

동적 평형위치에 있는 다물체계의 모드특성에 미치는 공차의 영향 분석을 위한 해석적 방법

Analytical Method to Analyze the Effect of Tolerance on the Modal Characteristic of Multi-body Systems in Dynamic Equilibrium

김 범 석* · 유 흥 희†

Bum Suk Kim and Hong Hee Yoo

(2007년 3월 26일 접수 ; 2007년 6월 11일 심사완료)

Key Words : Tolerance Analysis(공차해석), Damped Natural Frequency(감쇠고유진동수), Transfer Function(전달함수), Dynamic Equilibrium Position(동적평형위치), Sensitivity Analysis(민감도해석), Multi-body System(다물체계)

ABSTRACT

Analytical method to analyze the effect of tolerance on the modal characteristic of multi-body systems in dynamic equilibrium position is suggested in this paper. Monte-Carlo method is conventionally employed to perform the tolerance analysis. However, Monte-Carlo method spends too much time for analysis and has a greater or less accuracy depending on sample condition. To resolve these problems, an analytical method is suggested in this paper. Sensitivity equations for damped natural frequencies and the transfer function are derived at the dynamic equilibrium position. By employing the sensitivity information of mass, damping and stiffness matrices, the sensitivities of damped natural frequencies and the transfer function can be calculated.

1. 서 론

공차해석은 기계 시스템의 설계에 있어서 제조 단가를 줄이거나 생산성을 향상시키고 제품의 질을 높이기 위해 최근 산업현장에서 필수적으로 요구되는 해석이 되고 있다. 제조공차가 시스템의 성능과 설계의 강건성에 직접적으로 영향을 미치고 있기 때문이다. 일반적으로 공차해석을 수행하기 위해서 몬테카를로법(Monte-Carlo method)을 사용한다. 그러나 몬테카를로법을 사용하게 되면 해석시간이 오래 걸리고 해의 정확성이 표본의 조건에 따라 영향을 받게 된다. 이러한 단점을 보완하기 위해 유한차분법

(finite difference method)을 이용한 해석 방법이 제안되었고, 해석을 위해 표본이 아닌 민감도 정보를 사용하므로 해석결과가 표본에 의해 영향을 받지 않게 된다.

현재까지 공차해석과 관련하여 다양한 연구가 진행되어왔다. 1964년 Hartenberg 등⁽¹⁾은 처음으로 기구에서의 링크길이의 공차가 기계적 오차를 유발한다고 언급하였으며, Garret 등⁽²⁾은 처음으로 기구에서의 확률통계적인 접근방법에 의해 각 링크길이의 공차 및 조인트에서의 틈새의 영향에 대해 언급하였다. 또한 Dubowsky 등⁽³⁾은 평면기구에서의 조인트 공차의 영향을 고려한 동적모델을 제안하였다. 최근 Choi 등⁽⁴⁾은 다물체 동역학기법을 이용하여 다물체 시스템에서의 통계적 공차해석 및 모드해석을 수행하였다. 또한 Eom 등⁽⁶⁾은 평형위치를 갖는 다물체계 고유진동수에 대한 해석적 공차해석 방법을

† 교신저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

제안하였지만 감쇠가 고려되지 않은 개방계에만 해석에 초점을 둔한계가 있다. 이 논문에서는 참고문헌(6)에 제시된 수치예제와 공차해석 방법을 감쇠를 갖는 폐쇄계까지 모델을 확장시켜 동적 평형위치를 갖는 일반 다물체 시스템의 모드특성에 미치는 공차의 영향을 분석하기 위한 해석적인 방법을 제안하였다.

제안된 해석적 방법을 수행하기 위해 다물체 운동방정식으로부터 동적 평형해석을 위한 평형방정식이 유도되었으며, 동적 평형위치에서의 선형화를 통하여 질량, 감쇠 그리고 강성행렬을 구하였다. 또한 유한차분법을 이용하여 설계변수에 대한 모드특성의 민감도 해석을 하였고, 구해진 민감도 정보를 이용하여 해석을 수행한 후 시스템의 모드특성에 미치는 공차의 영향을 분석하였다.

2. 운동방정식

일반적으로 절대좌표계에 대한 구속 다물체계의 운동방정식은 다음과 같은 확장 라그랑지 운동방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{x} + \Phi_x^T \lambda = Q \quad (1)$$

위 식에서 M 은 시스템의 관성행렬(system inertia matrix), Q 는 일반력(generalized force), Φ_x 는 절대좌표에 대한 구속방정식의 자코비안 행렬(Jacobian matrix), 그리고 λ 는 라그랑지 승수(Lagrange multipliers)이다.

이 논문에서는 일반좌표 q_i 를 물체 i 와 물체 i 의 기준물체(reference body) 사이의 조인트 형태에 따라 정의되는 상대좌표로 사용하였다. 일반적으로 시스템의 절대속도 \dot{x} 는 시스템의 일반속도 \dot{q} 와 다음과 같은 속도변환관계식⁽⁷⁾을 가진다.

$$\dot{x} = B\dot{q} \quad (2)$$

여기서 B 는 속도 변환행렬이다.

이 논문에서는 일정 일반속력으로 구동되는 시스템의 운동방정식을 구하기 위하여 일반좌표를 다음과 같이 분할하였다.

$$q = [q_D^T \quad q_R^T]^T \quad (3)$$

여기서 q_D 는 일정 일반속력의 구동 구속조건을 갖는 좌표를, q_R 은 나머지 일반좌표를 나타낸다. 따라서 시스템의 절대속도 \dot{x} 와 절대가속도 \ddot{x} 는 각각 다음과 같다.

$$\dot{x} = B_D \dot{q}_D + B_R \dot{q}_R \quad (4)$$

$$\ddot{x} = B_D \ddot{q}_D + B_R \ddot{q}_R + \dot{B}_D \dot{q}_D + \dot{B}_R \dot{q}_R \quad (5)$$

여기서 \dot{q}_D 는 일정 일반속력을 나타내며 B_D 와 B_R 은 다음과 같이 B 를 구성한다.

$$B = [B_D \quad B_R] \quad (6)$$

따라서 일정 일반속력으로 구동되는 시스템의 운동방정식은 절대좌표계에 대한 운동방정식으로부터 속도변환관계식과 미분의 연쇄법칙⁽⁸⁾등을 이용하면 다음과 같이 유도된다.

$$M^* \ddot{q}_R + \Phi_{q_R}^C{}^T \lambda^C = Q^* \quad (7)$$

여기서 Φ^C 는 폐쇄계에서 절단조인트에 의한 구속방정식이며, M^* 와 Q^* 는 각각 다음과 같다.

$$M^* = B_R^T M B_R \quad (8)$$

$$Q^* = B_R^T Q - B_R^T (M \dot{B}_D \dot{q}_D + M \dot{B}_R \dot{q}_R) \quad (9)$$

그런데 일반좌표 q_R 에 대한 구속방정식의 2차 시간미분식은 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_{q_R}^C \ddot{q}_R = \gamma^C \quad (10)$$

여기서

$$\gamma^C = -(\Phi_{q_R}^C \dot{q}_R)_{q_R} \dot{q}_R - 2\Phi_{q_R}^C \dot{q}_R - \Phi_{q_R}^C \quad (11)$$

위 식(7)과 식(10)를 결합하면 다음과 같은 미분대수방정식형태의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M^* & \Phi_{q_R}^C{}^T \\ \Phi_{q_R}^C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_R \\ \lambda^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^* \\ \gamma^C \end{Bmatrix} \quad (12)$$

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 동

적해석은 위의 식 (12)를 이용하여 수행된다.

3. 평형해석

동적 평형을 가지는 시스템이 일정 일반속력으로 구동될 때, 평형위치에서는 $\dot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{0}$ 이 된다. 이를 운동방정식 (7)에 대입하면 다음과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B}_R^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q}) + \Phi_{q_R}^C{}^T \lambda^C = \mathbf{0} \quad (13)$$

4. 선형화

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 운동방정식은 식 (7)로부터 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}_R + \Phi_{q_R}^C{}^T \lambda^C - \mathbf{Q}^* = \mathbf{0} \quad (14)$$

여기서 일반좌표 \mathbf{q}_R 이 서로 독립적이지 않는 경우 다음과 같이 구속방정식 수만큼의 종속좌표 \mathbf{u} 와 독립좌표 \mathbf{v} 로 분할할 수 있다.

$$\mathbf{q}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{v}^T \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

일반속도 $\dot{\mathbf{q}}_R$ 는 독립속도 $\dot{\mathbf{v}}$ 와 다음과 같은 관계식⁽⁵⁾을 갖는다.

$$\dot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}} \quad (16)$$

여기서 \mathbf{R} 은 편속도행렬로 다음 같이 정의된다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\Phi_{\mathbf{u}}^C{}^{-1} \Phi_{\mathbf{v}}^C \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (17)$$

일정 일반속력을 가지는 구속 다물체계의 운동방정식 (14)의 좌변에 \mathbf{R}^T 를 곱하면 다음과 같이 구속력이 소거되어 독립좌표만으로 구성된 최소한의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}^* \mathbf{R} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{R}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^* = \mathbf{0} \quad (18)$$

운동방정식 (18)을 평형위치 \mathbf{q}^* 에서 선형화하면, 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{M}}^* \delta \ddot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{C}}^* \delta \dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{K}}^* \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (19)$$

여기서 2차 이상의 항을 소거한 선형화된 질량, 감쇠 그리고 강성행렬은 각각 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{M}}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{B}_R^T \mathbf{M} \mathbf{B}_R \mathbf{R} \Big|_{\mathbf{q}^*} \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{C}}^* = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \mathbf{R}^T \mathbf{B}_R^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q} \Big|_{\mathbf{q}^*} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{K}}^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{R}^T \mathbf{B}_R^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{B}}_D \dot{\mathbf{q}}_D - \mathbf{Q} \Big|_{\mathbf{q}^*} \quad (22)$$

5. 민감도 해석 및 공차해석

5.1 감쇠 시스템의 민감도 해석

감쇠 시스템의 경우 고유치 문제⁽⁸⁾는 다음과 같이 표현된다.

$$(\lambda_j^2 \hat{\mathbf{M}} + \lambda_j \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{K}}) \phi_j = \mathbf{0} \quad (23)$$

여기서 ϕ_j 와 λ_j 는 각각 정규화된 모드벡터와 고유치이다. 식 (23)을 설계변수 b 에 대해 미분하고 양변에 ϕ_j^T 를 곱하면 식 (23)과 정규화조건($\phi_j^T (2\lambda_j \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{C}}) \phi_j = 1$)에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial b} = -\phi_j^T (\lambda_j^2 \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}}{\partial b} + \lambda_j \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial b} + \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial b}) \phi_j \quad (24)$$

5.2 전달함수의 민감도 해석

1자유도 감쇠 시스템의 전달함수의 크기는 다음과 같이 표현된다.

$$|H(j\omega)| = \left(\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right)^{-1} \quad (25)$$

설계변수 b 에 대해 직접 미분을 하고 앞에서 구한 질량, 감쇠, 강성행렬과 감쇠 고유진동수의 민감도 정보를 이용하여 전달함수 크기에 대한 민감도 정보를 유도한다.

5.3 해석적 공차해석

감쇠 고유진동수와 전달함수 크기의 민감도 방정식을 다음과 같이 정의하였다.

$$S = \frac{d\omega_{d,j}}{db} \quad (26)$$

$$S = \frac{d|H(j\omega)|}{db} \quad (27)$$

설계변수의 표본(sample)이 정규분포(normal distribution)를 따르고 확률변수가 99.73%의 신뢰구간을 갖는 경우의 분산⁽⁴⁾은 다음과 같다.

$$\sigma^2 = \frac{1}{9} S^2 T^2 \quad (28)$$

여기서 T 는 설계변수 b 의 공차를 σ 는 표준편차(standard deviation)를 나타낸다.

6. 수치예제

6.1 일정 각속도를 갖는 회전 단진자

Fig. 1은 일정 각속도 Ω 로 회전하는 단진자를 나타낸다. 막대의 질량과 길이는 각각 $m=3$ kg, $L=1$ m 이고 회전축과 막대는 회전조인트로 연결되어있다. 또한 회전조인트에는 감쇠계수가 3 Ns/rad인 감쇠력이 작용하고 있다. 막대와 회전축의 사이각을 θ 로 하였으며 초기값은 $\pi/3$ rad이다. 회전축은 가상강체(virtual rigid body)로 간주하였으며, 회전축은 지면과 회전조인트로 연결되어 일정각속도 Ω 로 회전하고 있다.

Fig. 2는 해석적 방법과 몬테카를로법을 이용하여 입력 각속도에 대한 감쇠 고유진동수의 평균값을 비교한 것으로 막대의 길이는 3%, 6%, 12%의 제조공차를 가진다. 몬테카를로법을 사용하기 위해서 정규분포를 따르는 3,000개의 표본이 사용되었다. 감쇠의 영향으로 입력 각속도 3.530와 3.984 rad/s 사이에서 감쇠 고유진동수의 값이 0이 되는 구간이 발생한다. 이는 복소수 형태로 나타나는 고유진동수의 허수항이 0이 되는 구간으로서 과도감쇠 응답 특성이 나타나는 영역이 된다. 과도감쇠 영역에서는 시스템이 동적평형 위치로 빠르게 수렴하게 된다.

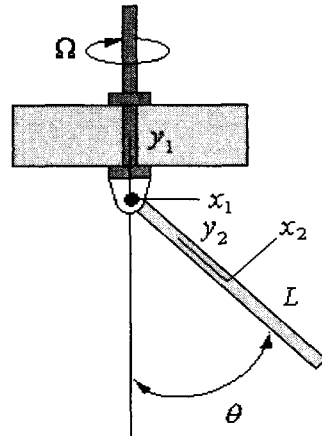


Fig. 1 Rotating simple pendulum

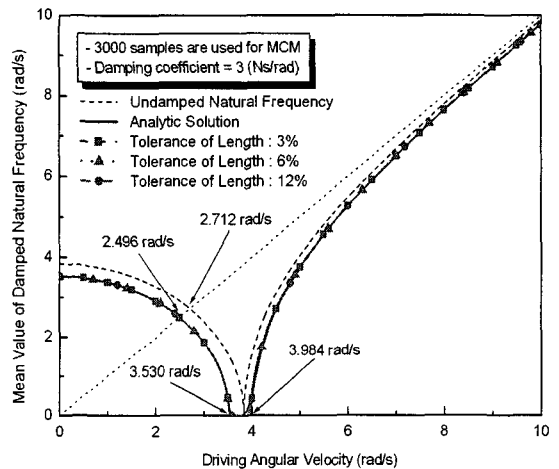


Fig. 2 Mean value of damped natural frequency versus angular velocity

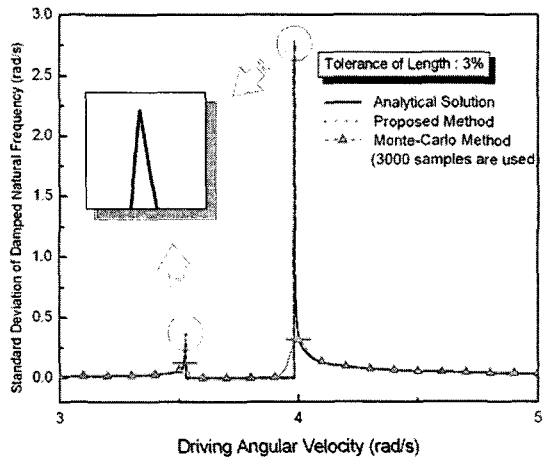


Fig. 3 Accuracy of the proposed method

Fig. 3은 막대의 길이가 3%의 공차를 가질 때 입력 각속도에 따른 고유진동수의 표준편차를 해석적 방법, 제안된 방법 그리고 몬테카를로법을 이용하여 비교한 것이다. 제안된 방법에 의한 결과와 해석하는 일치하고 있는 반면 몬테카를로법을 이용한 결과는 시스템의 응답 특성이 변하는 입력 각속도 근방에서 부정확한 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 막대의 길이가 3%, 6%, 12%의 공차를 가질 때 입력 각속도에 따른 감쇠 고유진동수의 표준편차를 나타낸 것이다. 공차가 커질수록 표준편차가 커지게 되며 감쇠 시스템의 응답 특성이 변하는 두 개의 특이점 근방에서는 몬테카를로법이 제안된 방법과 비교했을 때 모두 부정확한 결과를 보이고 있다.

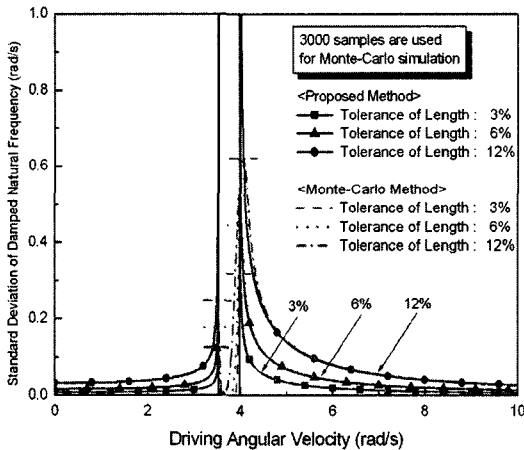


Fig. 4 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

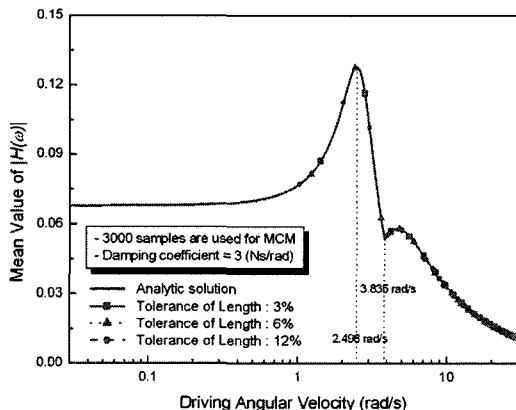


Fig. 5 Mean value of transfer function versus angular velocity

Fig. 5는 해석적 방법과 몬테카를로법을 이용하여 전달함수의 평균값을 비교한 것으로 동적 불안정 영역인 3.835 rad/s의 입력 각속도에서는 변곡점이 생기게 된다. Fig. 6은 막대의 길이가 3%, 6%, 12%의 공차를 가질 때 입력 각속도에 따른 전달함수 크기의 표준편차를 나타낸 것이다. 비감쇠 공진주파수 영역과 동적 불안정 영역에서는 감쇠에 의한 영향만 존재하기 때문에 길이에 대한 공차의 영향은 없다. 하지만 몬테카를로법을 이용한 결과는 두 지점에서 오차를 발생한다.

Table 1은 제안된 방법과 몬테카를로법을 이용했을 때 해석 시간을 비교한 결과로서 제안된 방법이 몬테카를로법 보다 훨씬 더 효율적임을 확인할 수 있다.

6.2 일정 각속도를 갖는 조속기구

Fig.7은 일정 각속도 ω 로 구동되는 스피ن들을 갖는 조속기구를 나타낸다. 그림에서 물체 1,2,3 그리고 4는 각각 스피ن들(spindle), 볼1(ball), 볼2 그리고 칼러(collar)를 나타낸다. 이 시스템은 1 자유도 강체 시스템으로 지면과 물체 1, 물체 1과 물체 2 그리고

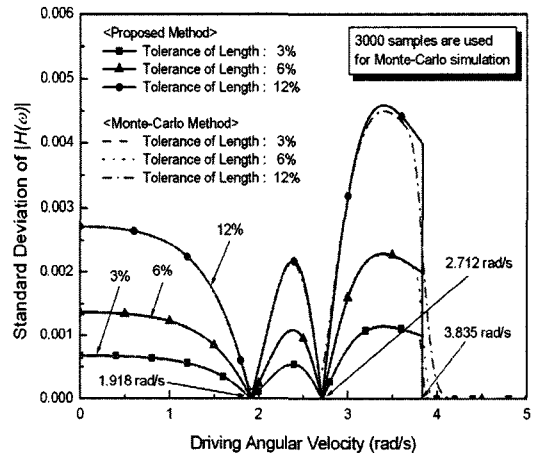


Fig. 6 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

Table 1 Comparison of CPU time between proposed method and Monte-Carlo method

Method	CPU time	Ratio
Proposed method	0.703 sec	1
Monte-Carlo method	448.281 sec	638

물체 1과 물체 3은 각각 회전조인트로, 물체 1과 물체 4는 병진조인트로, 물체 2와 물체 4 그리고 물체 3과 물체 4는 각각 거리가 0.10922m인 일정거리 조인트로 연결되어 있다. 물체 1과 물체 4는 스프링 상수 값이 1000 N/m이고 감쇠계수가 400 Ns/m인 병진 스프링-댐퍼로 연결되어 있으며, 초기상태에서 변형 전 길이는 0.15m이다. 또한 위 시스템은 2개의 페루프를 가지는 폐쇄계이기 때문에 개방계로 만들어 해석하기 위하여 볼과 칼리를 연결하는 두 개의

일정거리 조인트를 절단하였다.

Fig. 8은 해석적 방법과 몬테카를로법을 이용한 결과를 비교한 그래프로 스프링의 강성이 3%, 6%, 12%의 제조공차를 가질 때 회전각속도에 따른 감쇠 고유진동수의 평균값을 나타낸다. Fig. 9는 스프링 강성에만 공차를 적용하여 공차해석을 수행한 결과로 회전각속도에 따른 감쇠 고유진동수의 표준편차를 나타낸 그래프이다. 감쇠비가 최대인 지점에서 표준편차가 커지게 되고 몬테카를로법을 이용한 결과는 제안된 방법과 비교했을 때 오차를 발생한다.

Fig. 10은 해석적 방법과 몬테카를로법을 이용하여 전달함수의 평균값을 비교한 것으로 스프링의 강

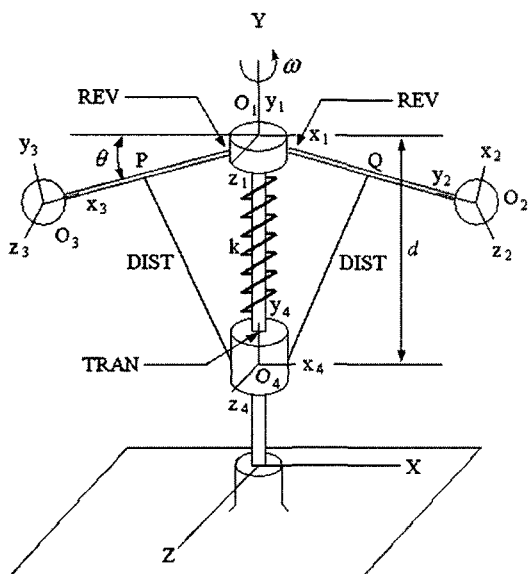


Fig. 7 Governor mechanism

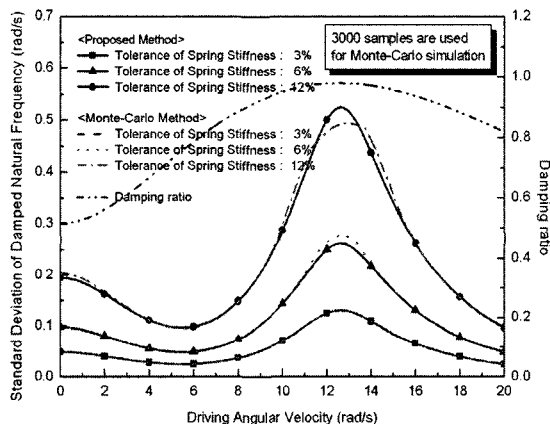


Fig. 9 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

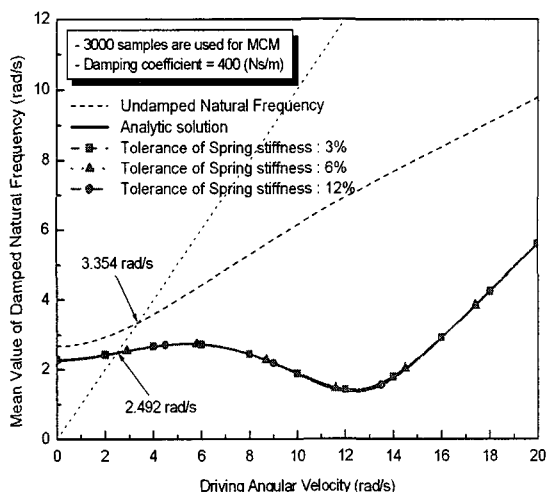


Fig. 8 Mean value of damped natural frequency versus angular velocity

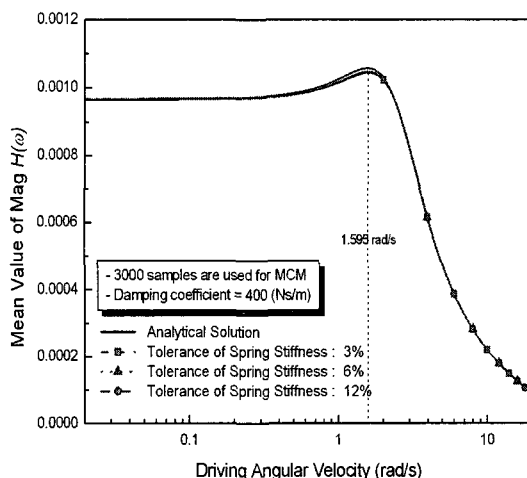


Fig. 10 Mean value of transfer function versus angular velocity

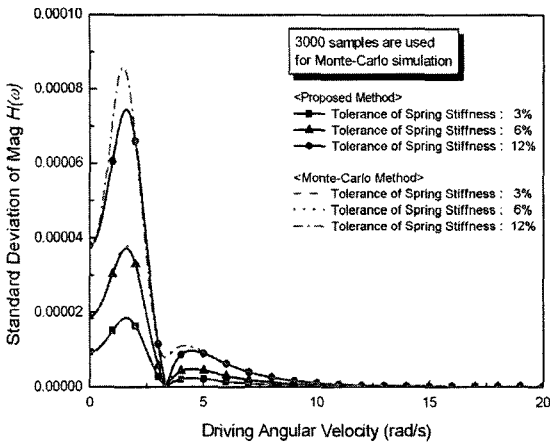


Fig. 11 Comparison of proposed method and Monte-Carlo method

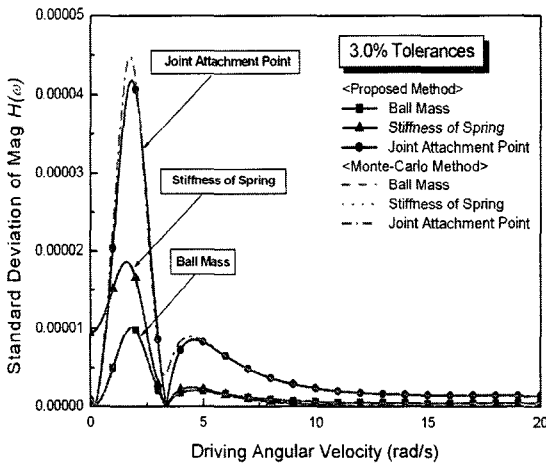


Fig. 12 Parametric studies on the effect of tolerance

Table 2 Comparison of CPU time between proposed method and Monte-Carlo method

Method	CPU time	Ratio
Proposed method	2.188 sec	1
Monte-Carlo method	2525.375 sec	1154

성이 3%, 6%, 12%의 제조공차를 가진다. Fig. 11은 스프링이 공차를 가질 때 입력 각속도에 따른 전달함수의 표준편차를 나타낸 것이다. 전달함수의 피크값이 나타나는 입력 각속도(1.595 rad/s)에서 공차에 의한 영향이 큰 것을 확인할 수 있다. 또한 공차가 커질수록 전달함수의 피크값이 나타나는 입력 각속도 근방에서 몬테카를로법을 이용한 공차해석은

부정확한 결과를 보인다.

Fig. 12는 볼의 질량, 스프링 강성, 일정거리 조인트의 위치에 각각 3%의 공차를 적용하여 전달함수에 대한 공차해석을 수행한 결과이다. 모드특성에 미치는 시스템 인자들의 공차에 의한 영향이 각각 다른 것을 알 수 있고, 제안된 방법과 몬테카를로법에 의한 방법이 동일한 해석 결과를 나타내고 있다. Table 2는 제안된 방법과 몬테카를로법에 의한 공차 해석 시간을 비교한 결과로서 제안된 방법이 몬테카를로법 보다 훨씬 더 효율적임을 확인할 수 있다.

7. 결 론

이 논문에서는 동적 평형상태에 있는 다물체 시스템의 모드특성에 미치는 공차의 영향을 분석하기 위한 해석적인 방법을 제안하고 검증하였다. 다물체 운동방정식을 이용한 해석적 공차해석 방법이 제안되었고 감쇠를 갖는 폐쇄계까지 해석모델을 확장시켜 제안된 방법의 효율성과 정확성을 검증하였다. 또한 설계변수의 공차가 시스템의 고유한 특성인 고유 진동수와 전달함수에 미치는 영향을 살펴보았다. 제안된 방법과 몬테카를로법을 이용한 경우의 각각의 해석시간을 비교하여 제안된 방법을 사용하였을 경우 훨씬 더 적은 해석시간으로도 공차에 의한 영향도를 확인할 수 있음을 규명하였다. 또한, 해석해와의 비교를 통해 제안된 방법의 정확성을 검증하였고, 몬테카를로법을 이용한 결과와의 비교를 통해 제안된 방법이 시스템의 응답 특성이 변하는 특이점 근방과 동적 불안정 영역에서는 몬테카를로법 보다 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Hartenberg, R. S. and Denavit, J., 1964, "Kinematic Synthesis of Linkages", McGraw-Hill, New York.
- (2) Garret, R. E. and Hall, A. S., 1969, "Effects

of Tolerance and Clearance in Linkage Design”, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 91, pp. 198~202.

(3) Dobowsky, S. and Freudenstein, F., 1971, “Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances”, Part 1: Formulation of Dynamic Model, ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 90, pp. 305~316.

(4) Choi, D. H., 2005, “Statistical Tolerance Analysis and Modal Analysis of Multibody Systems”, Hanyang University, Ph. D. Thesis.

(5) Choi, D. H., Park, J. H. and Yoo, H. H., 2005, “Modal Analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Rotational Motion”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 208, pp. 63~76.

(6) Eom, S. M., and Yoo, H. H., 2007, “Tolerance Analysis for Natural Frequencies of Multi-body Systems in Dynamic Equilibrium State”, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 65~71.

(7) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, “A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations”, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. Vol. 108, pp. 176~182.

(8) Lee, I. W. and Jung, G. H., 1999, “Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems: PART I, Distinct Natural Frequencies”, J. of Sound of Vibration, Vol. 222, No. 3, pp. 399~412.