

비정규 측정오차의 경우 측정시스템 변동과 PTR 추정

장무성* · 김상부**

* 창원대학교 산업시스템공학과

Estimations of Measurement System Variability and PTR under Non-normal Measurement Error

Mu Seong Chang* · Sang Boo Kim**

* Department of Industrial and Systems Engineering, Changwon National University

Key Words : Nonnormal Measurement Error, Measurement System Analysis, Precision-to-tolerance Ratio

Abstract

ANOVA is widely used for measurement system analysis. It assumes that the measurement error is normally distributed, which may not be seen in some industrial cases. In this study, the estimates of the measurement system variability and PTR (precision-to-tolerance ratio) are obtained by using weighted standard deviation for the case where the measurement error is non-normally distributed. The Standard Bootstrap method is used for estimating confidence intervals of measurement system variability and PTR. The point and confidence interval estimates for the cases with normally distributed measurement error are compared to those with non-normally distributed measurement errors through computer simulation.

1. 서 론

Six Sigma와 같은 경영혁신방법론은 데이터에 기반을 둔 의사결정을 추구하기 때문에 객관적이고 신뢰성 있는 데이터를 얻는 것은 매우 중요하며 이를 위하여 일반적으로 측정시스템 분석(Measurement System Analysis)을 실시하고 있다. 측정시스템 분석 중 특히 게이지 R&R(Repeatability & Reproducibility) 연구는 측정시스템 변동을 총 변동 혹은 규격과 비교하여 이를 근거로 측정시스템의 사용여부를 판단한다. 게이지 R&R 연구는 측정시스템의 재현성과 반복성에 대한 지표를 제공하며, 대표적인 측정평가지표로 %R&R과 PTR을 사용한다. 만일 이러한 지표 값들이 높게 나타나는 경우에는 공정의 상태를 바르게 판단할 수 없거나 혹은 제품의 합격 판정에 있어서 불합격품을 합격품으로, 합격품을 불

합격품으로 잘못 판단하는 비율이 높아지게 된다.

이제까지 측정시스템 분석에 관한 연구들을 살펴 보면, Montgomery and Runger(1993~1994a, 1993~1994b)는 전통적인 게이지 R&R 분석방법($\bar{X}-R$ 방법)의 대안으로서 실험계획법(ANOVA 방법)을 이용한 접근법을 제안하고 측정시스템 분석의 전반적인 계획(부품의 수, 부품 당 측정횟수, 실험계획, 부품과 작업자간의 교호작용)에 대한 지침과 반복성, 재현성 등 관심 있는 변동에 대한 신뢰구간을 구하는 방법과 지분실험계획법의 사용에 대해 언급하였다. Pan(2004)은 게이지 R&R 분석에서 결정해야할 부품 수(n), 작업자 수(p), 부품당 측정횟수(k)의 최적 값을 측정변동에 대한 신뢰구간의 최소 길이를 이용하여 구하였다. 그리고 Burdick, Borrer, and Montgomery(2003)는 분산분석 관점에서 측정지표, 측정변동에 대한 2가지 신뢰구간, 생산자 오류와 소비자 오류, 게이지 R&R 설계, 기타 측정시스템 분야(혼합 모형, 2개의 측정시스템 비교, 계수형

† 교신저자 sbkim@changwon.ac.kr

측정시스템분석, 절단된 데이터, 파괴검사, 2차원 데이터)에 대해 정리하였다.

Burdick and Larsen(1997)은 측정시스템 변동에 대한 수정 대표본 근사(Modified Large Sample ; MLS), SATT(Satterthwaite's approach), AIAG(Auto-motive Industry Action Group), REML(Restricted Maximum Likelihood) 방법을 이용하여 신뢰구간을 구하고, 명목 값의 포함비율과 신뢰구간의 평균길이를 기준으로 비교한 결과 MLS 방법이 우수함을 보였다. Borrer, Montgomery, and Runger (1997)는 측정시스템 변동에 대한 신뢰구간으로 MLS와 REML 방법을 명목 값에 대한 포함비율과 신뢰구간의 평균길이를 가지고 비교하였는데, 포함 비율 면에서는 MLS 방법이 더 우수하였으며, 신뢰구간의 평균길이의 경우 측정자의 수가 적은 경우에는 REML 방법이 우수하였다. 반면에 측정자의 수가 증가하면 두 방법의 결과는 비슷하게 나타났다. Chiang(2001)은 이원배치 변량모형에서 변동에 대한 신뢰구간을 구하기 위해 간단하고 일반적인 방법을 제안하였으며, 명목 값에 대한 포함비율과 신뢰구간의 평균길이를 MLS 방법과 비교하면 비슷한 결과를 나타남을 보였다. 그리고 Chiang(2002)은 Burdick and Larsen(1997)의 연구에서 MLS와 SATT 방법은 $\delta(=\sigma_p^2/(\sigma_o^2+\sigma_{op}^2+\sigma_c^2))$ 의 값이 작을 때 δ 의 포함비율이 좋지 않았는데 이러한 경우에 $\delta \geq 0.5$ 이면 MLS 방법을 추천하였으며, δ 의 정보가 없는 경우 변환하는 방법을 제시하였다. Dolezal, Burdick, and Birch(1998)는 1개의 모수인자(작업자)와 1개의 변량인자(부품)로 이루어진 이원배치 혼합모형의 변동에 대한 신뢰구간을 계산하는 방법을 제시하고, 변량모형에 비해 혼합모형에서의 신뢰구간 길이가 짧다는 것을 밝혔다. Daniels, Burdick, and Quiroz (2005)는 1개의 모수인자와 1개의 변량인자로 이루어진 이원배치 모형의 변동에 대한 신뢰구간을 일반화(Generalized) 신뢰구간 방법을 이용하여 구하고 Dolezal, Burdick, and Birch(1998)의 연구결과와 비교한 결과 비슷하거나 일반화 신뢰구간이 우수한 경우가 존재함을 보였다. Gong, Burdick, and Quiroz (2005)은 부품 당 측정횟수가 다른 경우에 이원배치 모형(변량모형과 혼합모형)에서 변동에 대한 신뢰구간을 가중치가 다른 제곱합을 이용하여 계산하였다. Hamada and Weerahandi(2000)는 일반화 신뢰구간을 이용하여 측정변동과 비율에 대한 신뢰

구간을 구하였으며, MLS 방법과 비슷한 결과를 나타내며, 또한 복잡한 모형에도 쉽게 적용할 수 있었다. Wang and Li(2003)는 측정시스템 분석에서 $\bar{X}-R$ 방법으로 반복성, 재현성, 측정시스템 변동을 점 추정하고, 붓스트랩 방법을 이용하여 신뢰구간을 구하였다.

이제까지 앞에서 언급한 연구들은 측정오차의 분포가 정규분포를 가정하고 있다. 반면 Lohr and Divan(1997)은 반복수가 일정하지 않은 일원배치 변량모형에서 4가지 변동에 대한 5가지 신뢰구간의 성능을 비교하였으며, 부품과 측정오차의 분포는 정규분포, 지수분포, 2-모수 지수분포를 고려하였다. Lai and Chew(2000~01)는 측정오차의 분포가 절단된 분포일 때, PTR에 대한 비모수적 방법을 제안하고 모의실험을 통해서 분산분석 방법보다 더 좋은 추정 값을 얻을 수 있음을 보였다. Senoglu and Tiku(2001)는 측정오차의 분포는 위치-척도(location-scale) 비정규분포이며, 교호작용이 있는 이원배치 모형에서 수정된 최우추정량을 이용하여 변동을 추정하였다.

본 연구에서는 측정오차의 분포가 비정규분포인 경우에 가중표준편차 방법을 이용하여 측정변동 및 PTR에 대한 점 추정을 실시하고, 붓스트랩 신뢰구간을 이용하여 구간추정을 하고자 한다. 측정변동이 재현성과 반복성을 모두 고려하는 경우와 반복성만을 고려하는 경우에 대해 기존 분석방법과의 비교를 모의실험을 통해 실시하였으며, 모의실험에 사용된 측정오차의 분포는 감마분포, 와이블분포, 그리고 대수정규분포이다. 또한 비정규 측정오차에 대한 수치예제를 적용하였다.

2. 정규 측정오차의 측정시스템 분석

2.1 측정시스템 분석

게이지 R&R 분석에서 가장 기본적인 모형은 부품인자와 작업자 인자가 포함된 이원배치 변량모형이다. 모형의 구조식은 아래와 같다.

$$Y_{i,jk} = \mu + P_i + O_j + (OP)_{ij} + E_{ijk}$$

$$i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, o, \quad k = 1, \dots, r$$

여기서, P_i , O_j , $(OP)_{ij}$, E_{ijk} 는 각각 부품의 효과, 작

업자의 효과, 부품과 작업자간의 교호작용 효과, 반복성에 기인한 오차를 말하며, 평균이 0이고 분산이 각각 $\sigma_p^2, \sigma_o^2, \sigma_{op}^2, \sigma_e^2$ 인 정규분포를 따르며 서로 독립이라고 가정한다. 위의 모형에서 반복성, 재현성, 그리고 측정변동(MS)의 추정 값은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Reproducibility}^2 &= \hat{\sigma}_{RPd.}^2 = \hat{\sigma}_o^2 + \hat{\sigma}_{op}^2 \\ \hat{\sigma}_{Repeatability}^2 &= \hat{\sigma}_{Rpt.}^2 = \hat{\sigma}_e^2 \\ \hat{\sigma}_{MS}^2 &= \hat{\sigma}_{Rpt.}^2 + \hat{\sigma}_{RPd.}^2 \end{aligned}$$

그리고 PTR은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$PTR = \frac{k \cdot \sigma_{MS}}{USL - LSL} \times 100$$

여기서, $k = 5.15$ 혹은 6 을 사용할 수 있으며, USL은 규격상한, LSL은 규격하한이다. 측정시스템의 사용여부에 대한 기준은 Montgomery and Runger (1993~94a)가 제안한 10% 기준을 사용할 수 있으며, Barrentine(1991)도 PTR이 10% 이내이면 측정시스템이 우수하며, 10~20%이면 적절하고, 20~30%이면 부분적으로 사용할 수 있으며, 30% 이상이면 사용불가라고 말한다.

2.2 수정 대표본 근사(Modified Large Sample)

수정 대표본 근사 방법은 Graybill and Wang(1980)에 의해 처음으로 제안되었으며, Burdick and Graybill (1992)의 책에 요약되어 있다. 이 방법을 이용하면 각 변동에 대한 신뢰구간의 식을 구할 수 있다. Burdick and Larsen(1997)의 의해 전형적인 이원 배치 실험계획에 적용되어 비교대상 방법 중에 가장 우수한 방법임을 보여주었다.

전형적인 이원배치 변량모형에서 측정변동에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 수정 대표본 근사 신뢰구간은 아래와 같다(Burdick, Borrer, and Montgomery, 2003).

$$\left(\hat{\sigma}_{MS}^2 - \frac{\sqrt{V_{LM}}}{pr}, \hat{\sigma}_{MS}^2 + \frac{\sqrt{V_{UM}}}{pr} \right)$$

$$\begin{aligned} V_{LM} &= G_2^2 MSO^2 + G_3^2 (p-1)^2 MSOP^2 \\ &\quad + G_4^2 p^2 (r-1)^2 MSE^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{UM} &= H_2^2 MSO^2 + H_3^2 (p-1)^2 MSOP^2 \\ &\quad + H_4^2 p^2 (r-1)^2 MSE^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= 1 - 1/F_{1-\alpha/2; o-1, \infty} \\ G_3 &= 1 - 1/F_{1-\alpha/2; (p-1)(o-1), \infty} \\ G_4 &= 1 - 1/F_{1-\alpha/2; p_0(r-1), \infty} \\ H_2 &= 1/F_{\alpha/2; o-1, \infty} - 1 \\ H_3 &= 1/F_{\alpha/2; (p-1)(o-1), \infty} - 1 \\ H_4 &= 1/F_{\alpha/2; p_0(r-1), \infty} - 1 \end{aligned}$$

여기서, $F_{\alpha, df, \infty} = \chi_{\alpha, df}^2$ 로 정의한다.

2.3 일반화 신뢰구간(Generalized Confidence Interval)

일반화 신뢰구간은 컴퓨터의 사용을 강조하는 방법이다. Tsui and Weerahandi(1989)는 가설검정에 일반화 추론(Generalized Inference)의 개념을 소개하였으며, Weerahandi(1993)는 정확한 신뢰구간을 구할 수 없는 경우에 일반화 신뢰구간을 제안하였다. 이 방법은 Hamada and Weerahandi(2000)에 의해 게이지 R&R 분석을 위한 이원배치 모형에 사용되었다. 일반화 신뢰구간을 구하기 위해서는 일반화 피벗 값(Generalized Pivotal Quantity ; GPQ)이 필요하다. 이 값을 구한 후 GPQ의 백분위수를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다. 전형적인 이원 배치 변량모형에서 측정변동에 대한 GPQ는 아래와 같다.

$$\left[\frac{(o-1)MSO}{U_2} + \frac{(p-1)^2(o-1)MSOP}{U_3} + \frac{p^2 o(r-1)^2 MSE}{U_4} \right] / (pr)$$

위에서 U_2, U_3, U_4 는 자유도가 각각 $o-1, (p-1)(o-1), p_0(r-1)$ 인 카이제곱 확률변수이며, 일반화 신뢰구간을 구하는 절차는 다음과 같다.

- ① 수집된 데이터에 대한 MSO, MSOP, MSE를 구한다.
- ② U_2, U_3, U_4 의 각각에 대해 10,000개의 데이터를 생성한다.
- ③ 10,000개의 GPQ값을 오름차순으로 정렬한다.
- ④ 10,000개의 GPQ값으로부터 누적비율이 $\alpha/2$ 가 되는 GPQ($10000 \times \alpha/2$)를 신뢰하한으로 정의하고, 누적비율이 $1-\alpha/2$ 가 되는 GPQ($10000 \times (1-\alpha/2)$)를 신뢰상한으로 정의한다.

3. 비정규 측정오차의 측정시스템 분석

3.1 가중표준편차를 이용한 측정변동 및 PTR 추정

측정오차의 분포가 비정규 분포일 때, 정규분포를 가정한 분산분석 모형을 이용하여 변동을 추정한다면 그 추정 값은 신뢰하기 어렵다. 하지만, Chang, Choi, and Bai(2002)의 연구에서 가중표준편차를 이용하여 공정능력지수를 추정하는 것을 활용하면 측정시스템 분석 시에도 각 변동에 대한 추정을 쉽게 할 수 있다.

$$C_p^{WSD} = \frac{USL - LSL}{6\sigma_X D_X}, D_X = 1 + |1 - 2P_X| \quad (3.1)$$

식 (3.1)에서는 품질특성치가 비정규분포를 따르는 경우에 표준편차 σ_X 대신 가중표준편차 $\sigma_X D_X$ 를 사용하였다. 따라서 측정변동과 PTR에도 아래와 같이 유사하게 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{Rpd.(WSD)}^2 &= \hat{\sigma}_{Rpd.}^2 \times D_{Rpd.}^2 \\ \hat{\sigma}_{Rpt.(WSD)}^2 &= \hat{\sigma}_{Rpt.}^2 \times D_{Rpt.}^2 \\ \hat{\sigma}_{MS(WSD)}^2 &= \hat{\sigma}_{MS}^2 \times D_{MS}^2 \\ PTR_{(WSD)} &= \frac{6 \times \hat{\sigma}_{MS} \times D_{MS}}{USL - LSL} \times 100 \end{aligned}$$

여기서, $D_K = 1 + |1 - 2P_K|$, $P_K = P(K \leq \mu_K)$ 이며, K는 재현성(Rpd.), 반복성(Rpt.), 그리고 측정시스템변동(MS)이다. 재현성과 반복성의 \hat{P} 는 추정하기가 힘들며, \hat{P}_{MS} 의 추정 값은 아래와 같이 구할 수 있으며, $\bar{\bar{X}}$ 는 μ_{MS} 의 추정 값이며, $X_{i,jk}$ 는 측정오차의 추정 값이다.

$$\hat{P}_{MS} = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r I(\bar{\bar{X}} - X_{i,jk})}{por}, I(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

3.2 붓스트랩 방법

붓스트랩 방법은 고성능 컴퓨터의 등장으로 많은 관심을 갖는 중요한 비모수 통계적기법이다. 주어진 확률표본 x_1, x_2, \dots, x_n 으로부터 복원 추출방법으로 붓스트랩 표본 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 을 얻는다. 따라서 추출 가능한 붓스트랩 표본의 총 수는 n^n 개이다. n^n 개의

붓스트랩 표본에 대한 θ 의 추정 값 $\hat{\theta}^*$ 를 얻는다. 또한 이들은 추정량 $\hat{\theta}$ 에 대한 붓스트랩 분포를 구성한다.

Efron and Tibshirani(1986)는 정확한 신뢰구간 추정 값들을 계산하기 위해서 최소한 1000개의 붓스트랩 표본이 적절하다고 제안하였고, Wang and Li(2003)는 측정시스템 분석에서 $\bar{x}-R$ 방법의 측정변동에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구하기 위해 붓스트랩 표본으로 2000개를 사용하였다. 본 연구에서는 θ 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구하기 위해 2000개의 붓스트랩 표본으로부터 $\hat{\theta}^*$ 를 구하고, 크기가 작은 것부터 순서를 매긴다. 그리고 $\hat{\theta}$ 와 $\hat{\theta}^*(i)$ 는 각각 θ 의 추정량과 순번이 정해진 붓스트랩 추정 값이다. 이러한 붓스트랩 추정 값을 이용하여 θ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 표준 붓스트랩 신뢰구간을 구할 수 있다.

3.2.1 표준 붓스트랩 신뢰구간(Standard Bootstrap Confidence Interval : SB)

2000개의 붓스트랩 추정 값 $\hat{\theta}^*(i)$ 로부터, 표본 평균 $\bar{\theta}^*$ 과 표본 표준편차 S_θ^* 는

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^* &= \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}^*(i) \\ S_\theta^* &= \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B [\hat{\theta}^*(i) - \bar{\theta}^*]^2} \end{aligned}$$

이다. S_θ^* 는 실제로 $\hat{\theta}$ 의 표준편차의 추정량이고, 따라서(만약 $\hat{\theta}$ 의 분포가 근사적으로 정규분포이면) θ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ SB 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} S_\theta^*$$

여기서, z_α 는 표준정규분포의 상위 $100\alpha\%$ 백분위수이며, B는 붓스트랩 표본의 수이다.

4. 모의실험 연구

4.1 모의실험

본 연구에서 사용한 측정오차의 분포는 재현성과 반복성을 모두 고려한 경우에는 감마분포를 이용하였으며, 반복성만 고려한 경우에는 와이블분포와 대수정규분포를 이용하였다. 각 분포는 왜도가 1.0,

1.5, 2.0, 그리고 2.5인 경우를 고려하였다. 게이지 R&R 설계는 부품의 수가 10, 작업자의 수는 3, 반복수는 3으로 정하였다. 측정시스템 변동(σ_{MS}^2)은 1로 정하였고, 재현성과 반복성의 비율을 3 : 7, 5 : 5, 7 : 3으로 고려하였으며, PTR은 10%, 20%, 30%로 하기 위해 공차를 조정하였다.

측정오차가 비정규분포일 때 측정시스템 변동과 PTR의 강건성을 조사하기 위해 점 추정을 비교하는 경우에는 중앙절대오차(Median Absolute Error ; MAE)를 사용하였으며, 신뢰구간 비교를 위해 측정시스템 변동과 PTR의 목표치를 포함하는 비율을 사용하였다. 측정시스템 변동의 목표치는 공정능력지수 Cp와 반비례 관계가 있으므로 Chang, Choi, and Bai(2002)의 NPM(Expected number of non-conforming items per million)과 ‘일치된 Cp (Matched Cp ; MCp)’를 이용하여 유도할 수 있다.

$$MC_p = -(1/3)\Phi^{-1}((NPM/2) \times 10^{-6})$$

$$\sigma_{MS}^2 \text{ 목표치} = (1/MC_p)^2$$

여기서, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수이다.

<표 1> 모의실험에 사용되는 σ_{MS}^2 목표치

측정오차분포	왜도	NPM	MCp	σ_{MS}^2 목표치
G(4,1)	1.0	10336	0.8548	1.3686
G(1.7778,1)	1.5	14789	0.8125	1.5148
G(1,1)	2.0	18316	0.7864	1.6170
G(0.64,1)	2.5	20856	0.7702	1.6857
Weib(1.5639,1)	1.0	9871	0.8601	1.3518
Weib(1.2111,1)	1.5	14914	0.8115	1.5186
Weib(1,1)	2.0	18316	0.7864	1.6171
Weib(0.8632,1)	2.5	20274	0.7737	1.6703
LN(0,0.988)	1.0	10471	0.8533	1.3734
LN(0,0.1967)	1.5	14099	0.8182	1.4936
LN(0,0.3040)	2.0	16365	0.8002	1.5616
LN(0,0.4107)	2.5	17652	0.7909	1.5985

<표 1>은 모의실험에 사용되는 분포들의 분포와 왜도, NPM, MCp, σ_{MS}^2 목표치를 보여주고 있다. 모의실험은 MATLAB 프로그램을 이용하였으며, 총 실험횟수는 1,000회이며, 붓스트랩 반복횟수는 2,000회를 실시하였다. 모의실험 절차는 다음과 같다.

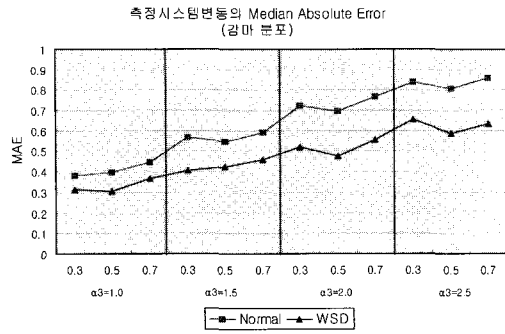
- ① 측정오차의 분포로부터 재현성 및 반복성의 크기를 가지도록 원시표본을 생성한 후 데이터로부터 분산분석을 실시한다.
- ② 분산분석 결과로부터 측정시스템 변동과 PTR을 계산하고 절대오차를 구한다. 또한 가중표준편차를 이용하여 $\sigma_{MS(WSD)}^2$ 와 $PTR_{(WSD)}$ 을 구한 후 역시 절대오차를 구한다.
- ③ 수정 대표본 근사와 일반화 신뢰구간 방법을 이용하여 95% 양측 신뢰구간이 목표치를 포함하는지 여부를 확인한다.
- ④ 원시표본을 이용하여 붓스트랩 표본을 생성한 후 95% 표준 붓스트랩 신뢰구간을 구하여 목표치를 포함하는지 여부를 확인한다.
- ⑤ ①~④의 과정을 1,000회 반복 실시하여 MAE와 측정시스템 변동과 PTR의 3가지 신뢰구간의 포함비율을 계산한다.

4.2 측정시스템 변동 및 PTR에 대한 비교

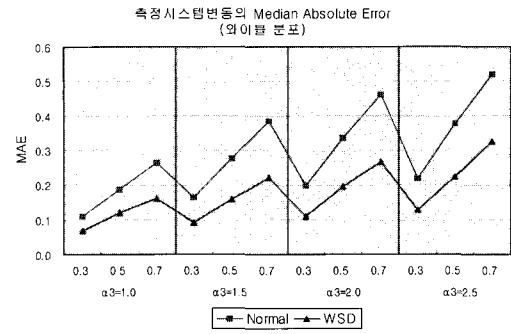
측정시스템 변동과 PTR의 점 추정방법을 비교하기 위해 MAE를 사용하였으며, MAE값이 작을수록 더 우월한 추정방법이라 할 수 있다. MAE는 1000개의 $|\hat{\sigma}_{MS(i)}^2 - \sigma_{MS}^2 \text{ 목표치}|$ 값을 순서대로 나열했을 때, 500번째와 501번째 값의 평균값이다. 점 추정방법으로는 정규분포를 가정한 방법과 가중표준편차를 이용한 방법을 고려하였다.

측정변동이 재현성과 반복성을 모두 고려하고, 측정오차의 분포가 감마분포인 경우에 측정시스템 변동과 PTR 20%의 MAE 결과는 <그림 1>과 <그림 2>에 나타나있다. 그림의 X축의 첫 번째 행은 재현성의 비율(반복성만 고려하는 경우에는 반복성의 크기를 나타냄)을 나타내며, 두 번째 행은 왜도를 나타낸다. 측정시스템 변동과 PTR 모두 가중표준편차를 이용한 방법이 정규분포를 가정한 방법보다 MAE가 낮게 나타나는 것을 알 수 있다. 특히, 재현성과 반복성의 비율이 동일한 경우에 MAE가 낮게 나타나며, 또한 왜도가 증가할수록 MAE는 증가하였다.

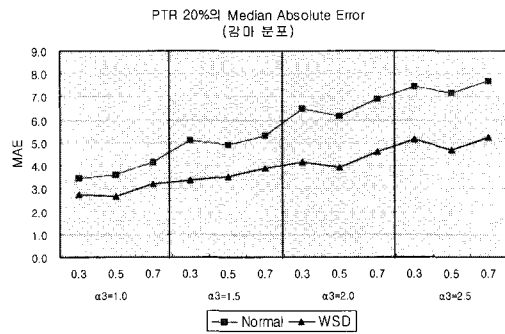
측정변동이 반복성만 고려한 경우에 측정오차의 분포는 감마분포, 와이블분포, 그리고 대수정규분포를 고려하였다. 반복성의 크기는 0.3, 0.5, 0.7을 사용하였으며, <그림 3>과 <그림 4>는 반복성만 고려하고 측정오차의 분포가 감마분포인 경우에 측정시스템 변동과 PTR 20%의 MAE 결과를 보여주고 있



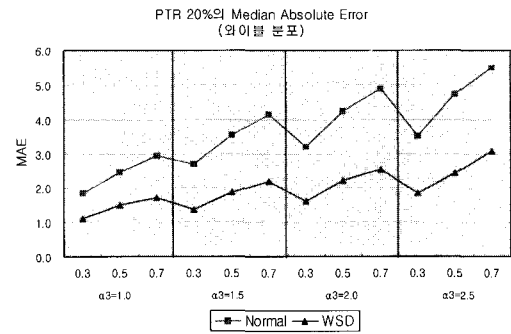
<그림 1> 측정시스템 변동의 MAE : 감마분포



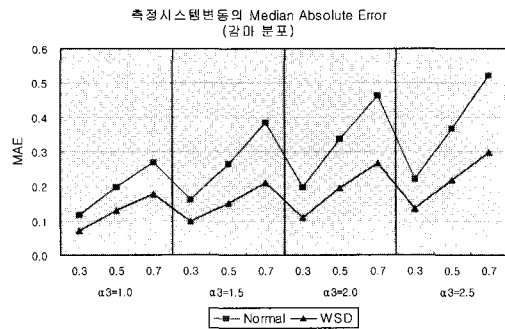
<그림 5> 측정시스템변동의 MAE : 와이블분포



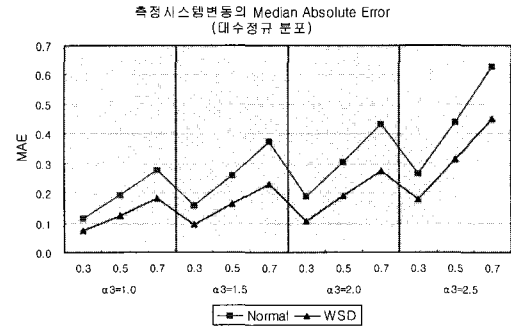
<그림 2> PTR 20%의 MAE : 감마분포



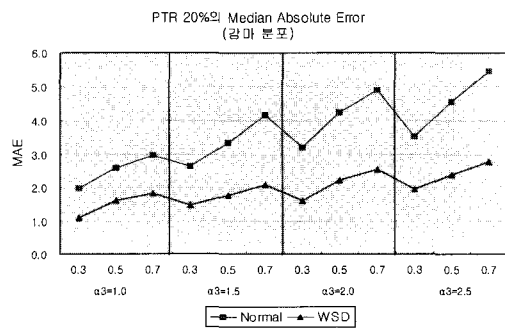
<그림 6> PTR 20%의 MAE : 와이블분포



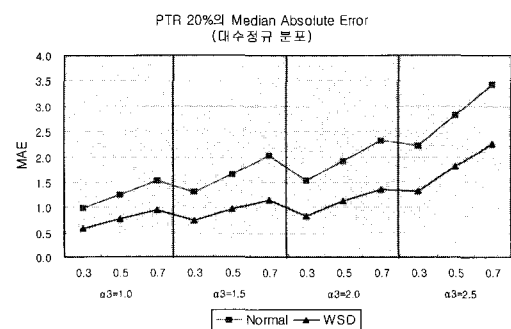
<그림 3> 측정시스템변동의 MAE : 감마분포(반복성)



<그림 7> 측정시스템변동의 MAE : 대수정규분포



<그림 1> PTR 20%의 MAE : 감마분포(반복성)



<그림 8> PTR 20%의 MAE : 대수정규분포

다. <그림 5>와 <그림 6>은 측정오차의 분포가 와이블분포인 경우에 측정시스템 변동과 PTR 20%의 MAE 결과이며, <그림 7>과 <그림 8>은 측정오차의 분포가 대수정규분포인 경우에 측정시스템 변동과 PTR 20%의 MAE 결과이다. 3가지 측정오차 분포 모두에서 가중표준편차를 이용한 방법이 정규분포를 가정한 방법보다 MAE가 낮게 나타났으며, 또한 왜도가 증가할수록 MAE는 증가함을 보였다.

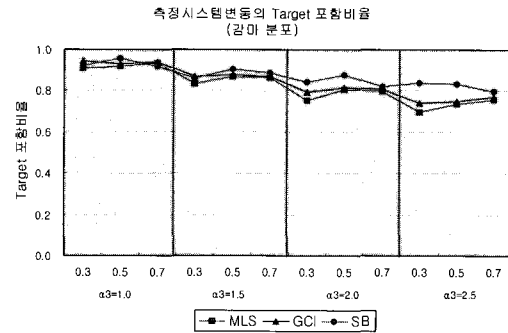
4.3 측정시스템 변동 및 PTR의 신뢰구간에 대한 비교

측정시스템 변동과 PTR의 신뢰구간 방법을 비교하기 위해 σ_{MS}^2 와 PTR의 목표치를 포함하는 비율(이하 포함비율)을 사용하였다. 신뢰구간 방법으로는 정규분포를 가정한 수정 대표본 근사(MLS), 일반화 신뢰구간(GCI), 그리고 가중표준편차를 이용한 방법으로 표준 붓스트랩 신뢰구간(SB)의 95% 양측 신뢰구간을 이용하였다. 붓스트랩 신뢰구간의 경우, 표준 붓스트랩 신뢰구간 외에 백분위수 붓스트랩 신뢰구간(Percentile Bootstrap Confidence Interval)과 편향의 수정된 붓스트랩 신뢰구간(Biased-Corrected Bootstrap Confidence Interval)를 고려하여 분석을 실시해 본 결과 표준 붓스트랩 신뢰구간의 결과가 가장 좋은 것으로 나타났다. 따라서 본 연구에서는 3가지 붓스트랩 신뢰구간 중 결과가 가장 좋은 표준 붓스트랩 신뢰구간만 고려하였다.

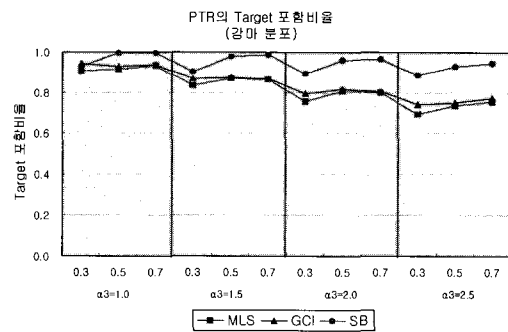
측정변동이 재현성과 반복성을 모두 고려하고, 측정오차의 분포가 감마분포인 경우에 측정시스템 변동과 PTR의 포함비율 결과는 <그림 9>와 <그림 10>에 나타나있다. 측정시스템 변동과 PTR 모두 표준 붓스트랩 신뢰구간의 포함비율이 가장 높게 나타났다. 다음으로는 일반화 신뢰구간이 수정 대표본 근사보다 포함비율이 조금 높게 나타났다. 또한 왜도가 증가할수록 포함비율은 감소하였다. MLS와 GCI의 경우 측정시스템 변동과 PTR의 포함비율이 같지만 SB의 경우에는 다르게 나타나는데, 이것은 MLS와 GCI의 경우에는 원시 표본을 이용하지만 SB는 원시표본과 붓스트랩 표본을 모두 사용하기 때문이다.

측정변동이 반복성만 고려한 경우에 측정오차의 분포는 감마분포, 와이블분포, 그리고 대수정규분포를 고려하였다. 하지만 결과가 유사하므로, 여기서

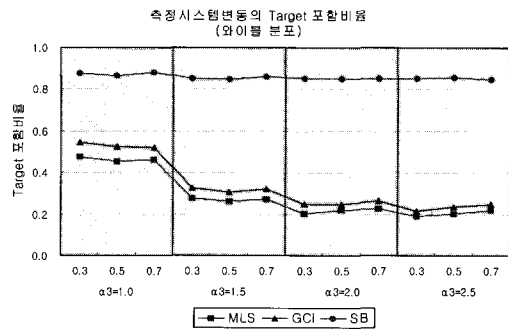
는 와이블분포의 결과만 설명하고자 한다. <그림 11>과 <그림 12>에 반복성만 고려한 경우에 측정시스템 변동과 PTR의 포함비율 결과를 보여주고 있다. 이 경우 SB의 포함비율이 GCI나 MLS보다 월등히 높게 나타났다. 또한 왜도가 증가함에 따라 GCI와 MLS는 포함비율이 감소하였으나 SB는 큰 차이가 없었다.



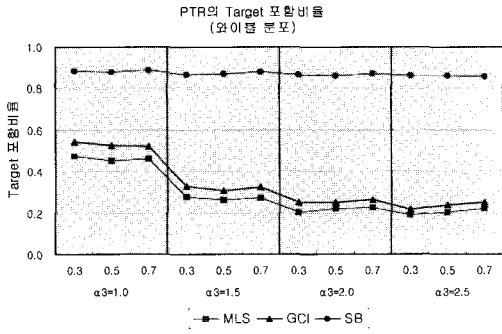
<그림 9> 측정시스템변동의 목표치 포함비율 : 감마분포



<그림 10> PTR의 목표치 포함비율 : 감마분포



<그림 11> 측정시스템변동의 목표치 포함비율 : 와이블분포



<그림 12> PTR의 목표치 포함비율 : 와이블분포

5. 수치예제

측정오차의 분포가 비정규분포일 때 정규분포를 가정한 방법과 가중표준편차를 이용한 방법의 차이를 알아보기 위해 수치예제를 이용하였다. 비정규 측정오차의 수치예제를 위하여 Wang and Li(2003)의 엔진 샤프트의 직경(단위: 인치)데이터를 이용하였으며, 3명의 작업자와 10개의 부품, 그리고 3번의 반복측정을 하였으며, 결과는 <표 2>와 같으며 규격은 37.5 ± 0.2 이다.

<표 2> 엔진 샤프트 측정데이터

부품	A 작업자			B 작업자			C 작업자		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
1	37.56	37.55	37.57	37.57	37.58	37.56	37.56	37.57	37.56
2	37.63	37.62	37.62	37.64	37.64	37.64	37.62	37.64	37.64
3	37.56	37.54	37.55	37.57	37.55	37.56	37.55	37.55	37.55
4	37.57	37.55	37.56	37.56	37.57	37.55	37.56	37.57	37.55
5	37.58	37.58	37.57	37.59	37.6	37.6	37.57	37.6	37.6
6	37.56	37.55	37.54	37.6	37.59	37.57	37.55	37.57	37.56
7	37.56	37.55	37.56	37.58	37.56	37.56	37.55	37.55	37.57
8	37.57	37.56	37.56	37.57	37.58	37.57	37.57	37.58	37.57
9	37.65	37.64	37.64	37.64	37.64	37.65	37.65	37.64	37.65
10	37.58	37.57	37.57	37.61	37.6	37.6	37.58	37.59	37.6

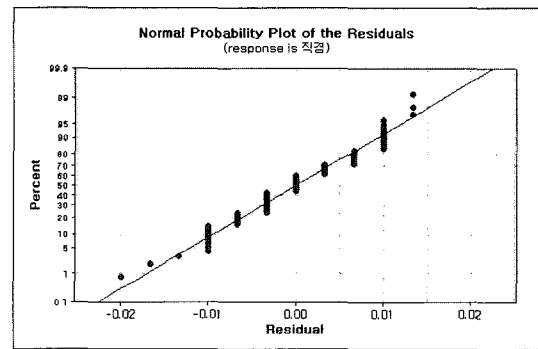
<표 3>은 <표 2>의 데이터로부터 얻은 분산분석 결과이다. 그리고 <그림 13>은 잔차에 대한 정규 확률 플롯 결과이다.

<그림 13>의 그래프 분석결과를 보면 측정오차의 분포는 비정규분포라는 것을 알 수 있다. 또한

MINITAB을 이용하여 잔차에 대한 정규성 검정 결과는 Anderson-Darling의 p-value < 0.005로서 비정규분포를 따르는 것으로 나타났다. <표 3>의 분산분석 결과를 이용하여 엔진 샤프트 측정데이터에 대한 PTR과 가중표준편차를 이용한 PTR을 아래와 같이 계산할 수 있다.

<표 3> 엔진 샤프트 측정데이터의 분산분석표

Source	DF	SS	MS	F	P
Part	9	0.081093	0.00901	114.22	0.000
Operator	2	0.003087	0.001543	19.56	0.000
Interaction	18	0.002247	0.000125	1.58	0.094
Error	60	0.004733	0.0000789		
Total	89	0.09116			



<그림 13> 엔진 샤프트 측정데이터의 잔차 정규 확률 플롯

$$\hat{\sigma}_{MS}^2 = \hat{\sigma}_{Rpl.}^2 + \hat{\sigma}_{RPd.}^2 = \hat{\sigma}_e^2 + \hat{\sigma}_o^2 + \hat{\sigma}_{op}^2$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = 0.0000789$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{MSO - MSOP}{pr} = 0.0000473$$

$$\hat{\sigma}_{op}^2 = \frac{MSOP - MSE}{r} = 0.0000153$$

$$\hat{\sigma}_{MS}^2 = 0.0000789 + 0.0000473 + 0.0000153 = 0.0001415$$

$$PTR = \frac{6 \times \hat{\sigma}_{MS}}{USL - LSL} \times 100 = 17.84$$

$$\hat{P}_{MS} = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r I(\bar{X} - X_{ijk})}{por} = 0.588889,$$

$$I(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$D_{MS} = 1 + |1 - 2\hat{P}_{MS}| = 1.17778$$

$$PTR_{WSD} = \frac{6 \times \hat{\sigma}_{MS} \times D_{MS}}{USL - LSL} \times 100 = 21.02$$

PTR 결과를 살펴보면 정규분포를 가정하여 구한 PTR은 17.84가 되며, 가중표준편차를 고려한 경우에는 21.02가 된다. 이처럼 측정오차의 분포가 비정규분포일 때, 정규분포를 가정하여 PTR을 구하는 경우에는 측정시스템 변동이 과소평가되어 실제보다 좋게 평가하는 오류를 범하게 된다.

수치예제에 대한 PTR의 신뢰구간 결과를 살펴보면 정규분포를 가정한 방법인 MLS 방법의 경우는 (16.89, 19.37)이며, GCI 방법의 경우는 (11.30, 16.27)로 나타났다. 표준 붓스트랩 방법의 결과는 (0, 57.61)로 나타났다. 표준 붓스트랩 방법의 결과는 목표치를 포함하는 포함비율은 높으나 신뢰구간의 길이는 정규분포를 가정한 방법보다 상대적으로 긴 것으로 나타났다.

6. 결 론

일반적으로 측정시스템 분석을 실시하는 경우 우리는 측정오차의 분포는 정규분포를 가정하고 있지만, 실제 현장에서는 품질특성뿐만 아니라 측정오차의 분포가 비정규분포를 따르는 경우가 존재한다. 따라서 만약 측정오차의 분포가 비정규분포인 경우에 측정시스템 변동에 대한 점 추정 및 구간추정 값을 정규분포로 가정하여 분석한다면 그 결과 값을 신뢰하기는 어려울 것이다.

본 연구에서는 측정오차의 분포가 비정규분포인 경우에 가중표준편차 방법을 이용하여 측정변동 및 PTR에 대한 점 추정을 실시하고, 표준 붓스트랩 신뢰구간을 이용하여 구간추정을 실시하였다. 측정변동이 재현성과 반복성을 고려하는 경우와 반복성만 고려하는 경우에 대해 정규분포를 가정한 방법과의 비교를 위해 모의실험을 실시하였다.

모의실험결과를 살펴보면 점 추정의 경우 재현성과 반복성을 모두 고려한 경우와 반복성만 고려한 경우에 가중표준편차를 이용한 방법이 정규분포를 가정한 방법보다 MAE가 낮게 나타났으며, 또한 왜도가 증가할수록 MAE는 증가하였다. 신뢰구간의 경우 가중표준편차를 이용한 표준 붓스트랩 신뢰구간의 경우가 목표치를 포함하는 비율이 수정 대표본 근사와 일반화 신뢰구간보다 높게 나타났다. 특히 반복성만 고려한 경우에 포함비율의 차이가 크게 나타났다. 역시 왜도가 증가할수록 포함비율은 감소하였다. 또한 비정규 측정오차의 수치예제를 통해서

비정규 측정오차의 경우에 정규분포를 가정한 방법으로 분석하는 경우 측정시스템 변동이 과소평가되어 실제보다 좋게 평가하는 오류를 범하게 됨을 알게 되었다.

따라서 측정오차의 분포가 비정규분포인 경우에 점 추정의 경우에는 가중표준편차를 이용하고 신뢰구간의 경우에는 표준 붓스트랩 신뢰구간을 이용하면 정규분포를 가정한 방법보다 우수한 결과를 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Barrentine, L. B.(1991), *Concepts for R&R Studies*, ASQ Quality Press, Milwaukee, WI.
- [2] Burdick, R. K. and Graybill F. A.(1992), *Confidence Intervals on Variance Components*, Marcel Dekker, New York.
- [3] Borrer, C. M., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1997), "Confidence intervals for Variance Components from Gauge Capability Studies", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 13, No. 6, pp. 361-369.
- [4] Burdick, R. K., Borrer, C. M., and Montgomery, D. C.(2003), "A Review of Methods for Measurement Systems Capability Analysis", *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, No. 4, pp. 342-354.
- [5] Burdick, R. K., and Larsen, G. A.(1997), "Confidence Intervals on Measures of Variability in R&R Studies", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, No. 3, pp. 261-273.
- [6] Chang, Y. S., Choi, I. S. and Bai, D. S. (2002), "Process Capability Indices for Skewed Populations", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 18, No. 5, pp. 383-393.
- [7] Chiang, A. K. L.(2001), "A Simple General Method for Constructing Confidence Intervals for Functions of Variance Components", *Technometrics*, Vol. 43, No. 3, pp. 356-367.

- [8] Chiang, A. K. L.(2002), "Improved Confidence Intervals for a Ratio in an R&R Study", *Communications in Statistics-Simulation & Computation*, Vol. 31, No. 3, pp. 329-344.
- [9] Daniels, L., Burdick, R. K., and Quiroz, J. (2005), "Confidence Intervals in a Gauge R&R Study with Fixed Operators", *Journal of Quality Technology*, Vol. 37, No. 3, pp. 179-185.
- [10] Dolezal, K. K., Burdick, R. K., and Birch, N. J.(1998), "Analysis of a Two-Factor R&R Study with Fixed Operators", *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, No. 2, pp. 163-170.
- [11] Efron, B. and Tibshirani, R.(1986), "Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy", *Statistical Science*, Vol. 1, No. 1, pp. 54-75.
- [12] Gong, L., Burdick, R. K., and Quiroz, J. (2005), "Confidence Intervals for Unbalanced Two-factor Gauge R&R Studies", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 21, No. 8, pp. 727-741.
- [13] Graybill, F. A. and Wang, C. M.(1980), "Confidence Intervals on Nonnegative Linear Combinations of Variances", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 75, No. 372, pp. 869-873.
- [14] Hamada, M. and Weerahandi, S.(2000), "Measurement System Assessment Via Generalized Inference", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 3, pp. 241-253.
- [15] Lai, Y. W. and Chew, E. P.(2000~01), "Gauge Capability Assessment for High-yield Manufacturing Processes with Truncated Distribution", *Quality Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 203-210.
- [16] Lohr, S. L. and Divan, M.(1997), "Comparison of Confidence Intervals for Variance Components with Unbalanced data", *Journal of statistical computation and simulation*, Vol. 58, No. 1, pp. 83-97.
- [17] Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1993~94a), "Gauge Capability and Designed Experiments Part 1 : Basic Methods", *Quality Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 115-135.
- [18] Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1993~94b), "Gauge Capability and Designed Experiments Part 2 : Experimental Design Models and Variance Component Estimation", *Quality Engineering*, Vol. 6, No. 2, pp. 289-305.
- [19] Pan, J. N.(2004), "Determination of the optimal allocation of parameters for gauge repeatability and reproducibility study", *The International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 21, No. 6, pp. 672-682.
- [20] Senoglu, B. and Tiku, M. L.(2001), "Analysis of Variance in Experimental Design with Nonnormal Error Distributions", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 30, No. 7, pp. 1335-1352.
- [21] Tsui, K. W. and Weerahandi, S.(1989), "Generalized p-values in Significance Testing of Hypotheses in the Presence of Nuisance Parameters", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 84, No. 406, pp. 602-607.
- [22] Wang, F. K. and Li, E. Y.(2003), "Confidence Intervals in Repeatability and Reproducibility using the Bootstrap method", *Total Quality Management*, Vol. 14, No. 3, pp. 341-354.
- [23] Weerahandi, S.(1993), "Generalized Confidence Intervals", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, No. 423, pp. 899-905.