 생각된다. 포함확률의 근사성과 신뢰구간의 넓이를 고려하여 90% 신뢰수준에서는  $CI(Polya(0))$ 가 적절한 것으로 제시하며, 95%와 99% 신뢰수준에서는  $CI(Polya(1/k))$ 를 제안한다. 그러나  $CI(Polya(0))$ 와  $CI(Polya(1/k))$ 의 차이는 크지 않으므로 90% 신뢰수준이라 하더라도  $CI(Polya(1/k))$ 에 의해 신뢰구간을 구하여도 문제가 없다고 판단된다.

#### 참고문헌

- 이승천 (2005). 이항비율의 가중 Polya posterior 구간추정, <응용통계연구>, **18**, 607-615.  
 이승천 (2006). 독립표본에서 두 모비율의 차이에 대한 가중 Polya 사후분포 신뢰구간, <응용통계연구>, **19**, 171-181.  
 Agresti, A. and Coull, B. A. (1998). Approximation is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions, *The American Statistician*, **52**, 119-126.  
 Agresti, A. and Caffo, B. (2000). Simple and effective confidence intervals for proportions and differences of proportions result from adding two successes and two failures, *The American Statistician*, **54**, 280-288.  
 Agresti, A. and Min, Y. (2005). Simple improved confidence intervals for comparing matched proportions, *Statistics in Medicine*, **24**, 729-740.  
 Anbar, D. (1983). On estimating the difference between two probabilities, with special reference to clinical trials, *Biometrics*, **39**, 257-262.



- Beal, S. L. (1987). Asymptotic confidence intervals for the difference between two binomial parameters for use with small samples, *Biometrics*, **43**, 941–950.
- Blyth, C. R. and Still, H. A. (1983). Binomial confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association*, **78**, 108–116.
- Bonett, D. G. and Woodward, J. A. (1987). Application of Kronecker product and Wald test in log-linear models, *Computational Statistics*, **3**, 235–243.
- Brown, L. D., Cai, T. T. and DasGupta, A. (2001). Interval estimation for a binomial proportion, *Statistical Science*, **16**, 101–133.
- Brown, L. D., Cai, T. T. and DasGupta, A. (2002). Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions, *Annals of Statistics*, **30**, 160–201.
- Ghosh, B. K. (1979). A comparison of some approximate confidence intervals for the binomial parameter, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 894–900.
- Greenland, S. (2001). Simple and effective confidence intervals for proportions and difference of proportions result from adding two successes and two failures, *The American Statistician*, **55**, 172.
- Lee, S.-C. (2007). An improved confidence interval for the population proportion in a double sampling scheme subject to false-positive misclassification, *Journal of Korean Statistical Society*, **36**, 275–284.
- Newcombe, R. (1998). Interval estimation for the difference between independent proportions: Comparison of eleven methods, *Statistics in Medicine*, **17**, 873–890.
- Price, R. M. and Bonett, D. G. (2004). An improved confidence interval for a linear function of binomial proportions, *Computational Statistics & Data Analysis*, **45**, 449–456.

[ 2006년 10월 접수, 2006년 12월 채택 ]

## Confidence Intervals for a Linear Function of Binomial Proportions Based on a Bayesian Approach\*

Seung-Chun Lee<sup>1)</sup>

### ABSTRACT

It is known that Agresti-Coull approach is an effective tool for the construction of confidence intervals for various problems related to binomial proportions. However, the Agresti-Coull approach often produces a conservative confidence interval. In this note, confidence intervals based on a Bayesian approach are proposed for a linear function of independent binomial proportions. It is shown that the Bayesian confidence interval slightly outperforms the confidence interval based on Agresti-Coull approach in average sense.

*Keywords:* Linear function of binomial proportions, weighted Polya posterior, Agresti-Coull approach, coverage probability.

---

\* This work was supported by Hanshin University Research Grant in 2007.

1) Professor, Department of Statistics, Hanshin University, 411 Yangsan-Dong, Osan, Kyunggi-Do 447-791, Korea  
E-mail: seung@hanshin.ac.kr