

고차 포물형 파랑 근사식 Higher Order Parabolic Wave Equations

서승남* · 이동영**
Seung-Nam Seo* and Dong-Young Lee**

요 지 : 파랑변형을 계산하기 위한 Padé 근사에 의한 포물형 근사모형들을 분석하였다. 기존 포물형 근사모형보다 정밀도가 높은 Padé(2,2) 근사모형을 제시하였고 일정 경사면에 대한 수치실험을 통해 본 모형은 기존의 모형보다 입사각이 큰 경우에도 성공적으로 적용할 수 있음을 입증하였다.

핵심용어 : 포물형 근사식, Padé근사, Snell 법칙, 수치모형, Padé(2,2) 포물형 근사모형

Abstract : Parabolic approximation wave models based on Padé approximants are analyzed in order to calculate wave transformation. In this study a Padé(2,2) parabolic approximation model is developed to increase the accuracy of computation in comparison with the existing models. Numerical studies on a constant sloping bed show that the new model proves to allow for much more successful treatment of large angles of incidence than is possible using the previously available models.

Keywords : parabolic approximate form, Padé approximation, Snell's law, numerical model, Padé(2,2) parabolic approximation model

1. 서 론

파랑이 불규칙한 해저면 위를 진행하면서 변형될 때 파랑의 방향이 설정된 주 진행방향과 큰 차이를 보이지 않는 경우 포물형 근사식에 의한 파랑 산출은 정밀도가 높은 것으로 밝혀졌다(Liu, 1990). 이는 뒤에 기술된 바와 같이 변형된 파랑의 파수 벡터를 주 방향과 이에 직각인 횡방향의 파수성분으로 나타낼 때 횡방향 성분이 작은 경우 주 방향 파수성분의 근사는 횡방향 성분으로 표시된 하나의 항으로도 충분하기 때문이다. Kirby(1986b)는 이에 근거한 연산자 상관방법을 통해 포물형 근사식의 형태와 파수의 주 방향성분 근사법과 연계되어 있음을 밝혔다. 즉 고차의 포물형 근사식은 주 방향성분을 여러 개의 횡방향 성분으로 나타내기 때문에 횡방향 성분이 작지 않은 경우에도 적용할 수 있다.

한편 포물형 근사식은 완경사 파랑식을 근간으로 하

여 파랑의 굴절과 회절을 동시에 고려할 수 있다(Berkhoff et al., 1982). 그러므로 포물형 근사식은 굴절에 의한 파랑 변형도 당연히 나타낼 수 있으며 횡방향의 수심변화가 없는 특별한 경우 즉 Snell 법칙이 성립하는 경우에는 굴절 효과만이 나타나게 된다. 본 논문에서는 이 비교적 단순한 경우를 통해 포물형 근사식에 대한 고차 모형에 대한 특성과 방법을 밝히고 이에 대한 수치실험 결과를 제시하고자 한다.

포물형 근사식에 대한 기존 연구는 파랑계산의 정밀도 증대에만 초점이 맞추어져 상당한 진전이 있는 반면에 파고계산의 정밀도 증대에 대한 연구는 상대적으로 소홀한 것으로 평가할 수 있다(Kirby, 1986a와 1986b; Mordane et al., 2004). 파랑변형이 굴절에만 의한 경우 파고에 대한 엄밀해는 파향을 포함하여 파향과 파고는 연계되어 있다. 그러나 뒤에 기술한 바와 같이 포물형 근사모형에서는 위상과 파고를 구성하는 함수의 형태가 달라 이는 각각의

*한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

**한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. dylee@kordi.re.kr)

근사식으로 나타내야 한다. 따라서 기존 연구에서는 위상 부분(즉 파향)만을 부각시켰으나 이를 파고부분으로 확장하여 같이 다룰 필요가 있다.

제 2절에서는 기존 포물형 근사모형과 Padé근사와의 연계성을 보이고 Radder(1979) 모형은 천수효과만을 나타냄을 해석적으로 증명하였다. Radder 모형에 굴절을 가미한 수정 Radder 모형 또는 Padé(1,0) 모형을 제시하였고 Booij 모형은 파고부분의 해석을 통해 이는 가장 적합한 Padé(1,1) 모형임을 입증하였다. 제 3절에서는 Padé(2,2) 모형을 제시하고 Padé 근사를 이용한 고차 포물형 근사 모형의 구성방법을 기술하였다. 그리고 제 4절에서는 본 연구에서 다룬 모든 포물형 근사모형의 정밀도를 분석하기 위해 일정 경사의 지형에 대한 수치실험 결과를 나타내고 이를 분석하였다.

2. 기존 포물형 근사모형

2.1 배경

외해에서 육지쪽으로 해안선에 직각인 방향을 x 축, 해안선에 평행한 방향을 y 축으로 좌표계를 정한다. 횡(ψ) 방향의 수심변화가 없는 지역에서는 파고(H)와 파향(θ)의 횡 방향 변화율이 값이 0이 되어 파랑은 Snell 법칙에 따른 굴절에 의해서 변형된다. 이 경우에 파향은 파수 벡터(\vec{k})의 비회전식(1.a)으로부터, 파고는 에너지 보존식(1.b)로부터 각각 계산할 수 있다(Dean and Dalrymple, 1984). 한 걸음 더 나아가 수심이 완만히 변해 파랑의 반사를 무시할 수 있는 경우에는 굴절모형에 의한 결과는 매우 빠르고 정확하다.

$$\vec{\nabla} \times \vec{k} = 0 \tag{1a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (A^2 \vec{C}_g) = 0 \tag{1b}$$

여기서 $\vec{\nabla}$ 은 2차원 미분연산자, C_g 는 군속도이며 파수는 파랑 분산식 (2)로부터 계산한다.

$$\omega^2 = gk \left[1 + \frac{\tanh^5 kh (kA)^2 \cos 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh}{8 \sinh^4 kh} \right] \tag{2}$$

$$\tanh \left[kh + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^4 kA \right]$$

여기서 ω , h , A 그리고 g 는 각각 파랑의 각주파수, 수심, 진폭 그리고 중력가속도이고 이 식은 파랑 비선형성을 포함하는 경험식이다(Kirby and Dalrymple, 1986). 진폭이

작지 않아 비선형 파수를 계산하는 경우에는 주어진 허용오차를 만족할 때까지 반복법을 사용한다.

수심이 완만히 변하는 경우에 적용할 수 있는 식 (3)의 환경사 파랑식(Berkhoff, 1972)은 해면함수 $\eta(x, y)$ 에 대한 2차 미분식이므로 상당한 계산시간이 필요하나 굴절과 회절의 현상을 재현할 수 있다.

$$\nabla \cdot (P \nabla \eta) + k^2 P \eta = 0 \tag{3}$$

여기서 $P = CC_g/g$ 이고 C 는 파속이다. 환경사 파랑식은 3차원의 지배방정식을 2차원으로 줄여 상대적으로 계산이 용이하고 파랑변형을 정확히 계산할 수 있어 이에 대한 연구가 계속되고 있다(Chamberlain and Porter, 1995; Miles and Chamberlain, 1998).

환경사 파랑식과 굴절 모형의 장단점을 절충하여 계산 시간의 단축과 굴절의 적절한 재현을 목적으로 포물형 근사모형이 제기되었다. 본 논문에 제시된 이 모형들은 식 (3)에 변수변환 $\zeta = \sqrt{P} \eta$ 하여 Helmholtz 형태로 변환된 $\nabla^2 \zeta + k_c^2 \zeta = 0$ 으로부터 유도된 것으로 $k_c^2 = k^2 - \nabla^2 / 2P + |\nabla P|^2 / 4P$ 이다.

이제 굴절모형, 환경사 파랑식, 포물형 근사모형의 상호관계를 분석하기 위해 Berkhoff et al.(1982)이 사용한 바와 같이 $\eta = A(x, y)e^{iS(x, y)}$ 를 관련 식에 대입한 후 실수부와 허수부 각각 비교하기로 한다. 우선 환경사 파랑식에서는 식 (4)를 얻으며 실수부인 첫 식은 광학의 eikonal식이고 허수부인 둘째는 에너지 보존식이다.

$$k^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{AP} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} = 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P A^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P A^2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \tag{4b}$$

이 식과 식 (1)을 비교하면 위상함수는 $\vec{k} = \nabla S$ 로 정의되어야 하며 에너지 보존식은 두식이 동일하나 환경사 파랑식의 eikonal식에는 진폭의 경사율에 의해 파수벡터가 변형되어 회절이 포함됨을 알 수 있다.

한편 환경사 파랑식으로부터 유도된 포물형 근사는 주 진행방향의 차수가 하나 줄어들어 Radder(1979)의 모형은 식 (5)가 된다.

$$\zeta_x = ik\zeta + \frac{i}{2k} \zeta_{yy} - \frac{k_x}{2k} \zeta \tag{5}$$

여기에 위와 동일한 방법을 사용하여 eikonal식과 에너지

보존식을 구하면 식 (6)이 된다.

$$2k^2 - 2k \frac{\partial S}{\partial x} - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{AP} \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{1}{2P} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{4P^2} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (kPA^2) + \frac{\partial}{\partial y} \left(PA^2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \quad (6b)$$

식 (6b)는 Berkhoff et al.(1982)이 제시한 것과 약간 차이가 있으나 이는 Radder(1979)가 지적한 바와 같이 천해역의 가정에서는 무시할 수 있다. 그리고 파랑의 방향이 주 방향(x)과 거의 같다면, 즉 $k \approx \partial S / \partial x$ 이 성립하면, 포물형 근사식은 환경사 파랑식과 같다.

이제까지 기술한 것은 기존 결과를 요약한 것으로 포물형 근사모형의 특성은 환경사 파랑모형과 굴절 모형의 중간에 위치함을 알 수 있다. 그리고 포물형 근사모형은 계산된 파랑이 주 진행방향과 거의 같은 경우에는 정밀도가 높음이 입증되었고 계산 파랑이 주 방향과 차이가 있는 경우에도 적용할 수 있는 고차의 포물형 근사모형을 Kirby(1986a, 1986b)가 제시하여 상당한 성과를 거두었다. 그러나 Kirby의 모형은 y에 대한 2차 미분식에 대한 것으로 정밀도를 높이기 위해서는 미분 차수를 증가시키는 대신 minimax 근사를 시도하였다. 한편 서와 이(2006)는 수정 환경사 파랑식으로부터 연산자 분리법을 사용하여 포물형 근사식을 제시하였다. 그리고 Mordane et al.(2004)은 Padé(2,2) 근사에 의한 모형을 제안하였으나 위상부분에 대한 것으로 파고부분을 포함하지 않아 제한적 의미의 포물형 근사식이라 평가할 수 있다.

고차 포물형 근사모형은 y에 대한 고차 미분과 연계되며 이로 인한 측면의 적정한 경계조건이 부여되어야 한다. 고차 수치모형은 차분식의 복잡함과 경계조건 설정 등이 수치모형 개발에 큰 걸림돌로 분석된다. 본 논문에서는 고차 수치모형의 개발에 필요한 바탕을 정립하기 위해 Snell 법칙을 적용할 수 있는 단순 지형에 대한 고차 포물형 근사모형과 그 계산결과를 제시하고자 한다.

2.2 Radder 모형

기존의 포물형 근사식 가운데 가장 저차(lowest order)로 알려진 Radder(1979)의 모형은 Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우에는 횡방향 파수(m)가 일정하여 식 (7)로 나타낼 수 있다. 이는 식 (5)에 $\zeta = \hat{\zeta} \exp(imy)$ 을 대입하고 정리한 것으로 편의상 위첨자(^)를 생략한 것이며 이 후

의 모든 식에도 위첨자가 생략되었다.

$$\zeta_x = ik \left(1 - \frac{m^2}{2k^2} \right) \zeta - \frac{k_x}{2k} \zeta \quad (7)$$

여기서 아래 첨자는 미분을 의미한다. 일차 미분식인 이 식의 해는 적분형태로 표현되며 제 2.1절에서 사용한 방법인 $\zeta = A(x) \exp\{iS(x)\}$ 를 대입하여 복소수의 상등관계를 이용해도 같은 결과를 얻게 된다.

$$\zeta = \frac{A_0}{\sqrt{k}} \exp \left\{ i \int^x k \left(1 - \frac{m^2}{2k^2} \right) dx \right\} \quad (8)$$

여기서 A_0 는 임의 상수로 이는 초기조건으로부터 구할 수 있다. 이제 위에서 정의한 해면함수의 관계 $\zeta = \sqrt{P} \eta$ 를 이용하면 식 (8)로부터 계산된 파향(θ)과 파고는 식 (9)의 우변임을 보일 수 있으며 좌변의 식들은 굴절모형 또는 환경사 모형의 결과이다.

$$\begin{cases} k \cos \theta = k \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right)^{1/2} \approx k \left(1 - \frac{m^2}{2k^2} \right) \\ \frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{(C_g \cos \theta)_1}}{(C_g \cos \theta)_2} \approx \frac{\sqrt{(C_g)_1}}{\sqrt{(C_g)_2}} \end{cases} \quad (9)$$

식 (9)를 분석하면 Radder의 모형은 변형된 파향과 x축의 각이 작은 경우($m^2/k^2 \ll 1$)에 파향 계산의 정확도가 높으나 파고 계산에는 굴절이 배제된 천수 효과만을 고려한 것임을 알 수 있다. 그리고 Kirby의 기존 연구(1986a, 1986b)에 기술된 연산자 상관방법에서는 수심이 일정한 경우를 대상으로 하였기 때문에 식 (9)의 첫 식인 파향 계산에 초점을 두었다. 그의 논문에서는 일정 수심의 경우에 대해 추출된 파향계산 정밀도 증대방법을 수심이 완만히 변하는 지역으로 확장할 수 있음을 입증한 점은 중요한 의미를 갖는다. 그러나 Kirby의 기존 연구는 파향 계산의 측면이 부각된 것으로 평가할 수 있다.

2.3 수정 Radder 모형

식 (9)로부터 포물형 근사모형의 정밀도 증대는 파향 뿐만 아니라 파고에 대한 계산도 중요함을 알 수 있다. 이로부터 Radder의 모형은 굴절을 적절히 나타내지 못함으로 이를 수정한 식 (10)을 제안하고 이를 분석하기로 한다.

$$\zeta_x = ik \left(1 - \frac{m^2}{2k^2} \right) \zeta - \frac{k_x}{2k} \left(1 + a \frac{m^2}{k^2} \right) \zeta \quad (10)$$

식 (10)의 상수 a의 값에 따라 파고 계산의 정확도가 정

해지나 여기서는 고차 수치모형에 대한 체계적인 방법을 제시하는 것이 목적이므로 위에 사용된 복소수 상등과 이항급수를 이용하여 정하기로 한다. 그러면 식 (10)의 해는 식 (11)이 됨을 보일 수 있다.

$$\zeta = \frac{A_o}{\sqrt{k}} \exp \left\{ \frac{am^2}{4k^2} + i \int^x k \left(1 - \frac{m^2}{2k^2} \right) d\xi \right\} \quad (11)$$

식 (11)의 우변 첫 항은 파고에 대한 것이고 둘째 항은 위상에 대한 것임을 알 수 있다. 우변 첫 항의 지수함수를 전개하고 이를 식 (9)의 둘째 식과 연관시키면 $a = 1$ 이 적절함을 보일 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{am^2}{4k^2} \right) &= \left[1 + \frac{am^2}{4k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{am^2}{4k^2} \right)^2 + \dots \right] \simeq \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right)^{-1/4} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} \end{aligned} \quad (12)$$

그러므로 굴절 현상을 적절히 나타내지 못하는 Radder의 모형을 수정한 식은 굴절 현상을 재현할 수 있는 최저차의 포물형 근사모형으로 평가할 수 있다. 이는 Snell 법칙이 성립하는 경우에 해당되므로 y방향으로 수심이 완만히 변하는 경우로 식 (10)을 확장한 포물형 근사모형은 식 (13)으로 나타낼 수 있다.

$$\zeta_x = ik\zeta + \frac{i}{2k} \zeta_{yy} - \frac{k_x}{2k} \zeta + \frac{k_x}{2k^3} \zeta_{yy} \quad (13)$$

2.4 Booij 모형

Booij(1981)가 제시한 포물형 근사식은 흐름이 없고 횡방향 수심의 변화율이 없는 경우 식 (14)로 나타낼 수 있다.

$$\left(1 - \frac{m^2}{4k^2} \right)_{\zeta_x} = ik \left(1 - \frac{3m^2}{4k^2} \right) \zeta - \frac{k_x}{2k} \left(1 + \frac{3m^2}{4k^2} \right) \zeta \quad (14)$$

앞 절에 적용한 복소수 상등을 이용하여 구한 해는 식 (15)가 됨을 보일 수 있다.

$$\zeta = A_o \exp \left\{ - \int^x \frac{k_x}{2k} \frac{\left(1 + \frac{3m^2}{4k^2} \right)}{\left(1 - \frac{m^2}{4k^2} \right)} d\xi + i \int^x k \frac{\left(1 - \frac{3m^2}{4k^2} \right)}{\left(1 - \frac{m^2}{4k^2} \right)} d\xi \right\} \quad (15)$$

이 식의 위상부분은 Table 1의 Padé(1,1) 근사임을 쉽게 알 수 있으며 Table 1은 부록에 기술된 방법으로 계산하여 정리한 것이다.

한편 파고부분은 약간의 연산과정을 거쳐야 식 (15)로 표현된 근사식의 정밀도를 판정할 수 있다. 우선 굴절 이론에서 파고와 연관된 파향의 함수를 m^2/k^2 를 써서 Maclaurin 전개하면 식 (16)이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} &= \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right)^{-1/4} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{k^2} + \frac{5}{32} \frac{m^4}{k^4} + \frac{15}{128} \frac{m^6}{k^6} + \frac{195}{2048} \frac{m^8}{k^8} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

그리고 식 (15)의 파고부분을 식 (12)과 같이 전개하여 m^4/k^4 항까지 나타내면 식 (17)이 된다.

$$e^{\left(\frac{m^2}{4k^2} + \frac{m^4}{32k^4} \right)} = \left(1 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{k^2} + \frac{1}{32} \frac{m^4}{k^4} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{32} \frac{m^4}{k^4} + \dots \right) \quad (17)$$

식 (17)의 우변을 전개하여 이를 식 (16)과 비교하면 Booij 모형인 식 (14)의 파고 오차는 $O(m^4/k^4)$ 임을 알 수 있다. 그리고 파향에 대한 오차는 식 (15)과 Table 1로부터 $O(m^6/k^6)$ 임을 보일 수 있다. 종합하면 결국 Booij 모형은 파향의 근사에 치중한 것이고 2차 y편미분에 의한 방법 가운데 정밀도를 효과적으로 높인 것으로 평가할 수 있다.

Table 1. Padé Approximations to $(1-x)^{1/2}$

이름	Padé 근사식	오차
$P_{(1,0)}$	$\left(1 - \frac{1}{2}x \right)$	$O(x^2)$
$P_{(1,1)}$	$\left(1 - \frac{3}{4}x \right) / \left(1 - \frac{1}{4}x \right)$	$O(x^3)$
$P_{(2,2)}$	$\left(1 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16}x^2 \right) / \left(1 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}x \right)$	$O(x^5)$
$P_{(3,3)}$	$\left(1 - \frac{7}{4}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{64}x^3 \right) / \left(1 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{64}x^3 \right)$	$O(x^7)$
$P_{(4,4)}$	$\left(1 - \frac{9}{4}x + \frac{27}{16}x^2 - \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x^4 \right) / \left(1 - \frac{7}{4}x + \frac{15}{16}x^2 - \frac{5}{32}x^3 + \frac{1}{256}x^4 \right)$	$O(x^9)$

3. 고차 포물형 근사모형

제 2절에 기술한 모든 포물형 근사모형은 2차 편미분을 포함하는 미분방정식이다. 그러나 포물형 근사모형의 정밀도를 높이기 위해서는 앞 절의 Padé(1,1) 근사보다 고차의 근사식이 필요하다. 만일 Padé(2,2) 근사를 사용하면 편미분은 4차가 되어 이를 유한차분할 경우에는 최소 5개의 인접된 격자점이 연관된다.

이와 같이 편미분의 차수는 Padé 근사와 연관되어 있으며 고차의 근사는 다수의 격자점이 계산에 참여함으로 수치모형의 개발이 더욱 어렵게 된다. 이러한 이유로 기존의 포물형 근사모형은 2차 y편미분에 국한된 것으로 분석되며 본 절에서는 Padé(2,2) 근사에 의한 새로운 포물형 근사모형을 제시하여 관련 수치모형 개발에 도움을 주고자 한다.

파향의 근사에 치중한 Padé(2,2) 근사모형은 위상부분은 Table 1을 이용할 수 있으나 파고부분의 값을 정하기 위해서는 미정계수 a 와 b 를 포함하는 식 (18)로 나타낸다.

$$\left(1 - \frac{3m^2}{4k^2} + \frac{m^4}{16k^4}\right)\zeta_x = ik\left(1 - \frac{5m^2}{4k^2} + \frac{5m^4}{16k^4}\right)\zeta - \frac{k_x}{2k}\left(1 + a\frac{m^2}{k^2} + b\frac{m^4}{k^4}\right)\zeta \quad (18)$$

위에 기술된 복소수 상등법을 식 (18)에 적용하면 파고부분을 구하기 위해 제 2절의 방법을 사용하여 적분꼴의 해를 구한 뒤 파고와 관련된 지수함수를 Maclaurin 전개한다. 그리고 이를 식 (16)과 비교하여 미정계수를 정하면 $a = 1/4$, $b = 5/15$ 가 된다. 그러면 이 때 파고 오차는 $O(m^6/k^6)$ 이고 파향에 대한 오차는 $O(m^{10}/k^{10})$ 임을 보일 수 있다.

위의 a 와 b 를 사용하고 y 방향으로 수심이 완만히 변하는 경우로 이를 확장한 포물형 근사모형은 식 (19)로 나타낼 수 있다.

$$\zeta_x + \frac{3}{4k^2}\zeta_{xyy} + \frac{1}{16k^4}\zeta_{xyyyy} = ik\zeta + \frac{5i}{4k}\zeta_{yy} + \frac{5i}{16k^3}\zeta_{yyyy} - \frac{k_x}{2k}\zeta + \frac{k_x}{8k^3}\zeta_{yy} - \frac{5k_x}{32k^5}\zeta_{yyyy} \quad (19)$$

위에서도 밝혔듯이 식 (19)는 파향의 근사에 치중한 Padé(2,2) 포물형 근사모형이다.

본 절에는 Padé(2,2) 근사모형만을 제시하였으나 앞에서 기술한 방법을 적용하면 원하는 정밀도의 Padé 근사

에 의한 고차 포물형 근사모형을 얻을 수 있다. 모든 포물형 근사모형은 파고부분과 위상부분으로 구성되어 있다. 모형의 위상부분은 $\sqrt{1-m^2/k^2}$ 에 대한 Padé 근사에서 직접 구할 수 있으나 파고부분은 Maclaurin 전개를 사용하여 미정계수를 구해 구성해야 한다. 그리고 고차로 갈수록 미정계수의 수가 증가함으로 계산의 복잡함을 쉽게 예상할 수 있다.

4. 수치실험

Padé 근사에 의한 포물형 모형의 정밀도를 분석하기 위해 등수심선이 직선인 해안선과 평행한 지형에서의 파랑 변형을 계산하여 이를 상호비교하기로 한다. 이 때 일정한 사면에 대한 파고의 변화는 굴절에 대한 엄밀해인 식 (9)로 나타낼 수 있고 파수는 전형 파랑분산식을 사용 계산하였다. 해저경사는 1:100이고 계산 영역의 수심은 10 m에서 1 m까지로 x 방향 격자점은 100개($M=99$)로 구성된다. 파랑의 제원으로는 주기 7초, 파고 0.2 m, 다수의 입사각을 사용하여 구한 파고비를 계산하였다.

Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우 포물형 근사모형의 해는 식 (15)와 같은 지수함수의 형태를 취한다. 일반적으로 이 해는 수치계산법에 의해 구하게 되며 여기서는 수치적분인 Simpson법을 사용하였다. 파고의 계산에는 식 (9)의 엄밀해에 $\cos\theta$ 가 존재하므로 계산된 파향에 영향을 받는다. 그리고 앞에서 기술한 바와 같이 파향계산의 오차는 파고계산의 오차보다 훨씬 작기 때문에 본 논문에서는 오차가 큰 파고계산 결과만을 제시하기로 한다.

Fig. 1은 Radder 모형과 수정 Radder 모형의 결과이며 입사각이 작을수록 파고비 계산이 정확함을 보인다. 직교 입사의 경우에는 앞에서 지적한 바와 같이 Radder 모형도 엄밀해와 같게 된다. 그리고 주어진 입사각에 대한 파고비 계산의 정확도는 파랑이 해안으로 진행함에 따라 떨어짐을 보여 오차가 누적된 것임을 암시한다.

한편 파랑이 진행함에 따라 파향은 굴절로 인해 감소하여 점차 x 방향 쪽으로 향하게 되며 따라서 포물형 근사모형은 점차 좋은 결과를 보일 것을 예상할 수 있다. 그러나 Fig. 1의 결과를 분석하면 계산오차는 진행거리에 따라 증가하기 때문에 누적오차의 영향이 더 큰 것으로 분석된다.

Radder 모형에 대한 수치실험의 결과는 앞 절에 기술된 해석과 일치하여 Radder 모형으로는 파랑의 굴절을 적절히 재현할 수 없음이 그림에서 증명되었다. 그리고 수

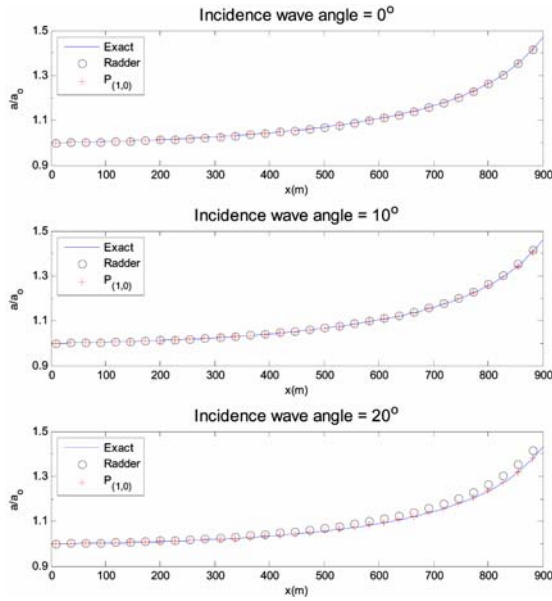


Fig. 1. Computed linear wave amplitude by Radder's method and Padé (1,0) approximation for a constant sloping bed (1:100).

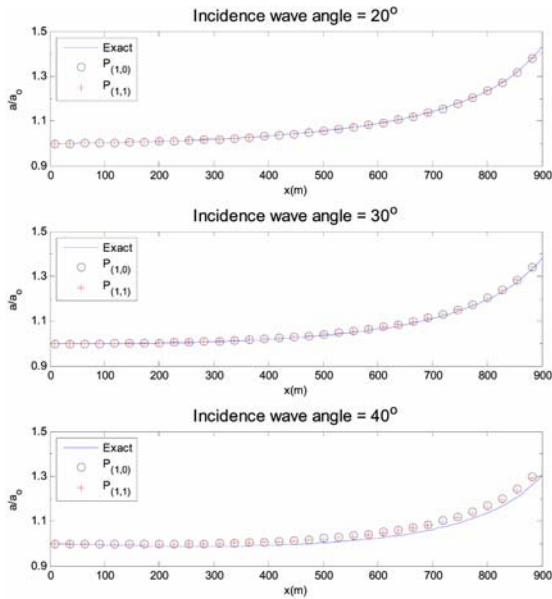


Fig. 2. Computed linear wave amplitude by Padé (1,0) and Padé (1,1) approximations for a constant sloping bed (1:100).

정 Radder 모형 또는 Padé(1,0) 모형은 입사각이 대략 25°보다 작은 경우에 파고비는 정확히 계산되었다.

Fig. 2는 Padé(1,0)모형과 Padé(1,1)모형의 파고계산 결

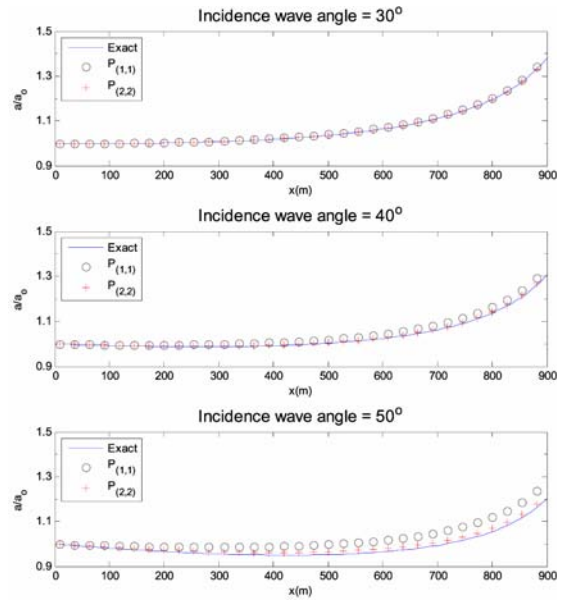


Fig. 3. Computed linear wave amplitude by Padé (1,1) and Padé (2,2) approximations for a constant sloping bed (1:100).

과이며 입사각은 20°, 30° 그리고 40°를 사용하였다. 그림의 결과를 분석하면 Padé(1,1)모형 또는 Booi 모형은 입사각이 대략 30°보다 작은 경우에 정확히 파고비를 계산한다. Padé(1,1)모형의 결과에서도 주어진 입사각에 대한 파고비 계산의 정확도가 파랑 진행거리에 따라 떨어짐을 보이고 있다.

Fig. 3은 Padé(1,1)모형과 Padé(2,2)모형의 파고계산 결과이며 입사각은 30°, 40° 그리고 50°를 사용하였다. 그림의 결과를 분석하면 Padé(2,2)모형은 입사각이 대략 45°보다 작은 경우에 정확한 파고비를 보인다. 그리고 Padé(2,2) 모형에서도 파랑 진행거리에 따른 오차가 누적됨을 보인다. 일정 경사의 지형에 대한 수치실험의 결과에 근거하여 제시된 각 포물형 근사모형의 적용가능 입사각을 Table 2에 정리하였다.

제시된 수치실험 결과 Padé 근사에 의한 포물형 근사

Table 2. Applicability of parabolic approximation models to a constant sloping bed (1:100)

모형	적용가능 입사각
Radder	대략 5°까지
Padé(1,0)	대략 25°까지
Padé(1,1)	대략 30°까지
Padé(2,2)	대략 45°까지

모형의 정밀도는 사용한 Padé 근사의 정밀도에 비례함을 보이고 있다. 그리고 일반적으로 고차의 포물형 근사모형은 고 정밀도를 보이거나 원하는 정밀도를 얻기 위해서는 적절한 차수의 모형을 사용해도 충분함을 알 수 있다. 여기서 다른 입사각에 따른 포물형 근사모형의 정밀도 기 준은 입사각과 지형의 특성에 따라 변하기 때문에 개략적인 기준임을 밝힌다.

5. 결 론

모든 포물형 근사모형은 파고부분과 위상부분으로 구분할 수 있다. 등수심선이 해안선과 평행한 지형과 같이 단순한 경우에는 이를 분명히 인지할 수 있으며 기존 Radder 모형과 Booij 모형의 특성을 분석하여 포물형 모형들은 Padé 근사식과 연계됨을 보였다. 본 논문에서는 기존의 파향 연계성 뿐만 아니라 파고 연계성을 분명히 밝혀 기존의 결과를 확장하였다. 그리고 새로운 Padé(2,2) 포물형 근사모형을 제시하였으며 고차 모형의 체계적인 구성법을 기술하였다.

본 논문에서 다른 모든 포물형 근사모형을 정밀도를 분석하기 위해 일정 사면지형에 대한 수치실험을 수행하였고 Padé 근사의 차수가 높음에 따라 고차 모형의 정밀도가 증가하는 것을 입증하였다. 본 연구결과는 보다 복잡한 지형에 적용할 수 있는 포물형 근사 수치모형의 개발과 결과 검증에 유용한 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해상파랑 관측 및 조사”연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남, 이종찬 (2006). 수정 완경사 파랑식에 대한 포물형 근사식 모형, 한국 해안·해양공학회지, 18(4), 360-371.
Berkhoff, J.C.W., (1972). Computation of combined refraction-

- diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C., (1982). Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves, Coastal Eng. 6, 255-279.
Booij, N., (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Report 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. Technology.
Chamberlain, P.G. and Porter, D., (1995). The modified mild-slope equation, J. Fluid Mech., 291, 393-407.
Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Jain, M.K., Iyengar S.R.K. and Jain R.K., (1985). Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, India.
Kirby, J.T., (1986a). Higher order approximations in the parabolic equation method for water waves, J. Geophys. Res., 91, 933-952.
Kirby, J.T., (1986b). Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., 10, 355-378.
Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., (1986). Approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation, Coastal Eng., 9, 545-561.
Liu, P. L.-F., (1990). Wave transformation, In: B. LeMehaute, and D. M. Hanes(Editors), The Sea, Ocean Engineering Science Vol. 9, 27-63, Wiley, New York.
Miles, J.W. and Chamberlain, P.G., (1998). Topographical scattering of gravity waves, J. Fluid Mech., 361, 175-188.
Mordane, S., Mangoub G, Maroihi K. L. and Chagdali M., (2004). A parabolic equation based on a rational quadratic approximation for surface gravity wave propagation, Coastal Eng., 50, 85-95.
Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., (1986). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press.
Radder, A.C., (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., 95, 159-176.

Received March 19, 2007

Accepted May 20, 2007

부 록

Padé근사(또는 Rational 근사)는 주어진 함수를 식 (A1)과 같은 분수 형태의 다항식을 사용하며 사용된 다항식보다 높은 정밀도를 보인다(Jain et al., 1985; Press et al., 1988).

$$P_{(n,m)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^m b_i x^i} \tag{A1}$$

여기서 a_i 와 b_i 는 미정 계수로 주어진 함수 $f(x)$ 를 이용하여 구한다. 이 상수들을 구하기 위해서는 함수를 Maclaurin 전개한 후 근사식 (A1)을 빼서 분자의 계수들이 0이 되는 조건을 사용한다.

$$f(x) - P_{(n,m)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \left(1 + \sum_{i=1}^m b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^n a_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^m b_i x^i} \tag{A2}$$

여기서 c_j 는 Maclaurin 전개로부터 구한 상수이다. 이제 함수 $(1-x)^{1/2}$ 의 Padé(1,1) 근사식을 구하기로 한다. 우

선 이 함수의 Maclaurin 전개는 식 (A3)가 된다.

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots \tag{A3}$$

이를 식 (A2)에 대입하여 분자만을 나타내면 식 (A4)가 된다.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \dots\right)(1 + b_1x) - (a_0 + a_1x) = \\ & (1 - a_0) + \left(b_1 - \frac{1}{2} - a_1\right)x - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}b_1\right)x^2 + \dots \end{aligned} \tag{A4}$$

식 (A4)의 계수들이 0인 조건으로부터 식 (A5)의 Padé(1,1) 근사식을 얻을 수 있다.

$$P_{(1,1)} = \frac{1 - \frac{3}{4}x}{1 - \frac{1}{4}x} + O(x^3) \tag{A5}$$

식 (A5) 근사식의 오차는 $O(x^3)$ 가 되며 이는 결국 식 (A3)의 2차 다항식까지 같은 것임을 알 수 있다. 마찬가지로 방법으로 계산한 Padé 근사식을 Table 1에 정리하였다.