

## 접촉을 고려한 터보 압축기 로터의 안정성 해석

이승표<sup>+</sup>, 고병갑<sup>\*</sup>

(논문접수일 2007. 1. 15, 심사완료일 2007. 3. 19)

### Stability Analysis of Turbo Compressor Rotor Considering the Contact Phenomena

Seung-Pyo Lee<sup>+</sup>, Byung-Kab Koh<sup>\*</sup>

#### Abstract

It is necessary to analyze the contact phenomena in order to effectively design the machine components with contact surfaces. In general, the contact action is highly nonlinear and irreversible because we cannot predict the contact regions and conditions. Recently, the finite element method is used to analyze the contact problem. In this paper, the contact element method is applied to avoid the mesh refinement and iterative calculation of general contact algorithms. By use of it, the deformation and stress concentration of turbo compressor rotor are computed. It shown that the contact element is convenient analysis and the results are relatively accurate.

**Key Words** : Finite element method(유한 요소법), Contact element(접촉 요소), Turbo compressor rotor(터보 압축기 로터)

### 1. 서론

나사, 볼트와 너트 등의 기계요소들은 전체 구조물에 조립이 되며, 이때 각각의 요소들은 다른 요소들과 접촉에 의하여 결합되어진다. 이러한 접촉 현상은 접촉부의 응력 집중 현상을 발생시키며, 기계 부품의 마멸이나 파손의 직접적인 원인이 되므로 접촉면의 접촉력과 마찰력에 대한 정확한 평가는 합리적인 기계요소 설계를 위하여 반드시 선행되어야 한다. 이와 같이 기계요소의 설계에 있어서 접촉 문제는 상당히 중요한 부분을 차지하고 있으나, 다른 역학 문제와 달

리 접촉 현상은 극히 복잡하고 접촉 영역과 접촉 조건 등을 미리 알 수 없는 비선형 문제이고, 특히 마찰이 고려되는 경우에는 비가역 문제가 되기 때문에 일반적으로 해석 시 고려하지 않는다.

접촉 현상은 윤활이 잘되어 있어서 마찰력이 거의 작용하지 않는 비 마찰 접촉 현상과 일상적으로 볼 수 있는 마찰 접촉 현상의 두 가지로 나눌 수 있다. 비 마찰 접촉의 경우에 접촉이 일어나는 전 영역은 미끄럼 접촉 영역이 되나, 마찰 접촉의 경우에는 쿨롱의 마찰 법칙에 따라서 접촉 영역이 고찰 접촉 영역과 미끄럼 접촉 영역으로 분리된다<sup>(1)</sup>. 그러나

<sup>+</sup> 한양대학교 기계설계학과 대학원  
<sup>\*</sup> 교신저자, 인하공업전문대학 기계과 (bkkoh@inhate.ac.kr)  
주소: 402-752 인천시 남구 용현동 253

이러한 마찰 접촉 문제들은 접촉면의 조도와 온도, 역학 조건 및 화학적 조성에 따라서 그 특성이 달라지기 때문에 정확한 수학적 모델을 설정할 수 없으며 또한 모델이 설정된다 하더라도 이런 복잡한 현상을 모두 고려한 접촉 문제의 정확한 해석은 극히 어렵다<sup>(2)</sup>. 그러나 오늘날 계산 역학의 급속한 발전으로 접촉 문제의 해결은 큰 진전을 보게 되었다.

특히, 유한 요소법에 의하여 많은 접촉 문제가 해석되어지고 있다. 유한 요소법에 의한 접촉 문제의 해석 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 한 가지 방법은 접촉 표면에서의 접촉력과 변위에 관한 제한 조건을 변분식에 포함시켜 반복적으로 비선형방정식을 풀어가는 방법이고<sup>(3,4)</sup>, 다른 한 가지 방법은 최적화 방법으로 변분 부등식을 접촉 조건이 만족되도록 최소화시켜서 푸는 방법이다<sup>(5-7)</sup>. 이들 두 가지 방법은 모두 대규모 다물체 접촉이나 접촉면이 넓은 경우 수렴된 해를 얻기가 어렵고 또한 이를 얻으려면 유한 요소 모델링에 특별한 배려와 노력이 필요하다.

일반적으로 터보 압축기는 다른 압축기와 달리 소형, 경량화가 가능하여 최근 연구가 활발히 진행되고 있다<sup>(8,9)</sup>. 이러한 터보 압축기는 임펠러 설계 기술과 로터와 스테이터로 구성되는 고속 모터 설계 기술, 그리고 콘트롤러 기술 등으로 나눌 수 있다. 특히, 터보 압축기는 임펠러와 회전부를 고속으로 회전하도록 하기 위한 고속 모터의 설계가 중요한 문제이며, 이를 위하여 Axial gap type의 BLDC(Brushless direct current) 모터를 채용하고 있다. BLDC 모터는 로터 내부에 자석이 삽입되는 구조이며, 이 자석이 고속으로 회전할 때 유발하는 원심력에 의해서 로터의 파손 문제가 대두되고 있다.

본 논문에서는 접촉 문제를 보다 편리하고 정확하게 해석하기 위하여 접촉면에 접촉 요소를 구성하고 이를 이용하여 접촉 문제를 해석하려 한다. 접촉 요소는 재료의 불연속부에 생기는 응력 집중 현상과 역학적 특이성을 해석 하는데 매우 유효한 요소로 알려져 있는 계면 요소(Interface element)<sup>(10-12)</sup>를 이용하여 접촉 문제를 잘 구현할 수 있도록 구성되었다. 따라서 본 논문에서는 접촉 요소를 이용하여 터보 압축기 로터의 접촉 문제를 해석하려 한다.

## 2. 접촉 조건과 접촉 요소의 구성

### 2.1 접촉 조건

Fig. 1과 같이 물체 A가 외력을 받아 물체 B에 접촉하는 경우에 기하학적 구속 조건은 다음과 같다.

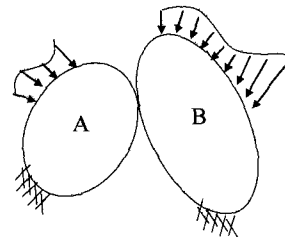


Fig. 1 Two bodies in contact

$$v_A - v_B \geq 0 \quad (1)$$

여기서,  $v_A, v_B$ 는 각각 물체의 법선 방향 변위를 나타내며 두 물체 사이에 침투가 일어나지 않아야 함을 나타낸다.

접촉력,  $p_n$ 은 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$p_n = 0 \quad \text{at} \quad v_A - v_B > 0 \quad (2)$$

$$p_n < 0 \quad \text{at} \quad v_A - v_B = 0 \quad (3)$$

마찰력이 작용하는 마찰 접촉의 경우에 쿨롱의 마찰 법칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_t - \mu p_n \leq 0 \quad (4)$$

여기서,  $p_t$ 는 접선방향 응력을,  $\mu$ 는 마찰계수를 나타내며 마찰계수는 접촉 표면의 성질에 따라서 결정되는 상수이다. 쿨롱의 마찰 법칙에 따라 마찰 접촉은 고착 접촉과 미끄럼 접촉으로 나누어지며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

고착 접촉;

$$u_A - u_B = 0 \quad \text{at} \quad p_t < \mu p_n \quad (5)$$

미끄럼 접촉;

$$u_A - u_B > 0 \quad \text{at} \quad p_t = \mu p_n \quad (6)$$

여기서,  $u_A, u_B$ 는 각각 접선 방향 변위를 나타낸다. 즉, 고착 접촉의 경우에 두 물체의 접선 방향 변위는 같다.

### 2.2 접촉 요소의 강성행렬

Fig. 2와 같은 4절점 평면 접촉 요소에서 연속 변위량  $q$ 는 절점 변위  $d$ 와 형상함수 행렬  $H$ 를 도입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q = Hd \quad (7)$$

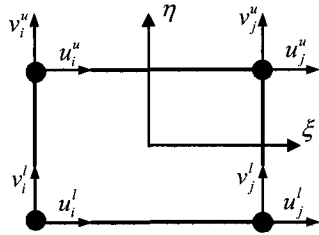


Fig. 2 The 4-node plane contact element

여기서,

$$q^T = [u^u \ v^u \ u^l \ v^l] \quad (8)$$

$$d^T = [u_i^u \ v_i^u \ u_i^l \ v_i^l \ u_j^u \ v_j^u \ u_j^l \ v_j^l]$$

$$H = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (9)$$

$$N_j = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (10)$$

이다. 위의 식에서 하 첨자 i, j는 각각 접촉 요소의 좌우 절점을, 상 첨자 u, l은 각각 접촉면의 윗면과 아랫면을 나타낸다. 요소의 접촉 응력  $t$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$t = D \Delta q \quad (11)$$

단,  $t = [p_n, p_t]^T$ 이고,  $D$ 는 강성도 행렬,  $\Delta q$ 는 상대 변위 벡터로서 다음과 같이 표현된다.

$$D = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Delta q = B d \quad (13)$$

$$B = L H \quad (14)$$

식 (12)에서  $k_n, k_t$ 는 각각 접촉 요소의 수직 강성과 접선 강성을 표시하고 식 (14)의  $L$ 은 다음 식으로 표현된다.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

한편, 접촉 요소의 내부 에너지는

$$U = \frac{1}{2} \int_A \Delta q^T t dA \quad (16)$$

로 표현되고 이 식에 식 (11), (13)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 접촉 요소의 강성 행렬을 구할 수 있다.

$$K_c = \int_A B^T D B dA \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 B(\xi)^T D B(\xi) l_c d\xi$$

### 3. 접촉 문제 해석 방법

Fig. 1과 같이 두 물체 A, B가 접촉하고 있을 때, 그 강성 행렬을 각각  $K_A, K_B$ 라고 표시하고 접촉 영역에서 접촉 요소의 강성행렬의 합을  $K_c$ 로 표현할 때 계 전체의 가상일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta d^T [(K_A + K_B + K_C)d + R - F] = 0 \quad (18)$$

따라서 평형 방정식은

$$(K_A + K_B + K_C)d = F - R \quad (19)$$

로 표현된다. 단,  $F$ 는 외력 벡터이고  $R$ 은 마찰력 벡터로서 미끄럼 접촉이 생기는 임의 절점에서의 마찰력  $f$ 는 다음과 같다.

$$f = \mu p_n A_s \quad (20)$$

식 (20)에서  $A_s$ 는 절점 상당 미끄럼 접촉 면적이다. 식 (19)의 해를 구하기 위하여 우선 접촉 영역이 결정되어야 식 (17)에 의하여  $K_c$ 를 구할 수 있으며 이  $K_c$ 가 결정되면 접촉 상태가 고착 접촉인지 미끄럼 접촉 상태인지 결정하여야 한다. 이러한 과정은 접촉 요소에 의한 반복계산으로 수렴 해를 구할 수 있다.

### 4. 수치 계산 및 검토

서론에서 언급한 바와 같이 원심력이 작용하는 터보 압축기 로터의 변형량 및 안정성을 상용 소프트웨어인 ANSYS를 사용하여 수치 해석하였다. 터보 압축기 로터는 2상과 3상용 로터로 크게 분류할 수 있으며, 각각에 대하여 계산하였다. 각각의 형상은 Fig. 3과 Fig. 4에 도시하였다. Fig. 3과 Fig. 4에서 알 수 있듯이 로터는 크게 디스크와 자석으로 구분되며 2상에서는 자석의 형상이 사다리꼴이며 12개가 삽입되고, 3상에서는 8개의 원형 자석이 삽입된다. 자석과 디스크의 결합방법은 압입이며, 이러한 압입에 의한 결합을 묘사

하기 위하여 접촉을 고려한 해석이 필요하다. Fig. 3과 Fig. 4에서 알 수 있듯이 각각의 로터는 대칭을 이루므로 대칭을 이루는 하나의 단위 형상만을 고려하여 해석을 수행하였고, 2차원 평면 응력상태로 가정하였다. Fig. 5와 Fig. 6은 각각 2상과 3상의 터보 압축기의 유한 요소 모델을 나타낸 것이다.

터보 압축기는 고속으로 회전하는 임펠러와 로터를 포함한 회전부로 구성되며, 터보 압축기의 원하는 성능을 내기 위하여 고속으로 회전하는 로터의 운전 회전수는 47,000 RPM으로 설계하였다. 따라서 터보 압축기 로터의 하중 조건으로 47,000RPM의 원심력을 가하였고, 마찰이 없는 접촉이라고 가정하였다. 디스크와 자석의 물성치는 Table 1에 나타내었다.

Fig. 7은 2상 로터의 변형량을 나타낸 그림이며, Fig. 8은 이때의 상당 응력(von Mises equivalent stress)을 나타낸다. Fig. 7과 Fig. 8에서 알 수 있듯이 2상 로터의 최대 변형량은 0.052mm이고, 최대 응력은 326MPa로서 디스크가 자

Table 1 Material properties

	Disk	Magnet
Young's modulus(GPa)	70	200
Poisson's ratio	0.33	0.33
Density(kg/m <sup>3</sup> )	2800	8000

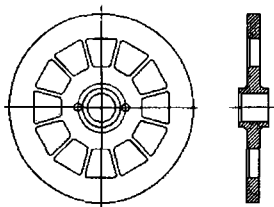


Fig. 3 2 Phase rotor of turbo compressor

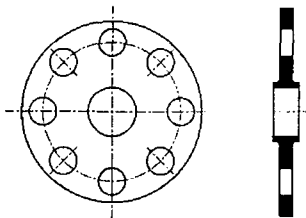


Fig. 4 3 Phase rotor of turbo compressor

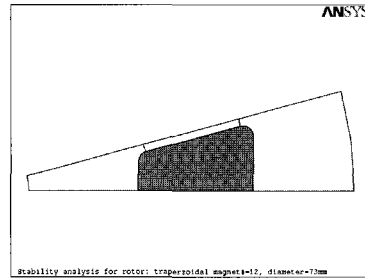


Fig. 5 Finite element model for 2 phase rotor

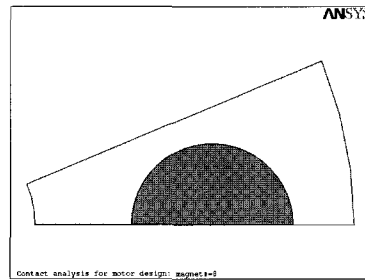


Fig. 6 Finite element model for 3 phase rotor

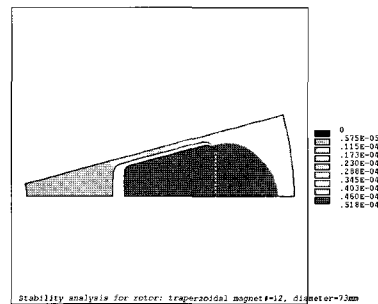


Fig. 7 Displacement of 2 phase rotor

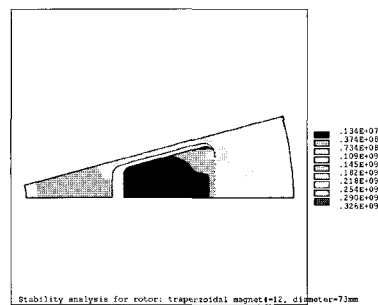


Fig. 8 von Mises equivalent stress of 2 phase rotor

석과 접촉하는 위치에서 발생한다. 디스크의 항복 응력이 505MPa이므로 2상 로터의 안전 계수는 1.55이며, 주어진 하중에 대하여 안전함을 알 수 있다. Fig. 9와 Fig. 10은 각각 3상 로터의 변형량과 상당 응력을 도시한 것이다. 그림으로부터 알 수 있듯이 3상 로터의 최대 변형량은 0.135mm이고, 최대 응력은 439MPa이며, 이때의 안전계수는 1.15이다. 2상 로터와 3상 로터에 대한 계산 결과를 비교해 보면 3상의 최대 응력이 2상에 비해서 상대적으로 크며, 또한 3상 로터의 안전계수가 2상에 비하여 상대적으로 적으므로 동일한 원심력이 작용할 때 그만큼 위험함을 알 수 있다. 따라서 위의 해석 결과로부터 원형 자석이 압입된 3상 로터보다 사다리꼴 자석이 형성된 2상 로터가 구조적으로 안전함을 예상할 수 있다.

그러나 2상의 경우는 디스크의 모서리 부분에 응력 집중이 존재하고 있으며, 이는 파손이나 마멸의 원인이 될 수 있다. 따라서 2상 터보 압축기의 경우에는 이를 충분히 고려한 설계가 되어야 한다.

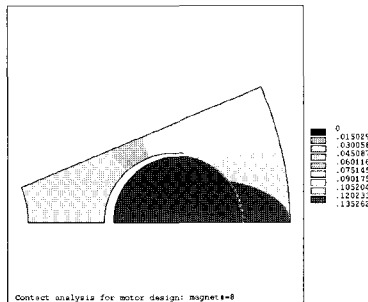


Fig. 9 Displacement of 3 phase rotor

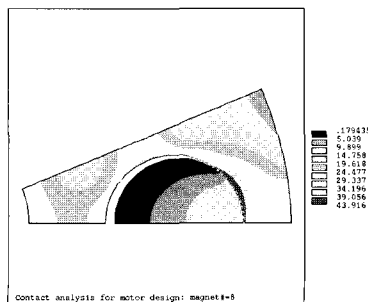


Fig. 10 von Mises equivalent stress of 3 phase rotor

## 5. 결론

비선형성과 비가역성이 존재하는 기계 구조물의 접촉문제를 해결하기 위하여 계면 요소를 이용한 접촉 요소를 적용하는 방법을 제시하였다. 본 논문에서 적용된 접촉 요소는 마찰이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우에 대하여 적용할 수 있으며, 기존의 방법들에 비하여 보다 용이하게 공학적으로 적절한 해를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 또한, 본 논문에서 제시한 접촉 요소를 이용하여 터보 압축기 로터의 변형량과 응력을 계산하였다. 계산 결과 3상 로터가 2상 로터에 비하여 상대적으로 위험함을 예측할 수 있으며 이러한 안정성 문제는 고속으로 회전하는 로터의 경우에 반드시 검증되어야 한다.

## 참고 문헌

- (1) Song, W. J., 1997, "Direct Analysis of Elastic Contact Problem by Finite Element Method," *Master's thesis of Hanyang Univ.*
- (2) Kang, S. Y. and Yim, J. K., 1998, "Finite Element Analysis of Mechanical Parts Using the Contact Element," *Journal of the Korean Society of Mechanical Engineering*, Vol. 22, No. 10, pp. 1894~1901.
- (3) Francavilla, A. and Zienkiewicz, O. C., 1975, "A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 913~924.
- (4) Sachdeva, T. D. and Ramakrishnan, C. V., 1981, "A Finite Element Solution for the Two-dimensional Elastic Contact Problem," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1259~1271.
- (5) Campos, L. T., Oden J. T. and Kikuchi, N., 1982, "A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatic," *Computational Methods of Applied Mechanics in Engineering*, Vol. 34, pp. 821~845.
- (6) Simons, J. W. and Bergan, P. G., 1986, "A Finite Element Formulation of Three dimensional Contact Problems with Slip and Friction," *Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 153~164.

- 
- (7) Zhu Changming and Jin Yongjie, 1992, "The Solution of Frictional Contact Problems using a Finite Element-Mathematical Programming Method," *Computers and Structures*, Vol. 52, pp. 149~155.
- (8) Kim, H. G., Yang, S. M., Noh, H. G., Nah, S. C. and Kang, Y. W., 2003, "A Study on the Transient Response in Turbo-Blower," *Proceedings of the Korean Society of Machine Tool Engineers Spring Conference*, pp. 137~142.
- (9) Kim, H. G., Nah, S. C., Kim, S. C., Kang, Y. W., Yang, G. E., Lee, H. K. and Choi, M. C., 2004, "A Study on the Dynamic Analysis in the Shaft of Turbe-Blower for Fuel Cell," *Transactions of the Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 13, No. 1, pp. 81~87.
- (10) Beer, G., 1985, "An Isoparametric Joint/ Interface Element for Finite Element Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 585~600.
- (11) Sharma, K. G. and Desai, C. S., 1992, "Analysis and Implementation of Thin-Layer Element for Interface and Joints," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, pp. 2442~2462.
- (12) Schelleken, J. C. J. and De Borst, R., 1993, "On the Numerical Integration of Interface Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 43~66.