

다물체계의 자려진동 구현을 위한 마찰 모델링

Friction Model to Realize Self-excited Vibration of Multi-body Systems

노 현 영* · 유 흥 희†

Hyun Young Roh and Hong Hee Yoo

(2007년 4월 2일 접수 ; 2007년 5월 28일 심사완료)

Key Words : Friction Force(마찰력), Static Friction Coefficient(정적 마찰계수), Kinetic Friction Coefficient(동적 마찰계수), Self-excited Vibration(자려진동)

ABSTRACT

This paper presents a friction model to realize self-excited vibration of multi-body systems. The friction coefficient is modeled with a spline function in most commercial codes. Even if such a function resolves the problem of discontinuity in friction force, it cannot realize self-excited vibration phenomena. Furthermore, as the relative velocity approaches zero, the friction coefficient approaches zero with the conventional model. So, slip occurs when small force is applied to the system. To avoid these problems a new friction model is proposed in this study. With the new friction model, the self-excited vibration can be realized since the friction coefficient changes with the relative velocity. Furthermore, the slip phenomena could be reduced significantly with the proposed model.

기 호 설 명

- μ_s : 정적 마찰계수
- μ_k : 동적 마찰계수
- v_s : 정적 천이속도(m/s)
- v_d : 동적 천이속도(m/s)

1. 서 론

오늘날 다물체 동역학에 관한 연구에서는 물체 사이에 일어나는 접촉 현상을 효과적으로 구현하고자 하는 많은 노력이^(1,2) 있었다. 임의의 두 강체 사이에 접촉이 일어날 경우 그 접촉점에서는 수직항력과 접

선방향 마찰력이 발생한다. 그런데 접선방향 마찰력에 대해 쿨롱의 마찰모델을 적용하면 힘의 불연속으로 인해 수치적분 시 문제가 종종 발생한다. 따라서 힘의 불연속을 해결하기 위해 종종 마찰계수를 spline 함수로 모델링하여 사용한다. 현재 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램들은 접촉현상을 모델링할 때 특정한 형태의 spline함수^(3,4) 마찰계수로 사용하고 있다.

대부분의 상용프로그램에 사용하고 있는 마찰 모델은 그러나 자려진동 현상을 구현하지 못하며 두 강체가 점착 조건으로 접촉하고 있을 때 저속 미끄럼 현상이 발생하는 문제점들을 갖고 있다. 즉, 프로그램에서 마찰계수의 함수가 사용될 때 두 강체 간 상대속도가 0에 가까워짐에 따라서 마찰계수 역시 0에 가까워지기 때문에 작은 힘이 가해져도 점착이 되지 못하고 미끄럼이 일어나게 된다. 즉, 마찰력이⁽⁵⁾ 접촉하는 지점에 제대로 작용하지 않는 것이다.

† 교신저자; 정희원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070
* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

이 연구에서는 자려진동 현상을 구현하기 위해 두 강체 사이의 접촉 모델로 새로운 형태의 마찰계수 함수를 제시하려고 한다. 이 모델링 방법은 우선 기존의 상용 프로그램을 그대로 이용하고, 그 프로그램에서 사용하고 있는 특정한 형태의 마찰계수 함수 대신, 제안된 마찰계수 함수를 쉽게 사용할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 이 연구에서는 제안된 마찰계수 함수에 나타나는 변수들의 변화에 따라 자려진동 현상이 어떻게 구현되는지에 대한 조사 연구를 수행하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 2장에서는 이 연구에서 제안된 마찰계수를 위한 함수모델에 대한 설명과 함께 현재 상용해석 프로그램들에 사용되는 함수모델을 비교 분석하였고 3장에서는 제안된 마찰계수 함수모델을 적용하여 함수에 나타나는 각종 변수들의 변화에 따른 자려진동 현상을 비교하고, 그 영향들을 논의하였다. 마지막으로 4장에는 이 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

2. 접촉모델링

2.1 제안된 마찰계수 함수

Fig. 1은 이 논문에서 제안하고 있는 마찰계수 함수의 모습을 보여준다. 최대한 쿨롱 마찰력에 가깝게 모델링 하되 힘의 불연속이 일어나지 않게 하였다.

Fig. 1은 아래와 같은 형태의 함수를 사용하여 얻은 그림이다.

$$\begin{aligned} \mu &= -a^{(v-b)} - \mu_k & v < -v_s \\ \mu &= \frac{\mu_s}{(v_s)^\beta} v^\beta & -v_s \leq v \leq v_s \\ \mu &= a^{-(x+b)} + \mu_k & v > v_s \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 μ_k 는 동적 마찰계수로 함수의 점근선이 된다. β 와 a (>1.0)의 값은 사용자가 결정하는 상수 값이고 b 는 동적 마찰계수, 정적 마찰계수, β 그리고 a 가 정해지면 계산되는 상수값이다. 현재 대부분의 상용프로그램에서 사용되고 있는 마찰계수 함수는 v_s, v_d 두 가지 천이속도(transition velocity)라는 경계 값과 정적·동적 마찰계수를 이용하여 정의하고 있다. 하지만, 제안된 마찰계수 함수에서는 v_d 대신 a 와 v_s , 정적·동적 마찰계수를 이용하였다. 이 과정에서 정적·동적 마찰계수와 정적 천이속도는 각각

$\mu_s=0.35, \mu_k=0.3, v_s=0.01$ 로 하였다.

2.2 상용 프로그램과의 차이점

Fig. 2에서 알 수 있듯이 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램에서는 마찰계수를 정의하는데 4가지 변수를 사용하고 있다. 그것은 앞에서 언급한 것과 마찬가지로 μ_s, μ_k, v_s, v_d 이다. 이때 상대속도가 v_s 값보다 작을 경우 다음과 같이 정의된 마찰계수가⁽⁵⁾ 사용되고,

$$\mu = havs \sin(v, 0, 0, v_s, \mu_s) \quad (2)$$

상대속도가 $v_s < v < v_d$ 일 경우

$$\mu = havs \sin(v, v_s, \mu_s, v_d, \mu_k) \quad (3)$$

와 같이 정의 된다. 상대속도가 v_d 보다 큰 경우는 동적 마찰계수가 사용된다.

이렇게 마찰계수가 상대 속도에 대해 정의 되면 다음 식에 의해 접촉 모델의 마찰력이 결정된다.

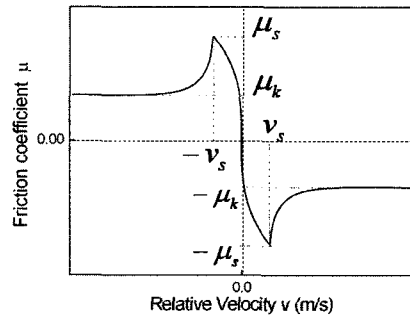


Fig. 1 Proposed friction coefficient function model

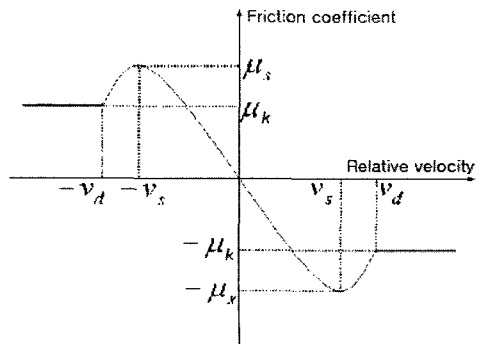


Fig. 2 Relations between relative velocity and friction coefficient employed in most commercial codes

$$F_f = \mu(v)F_n \quad (4)$$

이와 같은 접촉 모델을 사용하는 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램은 상대속도가 $-v_d < v < -v_s$, $-v_s < v < v_s$, 그리고 $v_s < v < v_d$ 구간일 때 정확한 결과를 얻지 못하고 있다.

좀 더 세부적으로 설명하면, 임의의 물체가 아주 작은 속도를 가질 때 힘의 불연속으로 인한 수치적분 상의 에러를 방지하기 위해 사용되는 특정 마찰계수 함수에서 속도가 0에 가까워짐에 따라 마찰력 또한 0에 가까워진다. 그래서 저속의 접촉모델에서 제대로 된 접촉력이 작용하지 않게 된다는 것이다. 또한 $-v_d < v < -v_s$, $v_s < v < v_d$ 구간에서도 불룩한 형태의 함수를 사용함으로써 불연속으로 인한 수치적분 상의 문제점은 발생하지 않지만 자려진동 현상은 나타낼 수 없다.

그러나 제안한 방법은 이러한 문제점을 극복하기 위해 임의의 두 물체가 접촉이 일어날 때 힘의 불연속이 없고, 접촉 시 힘의 방향 변화가 급격하게 일어나는 쿨롱 마찰을 잘 표현하기 위해 새로운 마찰계수 함수를 정의하고, 사용하는 방법을 제안하였다. 이렇게 제안된 마찰계수 함수는 기존의 프로그램과는 달리 v_d 값 대신 a 값을 사용하며, v_s 값과 근접한 왼쪽과 오른쪽 구간에서 형태도 달라지게 된다.

3. 모델링 예제

3.1 제안된 마찰 모델과 자려진동과의 관계

Fig. 3은 일정 속도 v_b 로 움직이는 벨트위에 스프링 k 가 연결된 질량 m 을 갖는 box가 놓여져 있는 시스템⁽⁶⁾이다. 이때 box의 x 방향 변위를 보고자 한다.

이 시스템에서 box가 왼쪽과 오른쪽으로 움직일 때 벨트와의 상대속도가 변하게 된다. 그리고, Fig. 1의 상대속도에 대한 마찰계수 함수를 보았을 때

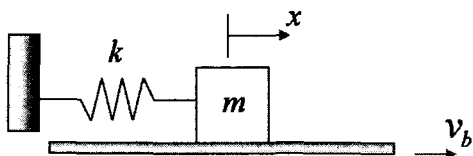


Fig. 3 Spring-mass system on moving belt ($k=300(\text{N/m})$, $m=10(\text{kg})$, $v_b=1.5(\text{m/s})$)

$v < -v_s$, $v > v_s$ 구간에서 상대속도에 따라 마찰계수 값이 급격하게 변화하는 것을 알 수 있다.

따라서, 상대속도에 따라 마찰계수 함수의 형태에 의해 마찰계수가 변하고, box에 작용하는 x 축 방향 마찰력 또한 변하게 된다. 그 결과 box가 오른쪽으로 움직이는 동안 마찰력에 의한 일은 왼쪽으로 움직이는 동안 마찰력에 의한 일보다 크게 된다. 즉, 오른쪽으로 움직일 때 box가 움직이는 방향과 마찰력의 방향이 같아 양의 일을 하게 되고, 왼쪽으로 움직일 때 box가 움직이는 방향과 마찰력의 방향이 반대가 되어 음의 일을 하게 된다. 여기서, 양의 일이 음의 일보다 더 크게 되므로 이 시스템에 투입되는 에너지가 방출되는 에너지보다 더 크게 되므로 진폭이 증가하게 된다. 하지만, Fig. 2의 상용프로그램에서 사용하고 있는 마찰계수 함수는 이런점을 고려하지 않았고, $-v_d < v < -v_s$, $v_s < v < v_d$ 구간의 형태도 자려진동의 현상을 구현하는데 적합하지 않는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 Table 1의 데이터를 이용하여 상용프로그램과 이 논문에서 제안하고 있는 마찰계수 함수를 이용하여 비교해 본 결과이다. 여기서 제안하고 있는 마찰계수 함수를 사용하였을 경우 진폭이 증가하는 자려진동 현상이 나타나는 것을 확인할 수 있고, 진폭이 증가하다가 일정 시간이 지난 후 진폭이 일정하게 되는 이유는 Fig. 1의 그래프에서 마찰계수가 상대속도 $v > -v_s$, $v < v_s$ 구간에서 감소하고 있고, 이는 마찰력의 감소로 이어지기 때문이다. 따라서, 자려진동을 일으키는 에너지의 증가가 없게 되므로 더 이상의 진폭 증가가 없이 일정하게 된다.

3.2 마찰계수 함수의 a 값에 따른 영향

앞장에서 설명하였듯이 상대속도에 따라 box가 받는 마찰력이 다르다. 이는 같은 상대속도 차이라 하더라도 마찰계수 함수의 형태에 따라 받는 마찰력의 차이가 생길 수 있다는 것이다.

제안된 마찰계수 함수에서 자려진동 현상이 일어날 수 있는 $v < -v_s$, $v > v_s$ 구간에서 함수 형태에 변화를

Table 1 Input parameters

$\mu_s = 0.35$, $\mu_k = 0.3$, $v_s = 0.01(\text{m/s})$	
RecurDyn	$v_d = 0.15(\text{m/s})$
Proposed	$\beta = 1/3$, $a = 1.5$

주기 위해서는 변수 a 의 값을 변화시켜야 한다.

이러한 a 값의 차이는 이 시스템의 최대 진폭에 도달하는 시간에 영향을 미친다. Fig. 5의 그래프는 a 값의 변화에도 최대 진폭에 영향을 미치지 않는 것을 보여주고, Fig. 6의 그래프는 a 값에 따라 최대 진폭에 도달하는 시간이 어떻게 변하는지 보여주는 그래프이다. a 값이 증가함에 따라 1.9가 될 때까지 최대진폭에 도달하는 시간이 빨라지다가 1.9 이후부터 서서히 최대진폭에 도달하는 시간이 증가하는 것을 알 수 있다. 그 이유는 belt의 속도가 1.5(m/s)일 때 box와 belt 사이의 상대속도가 $v < -v_s$ 구간에서 마찰계수 함수에 의해 시스템에 투입되는 에너지의 차이 때문이다. a 값에 따라 변하는 $v < -v_s$ 구간의

마찰계수 함수에서 같은 상대 속도에서도 a 값이 1.3일 때와 1.9일 때 마찰계수의 차이가 생기는데 1.3일 때 보다 1.9일 때 상대속도에 따른 마찰계수의 변화가 더 크고 그에 따른 투입되는 에너지의 변화폭이 더 크기 때문에 더 빨리 최대진폭에 도달하게 된다. 또한 1.9 이후로 최대 진폭에 도달하는 시간이 늘어나는 이유는 1.9 이후로 상대속도에 따른 마찰계수의 변화가 다시 작아지기 때문이다.

3.3 시스템의 변수에 따른 영향

Fig. 3의 시스템의 변수는 $v_b, \mu_s, \mu_k, \omega_n$ 이다. 여기서 사용된 제한된 마찰계수 함수는 Table 1의 proposed값으로 사용하였고, 스프링과 box의 값은 각각 $k=300(N/m), m=10(kg)$, belt의 속도는 $v_b=1.5(m/s)$ 로 사용하였다. 각 변수의 변화에 따라 자력진동현상에 어떠한 차이가 생기는지 확인 하려고 한다.

먼저 각각의 변수에 따른 결과를 살펴보기로 한다. Fig. 7은 belt의 속도 변화에 따른 자력진동 현상을 나타낸 그래프이다. Belt의 속도와 자력진동의 최대 진폭은 비례하는 것을 확인할 수 있고, 최대 진폭에 도달하는 시간 또한 비례하는 것을 확인할 수 있다. 이것은 belt의 속도에 따라 시스템이 진동을 시작하는 상대 속도가 달라지고 마찰계수의 변화 정도 또한 달라져 시스템에 투입되는 에너지의 차이로 인해 진폭과 최대 진폭에 도달하는 시간 또한 달라진다. belt의 속도가 커질 경우 상대 속도는 Fig. 1에서

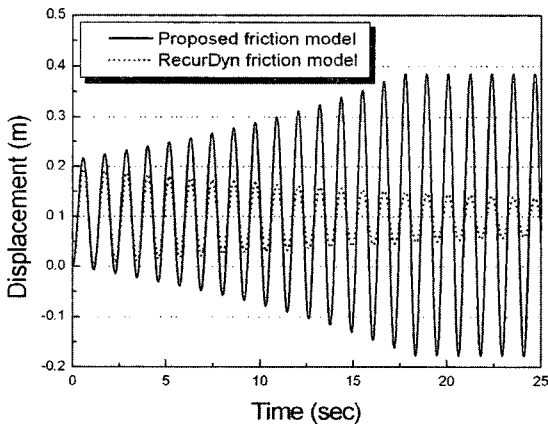


Fig. 4 Comparison of RecurDyn and proposed friction coefficient

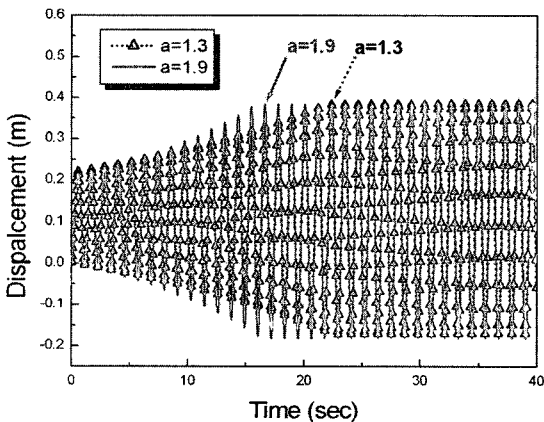


Fig. 5 Variation of displacement and time until maximum amplitude with different a ($v_s=0.01(m/s), \mu_s=0.35, \mu_k=0.3$)

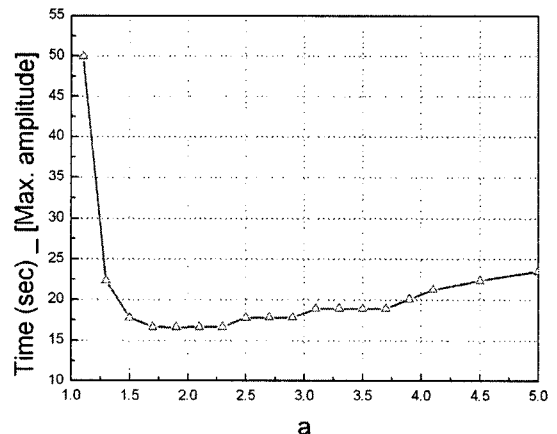


Fig. 6 Variation of time until maximum amplitude with different a ($v_s=0.01(m/s), \mu_s=0.35, \mu_k=0.3$)

$-v_s$ 보다 더 왼쪽에 있게 되고 초기의 마찰계수 변화는 속도가 작을 때 보다 더 적게 된다. 따라서, 최대 진폭에 도달하는 시간은 길어지고, 진동의 횟수가 늘어나면서 그만큼 받는 에너지 또한 증가하여 최대 진폭도 증가하게 된다. 이 시스템으로 RecurDyn에서 시뮬레이션이 가능한 belt 속도인 5(m/s)까지는 최대 진폭과 최대진폭에 도달하는 시간이 계속 늘어난다.

Fig. 8은 $\Delta\mu = \mu_s - \mu_k$ 에 대한 영향을 보여주는 그래프이다. Fig. 8(a) 그래프에서는 μ_k 값을 고정시키고 μ_s 값을 다르게 하였고, Fig. 8(b) 그래프에서는 μ_s 값을 고정시키고 μ_k 값을 다르게 해서 영향을 확인한 그래프이다.

두 그래프 모두 $\Delta\mu$ 가 클 때 진폭이 더 커졌으며, μ_s 값이 커질 경우에는 box가 오른쪽으로 움직이는 변위가 더 커졌으며, μ_k 값이 더 작아지면 box가 왼쪽으로 움직일 때 변위가 더 커지는 것을 알 수 있다. 이러한 이유는 box가 오른쪽으로 움직일 때는 box의 진행방향과 같은 방향으로 마찰력이 작용하므로 μ_s 값이 더 커질수록 더 큰 마찰력이 작용하여 더 큰 에너지가 투입되어 오른쪽으로 더 움직이고, box가 왼쪽으로 움직일 때는 box의 진행방향과 반대 방향으로 마찰력이 작용하므로 μ_k 값이 작아질수록 마찰력에 의해 방출되는 에너지가 작아지기 때문에 왼쪽으로 더 움직이게 되는 것이다. Fig. 8(c) 그래프를 보면 같은 $\Delta\mu$ 에서는 0.561(m)로 진폭이 같은 것을 알 수 있다. 또한, $\Delta\mu$ 와 최대진폭에 도달하는 시간은 반비례하는 것을 알 수 있다.

Fig. 9는 고유진동수 ω_n 에 대한 그래프이다. ω_n 이 증가함에 따라 주기와 최대진폭은 반비례하는 것을 알 수 있고, 최대진폭에 도달하는 시간과는 비례하는

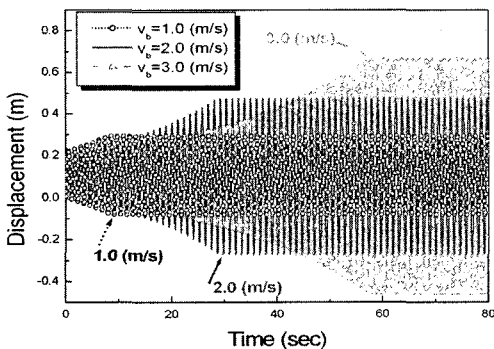
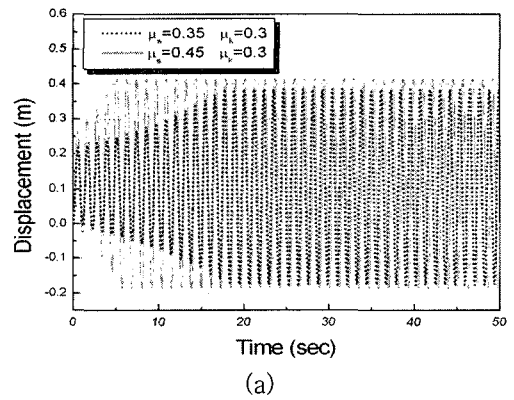


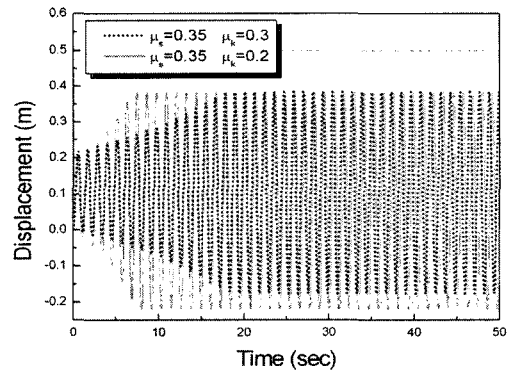
Fig. 7 Variation of displacement with different v_b ($a=1.5$, $v_s=0.01$ (m/s), $\mu_s=0.35$, $\mu_k=0.3$)

것을 확인할 수 있다. 고유진동수는 box의 질량과 스프링 강성에 영향을 받으므로 고유진동수가 증가하는 경우인 질량이 작아지거나 스프링 강성이 커지는 경우 box에 작용하는 마찰력이 작아지거나 스프링의 힘이 커져서 최대 진폭은 줄어들게 되고, 최대 진폭에 도달하는 시간 역시 늘어나게 된다.

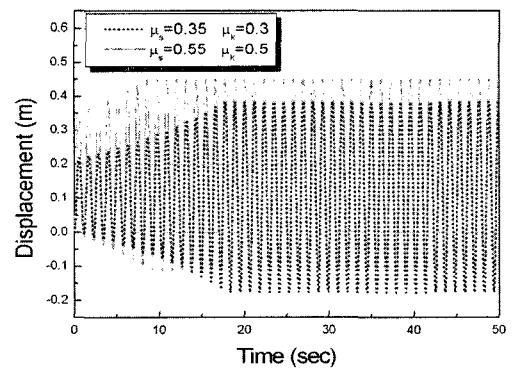
지금까지 인자들 각각의 영향을 살펴보고 다음



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 Variation of displacement with different $\Delta\mu$ ($a=1.5$, $v_s=0.01$ (m/s), $v_b=1.5$ (m/s))

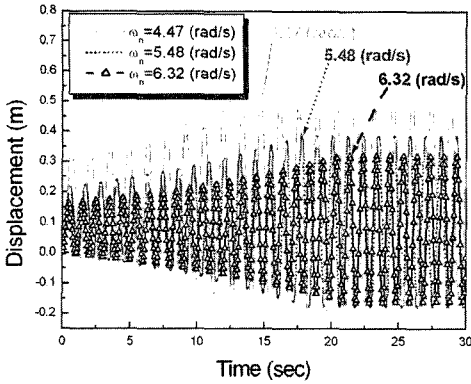


Fig. 9 Variation of displacement with different ω_n ($a=1.5$, $v_s=0.01$ (m/s), $\mu_s=0.35$, $\mu_k=0.3$)

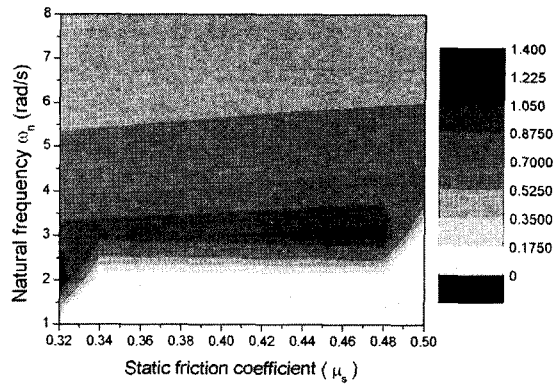


Fig. 12 Comparison of amplitude between ω_n and $\Delta\mu$

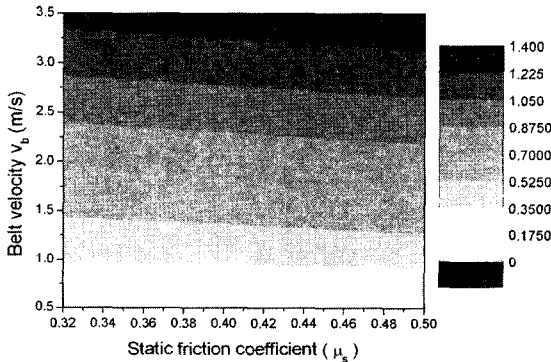


Fig. 10 Comparison of amplitude between v_b and $\Delta\mu$

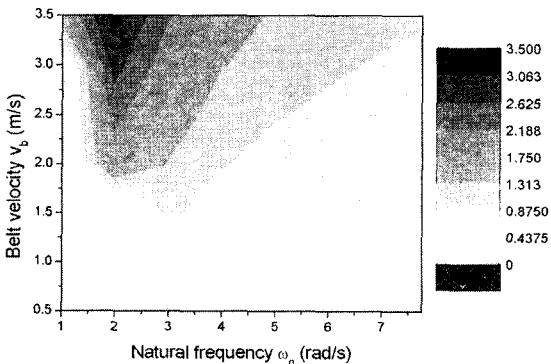


Fig. 11 Comparison of amplitude between v_b and ω_n

으로 이런 인자들 사이의 관계에 대해 살펴보기로 한다. Figs. 10, 11, 12는 최대 진폭에 영향을 미치는 인자들 사이의 경향을 나타낸 그래프이다. Fig. 10은 belt의 속도와 $\Delta\mu$ 사이의 관계에 대해 나타낸 그래프이고, belt의 속도가 $\Delta\mu$ 보다 더 큰 영향을 미치고 있는 것을 확인할 수 있다. Fig. 11은 belt의 속도와

고유진동수 사이의 관계를 나타낸 그래프이고, ω_n 이 약 2(rad/s)에서 belt속도에 민감한 것을 확인할 수 있다. 전체적으로는 높은 고유진동수로 갈수록 속도에 영향을 적게 받는 것을 알 수 있다. Fig. 12는 고유진동수와 $\Delta\mu$ 사이의 관계를 나타낸 그래프로 고유진동수가 $\Delta\mu$ 보다 최대진폭의 크기에 영향을 더 미치는 것을 확인할 수 있고, ω_n 이 약 2~3(rad/s)에서 최대진폭이 가장 큰 것을 확인할 수 있다.

이러한 결과에서 최대 진폭의 변화에는 마찰계수 함수의 형태보다 시스템 조건에 의해 더 큰 영향을 받는 것을 알 수 있고, Figs. 11, 12의 그래프에서 같은 belt 속도와 마찰계수 함수에서는 2~3(rad/s)이후로 진폭이 감소하는 것은 Fig. 9의 그래프와 같은 이유이고, 이전의 간격이 좁은 등고선은 부분은 진동은 있지만 진폭의 증가가 없이 시작부터 같은 진폭을 갖는 구간이다.

4. 결 론

이 연구에서는 자려진동 현상을 구현할 수 있는 마찰 모델링을 제시하였다. 이 방법은 현재 다물체 동역학 해석 프로그램의 방법과는 달리 a , μ_s , μ_k , v_s 의 변수를 이용하여 새로운 마찰계수 함수를 제안하였고, 제안한 마찰계수 함수가 어떻게 자려진동 현상을 구현할 수 있는가에 대한 논의와 마찰계수 함수의 형태가 변함에 따라 시스템의 응답 또한 변한다는 것을 확인하였다. 또한, 이 마찰계수 함수를 이용하여 제시한 예제를 통해 어떠한 시스템의 변수들이 자려진동 현상에 영향을 미치는가를 살펴보았다. 그 결과 마찰계수 함수에서 $\Delta\mu$ 와 belt의 속도 v_b , 고

유진동수 ω_n 은 자려진동에서 최대진폭과 최대진폭에 도달하는 시간에 모두 영향을 미치는 것을 확인하였고, 마찰계수 함수에서 a 는 최대진폭에 도달하는 시간에만 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. 또한, 최대진폭에 미치는 인자들의 관계에서는 $\Delta\mu$ 보다 ν_b , ω_n 이 최대진폭에 더 민감한 경향을 보이며, ω_n 과 ν_b 사이의 관계에서는 일정 범위의 ω_n 에서 ν_b 에 민감한 경향을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Park, J. H., Yoo, H. H. and Hwang, Y. H.,

2000, "Multibody Dynamic Analysis for Contacting Rigid Bodies", Trans. of the KSME(A), Vol. 24. No. 2, pp. 411~420.

(2) Park, J. H., Yoo, H. H. and Hwang, Y. H., 1999, "Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Using Partial Velocity Matrix", Trans. of the KSME(A), Vol. 23. No. 5, pp. 861~870.

(3) Denny, M., 2004, "Stick-slip Motion: and Important Example of Self-excited Oscillation", Eur. J. Phys. 25(2004) pp. 311~322.

(4) Li, Y., Feng, Z. C., 2004, "Bifurcation and Chaos in Friction-induced Vibration", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 9 (2004) pp. 633~647.

(5) RecurDyn manual (version6.2), 2005

(6) William T. Thomson, 1998, "Theory of Vibration with Applications", 4-th edition, Prentice Hall.