

논문 2007-44SP-3-13

MAXFLAT와 MAXSHCUT 주파수 특성을 갖는 선형 위상 FIR 필터 설계

(A Design Method of Linear Phase FIR filters with MAXFLAT and
MAXSHCUT frequency characteristics)

전 준 현*

(Joon Hyeon Jeon)

요 약

일반적으로 기존의 MAXFLAT FIR 필터의 직접 설계 방법들은 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT 응답에 도달하기 위해 추정 알고리즘들을 사용해야 하는 문제들이 반드시 존재한다. 본 논문에서는 MAXSHCUT 조건을 바탕으로 한 향상된 제안된 방식을 사용하였으며, 기존의 문제들을 해결하였다. 제안된 방식에서는 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역 통과 필터가 임의의 차단주파수에서 설계되도록 필터 차수와 차단주파수 파라미터들로 표현된 핵심 파라미터를 사용 하였다. 결론적으로 제안된 설계 기술은 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터 실현이 가능하며, 설계된 필터들은 모두 100dB 가 넘는 MAXSHCUT을 갖는 것을 알 수가 있다.

Abstract

In general, the earlier methods for the design of MAXFLAT FIR filters have existent problems due to the approximation algorithms used to approach MAXFLAT(maximally flat) response in the passband and the stopband. The proposed approach advanced by using of MAXSHCUT(maximally sharp cutoff) condition in this paper clearly overcomes these problems. In this approach, we use a key parameter represented with filter-order and cutoff-frequency parameters for obtaining the lowpass filters with the MAXFLAT and MAXSHCUT characteristics in the frequency domain. Consequently, this design technique leads to new MAXFLAT and MAXSHCUT FIR digital filter, which can achieve sharp-cutoff responses with the stopband attenuation exceeding 100 dB almost everywhere.

Keywords: maximally flat FIR filter, FIR filter, nonrecursive filter

I. 서 론

디지털 영상과 음성 신호처리 응용 시스템에서 선형 위상(linear phase)을 갖는 FIR(Finite Impulse Response) 필터는 매우 중요하다^[1]. J. H. McClellane 등은 통과대역(passband) 과 저지대역(stopband)에서 동등 리플(equiripple)을 근사 추정하는 FIR 필터 설계 방

식을 제안하였으나, 설계된 필터들의 임펄스 응답에서 에코와 급경사(sharp) 차단 주파수 응답에 따른 단위 응답에서의 공명(ringing) 현상이 발생하는 문제점이 있다^[2]. 이러한 문제점들을 해결하는 방법으로 통과대역 과 저지대역에서 MAXFLAT(maximal flat)한 진폭 특성을 갖는 MAXFLAT FIR 필터가 제안되었다. 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계 방법들은 주파수 영역에서 MAXFLAT에 도달하기 위해 사용하였던 근사 추정으로 인한 부정확성 오차를 갖게 된다^[3~7]. 더욱이 이러한 MAXFLAT FIR 필터의 차단 응답은 가파른 주파수 특성을 갖지 못하였고, 근사 추정 오차로 인해 차단 주파수의 부정확성이 존재할 수 있다. 예를 들면, S. Samadi

* 정회원, 동국대학교 정보산업대학 정보통신학과
(Dept. of Information and Communication
Engineering, Dongguk University)

※ 본 연구는 동국대학교 논문게재장려금 지원으로 이루어졌음

접수일자: 2007년1월3일, 수정완료일: 2007년3월19일

등은 이론적인 폐쇄형 전달 함수(closed form transform function)를 이용한 저 지연(low delay) MAXFLAT FIR 필터들의 설계 방식을 제안하였으나 설계된 필터의 차단주파수 응답은 가파른 주파수 특성을 갖지 못하였으며^[4], A. Ogata 등은 통과대역에서의 MAXFLAT 특성과 저지대역에서의 이퀄리플(equiripple) 특성을 갖는 저지연 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식을 제안하였으나, 이를 입증할 논리적인 폐쇄형 전달 함수를 제안하지 않았다^[5]. 또한 Aikawa 등은 Remez 추정 알고리즘에 의한 저지연 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식을 제안하였으나 80dB 이하의 차단주파수 응답을 나타내었다^[7].

본 논문에서는 MAXFLAT와 MAXSHCUT (maximally sharp cutoff)을 갖는 FIR 저역통과 필터를 주파수 영역에서 수학적으로 쉽게 설계할 수 있는 폐쇄형 전달함수를 제안하였으며, 제안된 폐쇄형 전달함수는 저역통과 필터들이 MAXFLAT와 MAXSHCUT 주파수 특성을 만족하도록 2 개의 전달함수의 곱으로 구성되어 있다. 또한 이를 바탕으로 본 논문에서는 필터 차수와 차단주파수 파라미터들로 표현되는 새로운 핵심 파라미터를 이용하여 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터를 쉽고 간편하게 설계할 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 방법을 사용하여 구현된 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들은 모두 100dB가 넘는 MAXSHCUT를 갖는 차단주파수를 갖는 것을 알 수가 있었다.

제II장에서는 본 논문에서 제안한 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들의 폐쇄형 전달함수를 설명하였으며, 제III장에서는 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터 설계 기술에 대한 설명과 필터 설계를 위한 새로운 공식들을 나타내었다. 제IV장에서는 새로운 필터 설계 기술에 의해 구현된 필터들에 대한 성능을 분석하였으며, 끝으로 제V장에서는 결론을 맺었다.

II. FIR 저역통과 필터의 폐쇄형 전달함수

일반적으로 N 차수를 갖는 선형위상 FIR 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$H_N(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \quad (1)$$

여기서 필터 계수는 $h_n = h_{N-n}$ 을 만족한다. 위 식(1)은 $z = e^{jw}$ 일 때 진폭응답 $H_N(w)$ 와 위상 응답

$\theta_N(w)$ 로 나타낼 수가 있으며, $H_N(e^{jw}) = H_N(w)e^{j\theta_N(w)}$ 로 표현된다. 이때 FIR 저역통과 필터가 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT하고 천이대역(transition band)에서 MAXSHCUT을 갖기 위해서는 필터의 주파수 응답 $H_N(w)$ 가 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다.

$$H_N(w)|_{w=0} = 1 \quad (2a)$$

$$\left. \frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = 0, \quad n=1,2,3,\dots,N-M-1 \quad (2b)$$

$$\left. \frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \right|_{w=\pm\pi} = 0, \quad n=0,1,2,\dots,M-1 \quad (2c)$$

$$H_N(w)|_{w=w_c} = 0.70795 \quad (2d)$$

여기서 파라메타 M 은 임의의 양의 상수이며, w_c 는 저역통과 필터의 차단 주파수이다. 위 식에서 $N-M$ 과 M 은 $H_N(w)$ 가 $w=0$ 와 $w=\pm\pi$ 에서 MAXFLAT을 만족하는 최대 차수(maximum degree)이다. 따라서 본 논문의 최적 필터 설계에서는 $w=0$ 와 $w=\pm\pi$ 에서 MAXFLAT와 차단주파수 w_c 에서 MAXSHCUT을 만족하는 N 과 M 의 값을 구하는 것이 매우 중요하다.

먼저 설계하고자 하는 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 차수가 N 인 FIR 저역통과 필터의 전달함수를 다음과 같이 가정하자.

$$H_N(z) = Q(z) \cdot R(z) \quad (3)$$

여기서 $Q(z)$ 와 $R(z)$ 는 각각 아래와 같다.

$$Q(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right)^M \quad (4)$$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{N-M} \alpha_n z^{-n} \quad (5)$$

이때 $R(z)$ 의 계수는 $\alpha_n = \alpha_{(N-M)-n}$ 을 만족한다. 식(3)에서 $H_N(z)$ 의 전달함수는 $z=-1$ 에서 최소한 M 개의 제로(zero)가 존재하며, 식(2c)의 저지대역에서의 MAXFLAT 조건을 항상 만족하게 된다. 또한 $H_N(z)$ 다항식은 주어진 $R(z)$ 에 대해 아래 식과 같이 표현될 수 있으며

$$H_N(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot H_{N-1}(z) = \dots \dots \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right)^M \cdot H_{N-M}(z) \quad (6)$$

여기서 $H_{N-M}(z) = R(z)$ 이 된다. 이때 식 (6)에서 $H_N(z)$ 과 $H_{N-1}(z)$ 사이의 주파수 응답은

$$H_N(w) = \left(\cos \frac{w}{2}\right) \cdot H_{N-1}(w) \quad (7)$$

와 같다. 식(7)은 $w = \pm\pi$ 에서 MAXFLAT 파라메타 M 을 갖는 $H_N(w)$ 는 MAXFLAT 파라메타 $M-1$ 을 갖는 $H_{N-1}(w)$ 보다 FLAT(flatness)한 진폭 응답을 갖는다는 것을 의미한다. 이것은 $H_N(z)$ 의 FLAT는 식 (4)의 $Q(z)$ 에 종속되어 있기 때문이며, $Q(z)$ 의 FLAT한 진폭 응답에 의해 쉽게 설명된다. 그림 1은 $Q(z)$ 의 차수인 M 에 따른 진폭 응답인 $Q(w)$ 을 나타낸 것으로 M 이 증가할수록 $Q(w)$ 의 대역폭은 줄어드는 반면 통과대역과 저지대역이 점점 FLAT한 진폭 응답을 갖는 것을 알 수가 있다. 제안된 폐쇄형 전달함수 $H_N(z)$ 의 주파수 응답 $H_N(w)$ 은

$$H_N(w) = Q(w) \cdot R(w) \quad (8)$$

과 같으며, 여기서 $Q(w)$ 는

$$Q(w) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^M \quad (9)$$

이며, $R(w)$ 는 $N-M=2L$ 이 되는 짝수 차수일 때

$$R(w) = \alpha_L + \sum_{n=1}^L (2 \cdot \alpha_{L-n}) \cdot \cos nw \quad (10)$$

이고 $N-M=2L+1$ 이 되는 홀수 차수일 때는

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{n=0}^L (2 \cdot \alpha_{L-n}) \cdot \cos(n + \frac{1}{2})w \\ &= \left(\cos \frac{w}{2}\right) \cdot \left\{ \sum_{n=0}^L (-1)^n \alpha_{L-n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^L \left(\sum_{k=n}^L 2(-1)^{n+k} \alpha_{L-k} \right) \cdot \cos(n - \frac{1}{2})w \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같다. 위 식에서 $H_N(w)$ 필터 차수는 $R(w)$ 의 차수가 짝수일 때 $N=M+2L$ 이 되며 홀수 차수일 때는 $N=M+2L+1$ 이 된다. 식(11)은 $R(w)$ 가 홀수 차수 $2L+1$ 인 경우 $R(w)$ 는 짝수 차수 $2L$ 인 다항식과 한 개

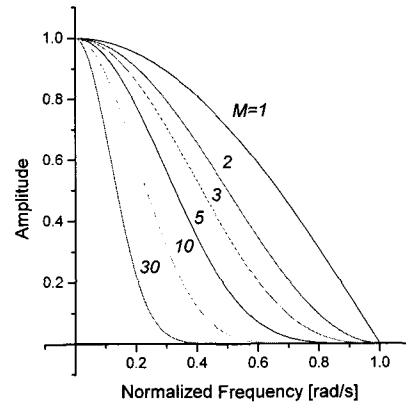


그림 1. M 에 따른 $Q(w)$ 의 주파수 응답
Fig. 1. Frequency response of $Q(w)$ due to M .

의 제로 식으로 인수 분해되어 표현될 수 있다는 것을 나타낸 것이다. 즉, $R(w)$ 가 홀수 차수를 갖더라도 $Q(w)$ 차수를 M 에서 $M+1$ 로 하면 $R(w)$ 가 짝수 차수를 가질 때 설계와 동일하게 된다. 따라서 본 논문에서는 $R(w)$ 가 짝수 차수를 갖는 것을 전제로 하여 MAXFLAT FIR 필터를 설계하였다. 식(8)의 결과로부터 주어진 $R(w)$ 과 M 에 대하여 M 개의 다른 FLAT(flatness) 진폭 응답과 롤오프(roll off)를 갖는 $H_N(w)$ 이 존재한다는 사실을 알 수가 있다.

III. MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터 설계

본 논문에서는 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT와 천이대역에서 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터의 최대 차수, M 과 L 로 표현되는, $N=M+2L$ 을 수학적으로 구할 수 있는 핵심(key) 파라메타를 새롭게 정의하였다. 제안된 설계 방식의 핵심은 식(8)의 폐쇄 필터 주파수 함수를 바탕으로 파라메타 L 이 주어질 때 임의로 요구된 차단주파수에서 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 필터를 설계하는 기술로서 최적의 핵심 파라메타 α_0 을 구하여 필터의 최적 차수 M 또는 $N=M+2L$ 을 결정하는 것이다. 새로운 핵심(key) 파라메타를 구하기에 앞서서 주어진 임의의 파라메타들인 L 과 M 에 대하여 먼저 식(2)에서 주어진 MAXFLAT 와 MAXSHCUT 조건 식을 이용하여 식 (10)에서 주어진 짝수 차수 $2L$ 인 $R(w)$ 의 $L+1$ 계수 값들을 정의해야 한다. 주어진 식(8)에 대하여 $w=0$ 의 MAXFLAT 조건식인 식(2a)와 식(2b)을 각각 적용하면

다음과 같이 표현된다.

$$H_N(w)|_{w=0} = \alpha_L + \sum_{n=1}^L (2 \cdot \alpha_{L-n}) = 1 \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left. \frac{\partial^{n-r} Q(w)}{\partial w^{n-r}} \cdot \frac{\partial^r R(w)}{\partial w^r} \right|_{w=0} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2L-1 \quad (13)$$

여기서 $\partial^0 Q(w)/\partial w^0|_{w=0} = 1$ 과 $\partial^0 R(w)/\partial w^0|_{w=0} = 1$ 이며, $w=0$ 일 때 $Q(w)$ 과 $R(w)$ 의 미분 값들은 각각 다음을 만족하게 된다.

$$\left. \frac{\partial^k Q(w)}{\partial w^k} \right|_{w=0} = \begin{cases} 0, & k = 1, 3, 5 \dots n \\ (-1)^{k/2} \cdot \frac{M^{k/2}}{2^k}, & k = 2, 4 \dots n \end{cases} \quad (14a)$$

$$\left. \frac{\partial^k R(w)}{\partial w^k} \right|_{w=0} = \begin{cases} 0, & k = 1, 3 \dots n \\ (-1)^{k/2} 2 \sum_{m=1}^L m^k \cdot \alpha_{L-m}, & k = 2, 4 \dots n \end{cases} \quad (14b)$$

여기서 () 는

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (14c)$$

위 식으로부터 $L+1$ 개의 미지계수(unknown coefficients)인 $\{\alpha_n | n=0, 1, 2, \dots, L\}$ 을 갖는 L 개의 연립 방정식을 유도할 수가 있으며, 그 결과 $\{\alpha_n | n=1, 2, \dots, L\}$ 로 표현되는 L 개의 미지계수들은 파라메타 M 과 α_0 만으로 아래의 식과 같이 새롭게 정의할 수가 있다.

$$\alpha_n = \begin{cases} -2L \cdot \alpha_0 + f_M(L-1), & n=1 \\ (-1)^n \cdot (n-1)L(2L-1) \cdot \alpha_0 + f_M(L-n), & n=2, \dots, L-1 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\alpha_L = 1 + 2\alpha_0(2L-1) \cdot \left\{ 1 - L \sum_{n=2}^{L-1} (-1)^n (n-1) \right\} - 2 \sum_{n=1}^{L-1} f_M(L-n), \quad L \geq 2 \quad (15b)$$

여기서 $f_M(n)$ 은 MAXFLAT 상수로서 다음 식과 같다.

$$f_M(n) = \sum_{l=n}^{L-1} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2l}} \binom{M/2-1+l}{l} \binom{2l}{l-n} \quad (15c)$$

더욱이 식(2d)의 차단 주파수 조건과 식(15)으로부터 α_0 는 파라메타 M 만의 관계식으로 새롭게 정의를 할 수가 있으며 다음과 같다.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{L-1} 2f_M(n) \cdot (1 - \cos n w_c) - 0.70795 \left(\cos \frac{w_c}{2} \right)^{-M} \right) \times \left(L - \sum_{n=1}^{L-1} \cos n w_c \right)^{-1} \quad (16)$$

위의 식(15)와 식(16)의 결과로부터 L 개의 미지계수인 $\{\alpha_n | n=1, 2, \dots, L\}$ 는 파라메타 M 과 α_0 의 관계식으로 정의할 수가 있으며, α_0 는 파라메타 M 과 주어진 차단 주파수 w_c 의 관계식으로 표현되므로 결국 $L+1$ 개의 미지계수들인 $\{\alpha_n | n=0, 1, 2, \dots, L\}$ 는 주어진 L 과 w_c 에 대하여 모두 파라메타 M 의 관계식으로 정의됨이 수학적으로 증명이 된다. 이러한 이유로 만약 파라메타 M 이 잘못 결정된다면 필터의 통과대역에서의 오버슈트(overshoot) 또는 저지대역에서의 리플(ripple)이 발생하는 중요한 원인이 된다. 그림 2는 $L=1$ 과 $w_c = \pi/3$ 이 주어질 때 파라메타 M 에 의해 결정된 α_0 에 따른 진폭 응답 $H_N(w)$ 을 나타낸 것으로 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 최대 차수 M 을 결정하는 것이

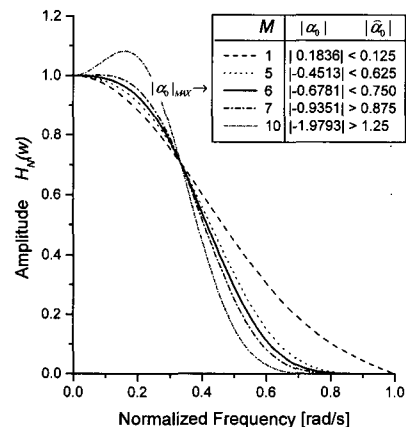


그림 2. $L=1$ 과 $w_c = \pi/3$ 일 때 파라메타 M 에 의해 결정된 α_0 에 따른 진폭 응답 $H_N(w)$
 Fig. 2. The amplitude response $H_N(w)$ due to a key parameter α_0 and its corresponding M for the case $L=1$ and $w_c = \pi/3$.

중요하다는 것을 보여준 예이다. 따라서 위의 식(16)으로부터 구한 α_0 는 선형 위상 FIR 저역통과 필터가 임의로 요구된 차단주파수에서 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖도록 하는 최대 차수 $N = M + 2L$ 또는 M 을 결정하는 핵심(key) 파라메타가 되는데, 이것은, α_0 의 한계 값으로부터 α_0 의 최적값을 구하여 파라메타 M 의 최대 차수를 결정할 수가 있기 때문이다.

핵심 파라메타 α_0 의 최대 한계치를 구하기 전에 먼저 차단주파수 조건식인 식(16)을 고려하지 않고 단지 MAXFLAT 조건식인 식(12)와 식(13)으로부터 구해진 필터 계수들을 $\{\hat{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 라고 가정하자. 이때 설계된 필터는 임의의 차단주파수가 아닌 주어진 M 과 L 파라메타에 의해 확정된 차단 주파수를 갖게 된다. 이것은 필터 계수들인 $\{\hat{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 이 단지 주어진 M 과 L 파라메타들에 의해 결정되기 때문이며, 이때 필터는 M 과 L 만으로 확정된 차단주파수에서 최대 차수 $N = M + 2L$ 을 갖는 MAXFLAT FIR 필터가 된다. 따라서 만약 M 이 증가한다면 필터의 차단주파수는 그림 1에서 보여준 바와 같이 감소하게 된다. 이 경우에 주어진 파라메타 L 과 M 에 의해 결정된 $\{\hat{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 은 확정된 차단주파수에서 FIR 필터가 MAXFLAT을 만족하는 최적의 계수들이 되며, 앞서 임의의 차단주파수 조건을 갖도록 설계된 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 계수들의 최대 한계치가 된다. 이때 앞에서 논의된 바와 같이 $\{\hat{\alpha}_n | n=1,2,\dots,L\}$ 과 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 은 각각 $\hat{\alpha}_0$ 와 α_0 으로 표현되므로 $\hat{\alpha}_0$ 를 핵심 파라메타 α_0 의 최대 한계치로 정의 할 수가 있다. 결론적으로 핵심 파라메타 α_0 는 MAXFLAT 조건식인 식(12)와 식(13) 그리고 임의의 차단주파수 조건인 식(16)에 의해 설계되었기 때문에 핵심 파라메타 α_0 와 α_0 에 해당하는 $\hat{\alpha}_0$ 을 비교하여 MAXFLAT을 만족하는 최대 차수 M 을 결정할 수가 있다. 파라메타 M 이 짝수라고 가정할 때 최대한계치 $\hat{\alpha}_0$ 는 식(12)와 식(13)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\alpha}_0 = (-1)^L \frac{1}{2^{2L}} \binom{M/2+L-1}{L} \quad (17)$$

식(17)을 사용하여 파라메타 M 으로 인한 핵심 파라메타 α_0 의 발산을 방지하기 위해서는 아래의 식에서 나타

낸 바와 같이 α_0 의 절대 값이 최대한계치 $\hat{\alpha}_0$ 의 절대값 보다는 작아야 한다.

$$|\alpha_0| \leq |\hat{\alpha}_0| \quad (18)$$

위 식에서 $| \cdot |$ 는 절대값 기호이며, 식(15)의 관계식과 위의 조건식으로부터 $|\alpha_n| \leq |\hat{\alpha}_n|$ 는 항상 만족하게 된다. 위 식에서 절대값을 사용한 이유는 FIR 필터는 항상 켈레 형태의 제로(zero)들을 가지고 있기 때문이다. MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터 설계를 위한 핵심 파라메타 α_0 의 최적 값은 식(18)의 부등식을 만족하는 최대차수 M 을 구함으로써 쉽게 구할 수가 있다. 그림 2는 $L=1$ 와 $w_c = \pi/3$ 일 때 핵심 파라메타의 최적 값 $\alpha_0 = -0.6781$ 과 최적차수 $M=6$ 을 결정하는 예를 나타낸 것이다. 결론적으로 본 논문에서는 식(3)의 폐쇄 필터 전달함수를 바탕으로 핵심 파라메타를 새롭게 정의하고 설계하는 방식을 사용하여 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 필터를 수학적으로 완전하게 구현할 수 있음을 증명하였다.

IV. 설계 사례

본 절에서는 제안된 설계 방식을 바탕으로 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터를 구현하여 설계의 타당성을 입증하고자 한다.

[설계 예제 1]

$L=1$ 이고 $w_c = \pi/12, \pi/9, \pi/6, \pi/3$ [rad/s]가 주어질 때, $L=1$ 을 갖는 폐쇄형 전달함수는 협대역폭을 갖는 저역통과 필터 설계에서는 매우 적합하다. 필터는 매우 간단하며 설계 또한 빠르게 할 수가 있다. 주어진 조건인 $L=1$ 일 때 $R(w)$ 는 차수가 2인 짝수일 때

$$R(w) = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_0 \cos w \quad (19a)$$

이며, 만약 차수가 3인 홀수라면

$$R(w) = (\cos w / 2) \cdot \{(\alpha_1 - \alpha_0) + 2 \cdot \alpha_0 \cos \frac{w}{2}\} \quad (19b)$$

와 같이 나타낼 수가 있다. 앞에서 설명된 바와 같이 차수가 홀수일지라도 제로(zero) 인수를 제외하면 짝수 차수의 경우와 마찬가지로 미지수가 2개로서 홀수 차수의 설계와 동일한 것을 알 수가 있다. 표1은 주어진

$L = 1$ 와 w_c 에 따라 설계된 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들의 파라메타들을 구한 것이며, 그림 3.a는 표 1의 파라메타 값들에 의한 필터 진폭 응답 $H_N(w)$ 을 나타낸 것이다. 표와 그림에서 나타낸 바와 같이 설계된 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들은 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT 특성과 천이대역에서 MAXSHCUT 특성을 갖고 있음이 증명되었다.

[설계 예제 2]

$L = 2$ 이고 $w_c = \pi/9, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ [rad/s]가 주어질 때, 위에서 언급한 바와 같이 주어진 $L = 2$ 에 따른 $R(w)$ 는 차수가 4인 짝수 경우

$$R(w) = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_1 \cos w + 2 \cdot \alpha_0 \cos 2w \quad (20a)$$

이며, 차수가 5인 홀수 갖는 경우에는 다음과 같다.

$$R(w) = (\cos w/2) \cdot \{(\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0) + 2(\alpha_1 - \alpha_0) \cos \frac{w}{2} + 2 \cdot \alpha_0 \cos \frac{3}{2} w\} \quad (20b)$$

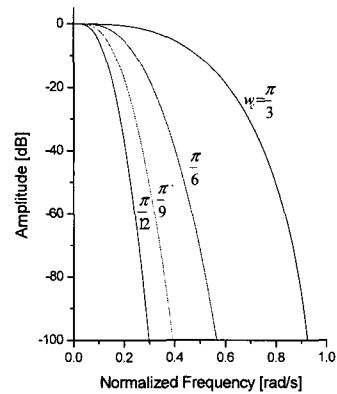
주어진 $L = 2$ 와 w_c 에 대하여 폐쇄형 전달함수와 MAXFLAT와 MAXSHCUT 공식을 사용하였을 때, 표2는 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들의 파라메타들을 구한 것이며, 그림3.b는 표2의 파라메타 값들에 의한 필터 진폭 응답 $H_N(w)$ 을 나타낸 것이다. 표 2에서 차단주파수 w_c 가 작을수록 핵심 파라메타 α_0 와 해당되는 최대한계치 $\hat{\alpha}_0$ 가 증가할 수 있는 것을 알 수가 있다. 표와 그림에서 나타낸 바와 같이 $L = 2$ 일 때 설계된 MAXFLAT와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들은 앞서 언급한 $L = 1$ 일 때와 마찬가지로 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT 특성

표 1. 설계사례1에 대한 규격과 최적값
Table 1. Specifications and optimal values for Example.

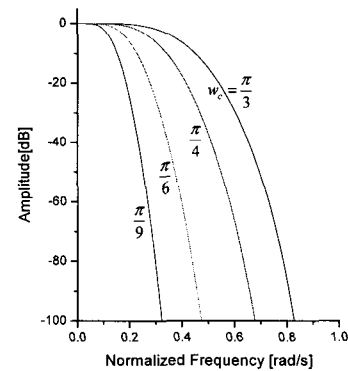
Specifications	Cutoff point w_c			
	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/6$	$\pi/3$
Optimal degree M	124	69	30	6
Maximum limit $\hat{\alpha}_0$	-15.5	-8.625	-3.750	-0.750
Key parameter α_0	-15.4730	-8.5882	-3.7433	-0.6781
Filter coeff. α_1	31.9461	18.1764	8.4866	2.3562

표 2. 설계사례1에 대한 규격과 최적값
Table 2. Specifications and optimal values for Example 2.

Specifications	Cutoff point w_c			
	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/4$	$\pi/3$
Optimal degree M	121	52	21	11
Maximum limit $\hat{\alpha}_0$	116.2734	21.9375	3.7734	1.1172
Key parameter α_0	116.0843	21.6296	3.4839	1.06979
Filter coeff. α_1	-470.8371	-93.0185	-16.5605	-5.6542
Filter coeff. α_2	727.7557	143.7777	27.1533	10.1687



(a) $L = 1$



(b) $L = 2$

그림 3. 차단주파수 $w = w_c$ 에 따른 $H_N(w)$ 의 진폭 응답

Fig. 3. The amplitude response $H_N(w)$ due to a cutoff point $w = w_c$.

과 천이대역에서 MAXSHCUT 특성을 갖고 있음이 증명되었다. 그림 4는 동일한 차단 주파수를 가질 때 $L = 1$ 과 $L = 2$ 에 따른 진폭 응답을 비교한 것으로 $L = 2$ 일 때 $H_N(w)$ 의 진폭은 응답이 $L = 1$ 일 때 보다 더 나은 MAXFLAT와 MAXSHCUT 특성을 갖는다는 것을 알 수가 있다.

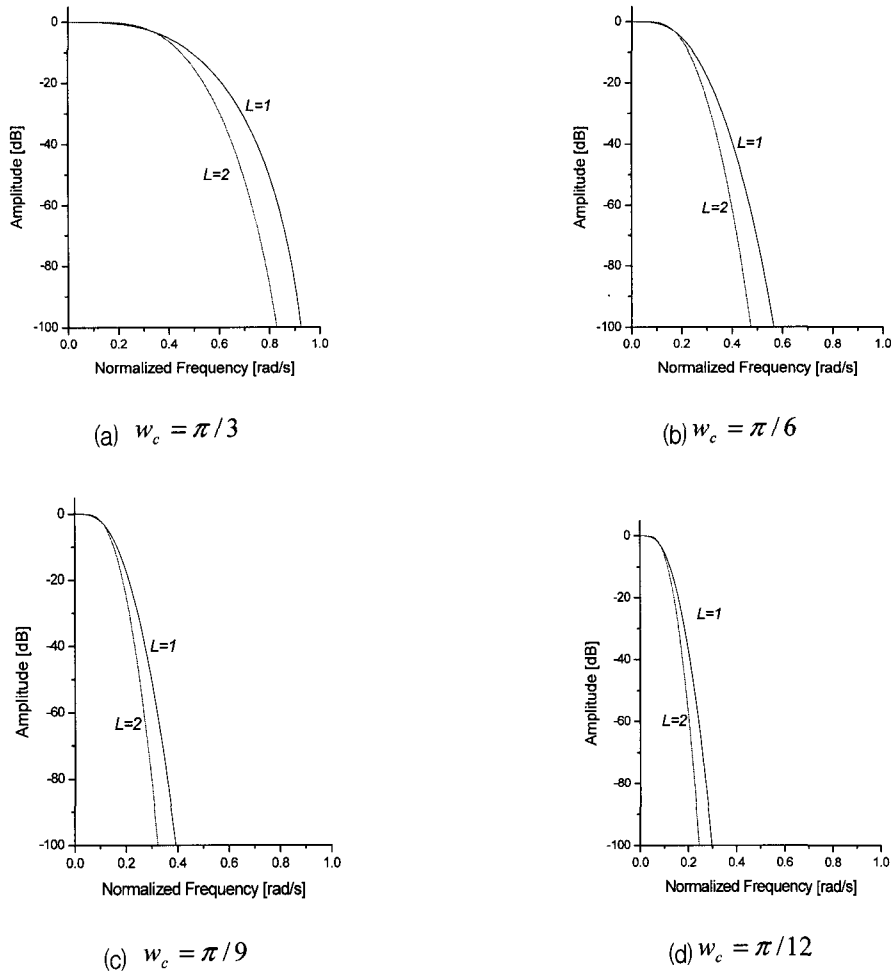


그림 4. $L=1$ 과 $L=2$ 이 주어질 때 w_c 에 따른 진폭 응답 비교

Fig. 4. Comparison of the amplitude responses for the given $L=1$ and $L=2$ due to w_c .

V. 결 론

앞에서 설명한 바와 같이 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계 방법들은 차단 주파수나 MAXFLAT을 추정하는 알고리즘을 사용하기 때문에 추정 오차가 존재 한다. 본 논문에서 MAXSHCUT 차단 주파수 조건을 고려한 향상된 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식을 사용하여 이러한 문제점들을 해결하였다.

본 논문에서는 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터를 주파수 영역에서 수학적으로 쉽게 설계할 수 있는 폐쇄형 전달함수를 제안하였으며, 제안된 폐쇄형 전달함수는 설계하고자 하는 FIR 필터들이 MAXFLAT 와 MAXSHCUT 주파수 특성을 만족하도록 2 개의 전달함수의 곱으로 구성되어 있다. 또한 이를 바탕으로 본 논문에서는 필터 차수와 차단주파수 파라미터들로 표현되는 새로운 핵심 파라미터를 이용하여

MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터를 쉽고 간편하게 설계할 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 방법을 사용하여 구현된 MAXFLAT 와 MAXSHCUT을 갖는 FIR 저역통과 필터들은 모두 100dB 가 넘는 MAXSHCUT를 갖는 차단주파수를 갖는 것을 알 수가 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Joonhyeon Jeon and Jaekyoon Kim, "New linear phase QMF filter design for sub-band coding," Electronics letters, Vol.27, No.4, pp.319-320, 1991.
- [2] T. W. Parks, and J. H. McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase," IEEE Trans Circuit Theory, Vol.19, No.2, pp.189-194.1972.
- [3] O. Herrmann. "On the approximation problem in

- nonrecursive digital filter design." IEEE Trans Circuit Theory Vol.18, pp.411-413. 1971.
- [4] S. Samadi, A. Nishihara and H. Iwakura. "Universal maximally flat low-pass FIR systems," IEEE Trans. Signal Processing Vol.21, pp.1956-1964, 2000.
- [5] Yukio MORI and Naoyuki AIKAWA. "A closed form transfer function of low delay bandpass FIR filters with maximally flat characteristics in the passband and the transmission zeros in the stopband." ICICS-PCM 2006, pp.1884-1888, 2003.
- [6] A. Ogata, N. Aikawa and M. Sato. "A design method of low delay bandpass filters." BEE Proc. 2000 ISCAS'00, Geneva, Switzerland, 2000.
- [7] N. Aikawa and M. Sato. "A design method of low delay lowpass FIR digital filters with maximally flat characteristics in the passband and the transition zero in the stopband," ISCAS'02 Vol.1, pp.I-405 -08, 2002.

 저 자 소 개



전 준 현(정회원)

1984년 2월 동국대학교 전자공학과 학사
 1986년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사
 1991년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사
 1991년 9월~1999년 12월 한국통신
 1999년 12월~2000년 6월 한누리살로만 투자증권
 2000년 6월~2001년 2월 ㈜드림라인

2001년 9월~현재 동국대학교 정보통신공학과 조교수

<주관심분야 : 영상 압축 및 통신, 디지털 필터 등>