한국동력기계공학회지 제11권 제1호 pp.92~97 2007년 2월

강성계수의 전달에 의한 평판 구조물의 구조해석
Structural Analysis of Plate Structures by Transfer of Stiffness Coefficient

최 명 수
Myung-Soo Choi

Key Words : Structural Analysis(구조해석), Finite Element Method(유한요소법), Plate Structure(평판구조물), Finite Element Transfer Stiffness Coefficient Method(유한요소 전달강성계수법)

Abstract : It is important to compute the structural analysis of plate structures in structural design. In this paper, the author uses the finite element transfer stiffness coefficient method (FE TSCM) for the structural analysis of plate structures. The FE TSCM is based on the concept of the successive transmission of the transfer stiffness coefficient method and the modeling technique of the finite element method (FEM). The algorithm for in plane structural analysis of a rectangular plate structure is formulated by using the FE TSCM. In order to confirm the validity of the FE TSCM for structural analysis of plate structures, two numerical examples for the in plane structural analysis of a plate with triangular elements and the bending structural analysis of a plate with rectangular elements are computed. The results of the FE TSCM are compared with those of the FEM on a personal computer.

1. 서 론

기계 장치나 구조물을 설계할 때 기본적인 작업 중의 하나가 구조해석이다. 현재 구조해석 알고리즘으로 널리 사용되는 방법이 유한요소법(finite element method)[1]이다. 유한요소법은 전산 프로그램의 운용이 편리하여 범용성 있는 구조해석 소프트웨어를 개발하기에는 우수하지만 많은 자유도를 갖는 구조물을 정확히 해석하기 위해서는 큰 기억용량을 갖는 고속의 컴퓨터가 필요하다[2),3)].

저자는 대규모 자유도를 갖는 구조물을 대상으로 퍼스널 컴퓨터 상에서 해석하는데 적합한 알고리즘의 개발에 관한 연구를 수행해 왔고, 근래에는 유한요소-전달강성계수법을 개발하여 그 유효성을 발표한 바 있다[4)~9)]. 이 방법은 기존의 유한요소법의 모델링 과정과 전달강성계수법의 강성계수의 축차 전달에 기본 개념을 두고 있다.

본 연구에서는 유한요소-전달강성계수법을 평판의 구조해석에 적용한다. 평판의 면내구조해석을 위한 알고리즘을 정식화하고 사각평판 구조물을 계산 모델로 선정하여 면내 구조해석 및 굽힘 구조해석을 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 수치 계산을 수행한 후 양 방법의 계산 결과를 비교·검토한다.

접수일 : 2007년 12월 29일, 채택확정 : 2007년 1월 20일
최명수(책임저자) : 전남대학교 해양경찰학과
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-3184

2. 평판 구조물의 면내 구조해석 알고리즘

2.1 모델링

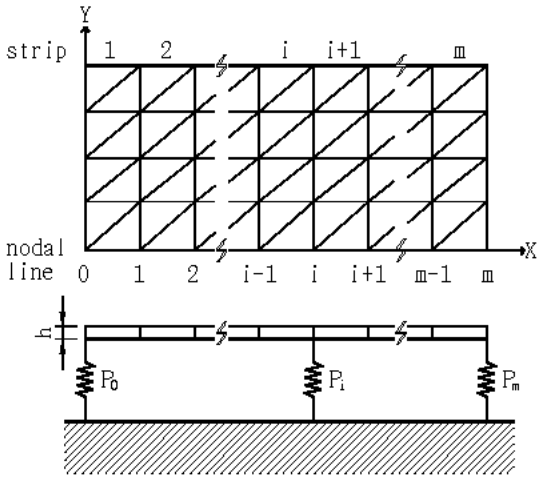

Fig. 1 Analytical model

평판은 Fig. 1과 같이 X축과 Y축에 평행한 선들과 대각선에 의해 다수의 삼각평판요소로 분할된다. 본 연구에서 전달의 방향을 X축으로 정할 경우, Y축에 평행한 분할선을 절선(nodal line)이라 부르고, 가장 좌측의 절선을 절선 0, 가장 우측의 절선을 절선 m이라 한다. 절선으로 나누어진 평판의 각 영역을 스트립(strip)이라 하면, Fig. 1의 평판은 좌측에서 우측까지 총 m개의 스트립으로 구성된다.

각 선들의 교차점을 절점이라 부르고, 각 절선은 총 n개의 절점을 갖는 것으로 한다. 외력은 절점에 작용하고, 각 절점은 기초로부터 평판을 지지하는 스프링요소가 부착되어 있는 것으로 모델링한다.

평판의 경계조건은 해당 절점의 기초지지 스프링으로 모델링한다. 예를 들어 한 절점이 Y축 방향으로 구속되어 있다면, Y축 방향으로 무한대의 스프링상수 값을 갖는 스프링이 그 절점과 기초 사이에 연결되어 있는 것으로 고려한다.

2.2 삼각평판요소와 스트립의 강성행렬

Fig. 2는 3개의 절점을 갖는 삼각평판요소이다. 각 절점은 2자유도를 가지고, 각 요소는 총 6자유도를 갖는다. 삼각평판요소의 각 절점 (j = 1, 2, 3)의 변위벡터 $\mathbf{u}_j^{(e)} = {}^t\{u,\ v\}_j^{(e)}$는 X축과 Y축 방향의 절점 변위 u와 v로 구성되고, 각 절점의 힘벡터 $\mathbf{f}_j^{(e)} = {}^t\{F_x,\ F_y\}_j^{(e)}$는 X축과 Y축 방향의 힘 F_x와 F_y로 구성된다.

탄성계수가 E, 프아송비가 ν, 두께가 h인 3절점을 갖는 삼각평판요소의 강성행렬은 유한요소해석을 통해 다음식과 같이 구할 수 있다[10].

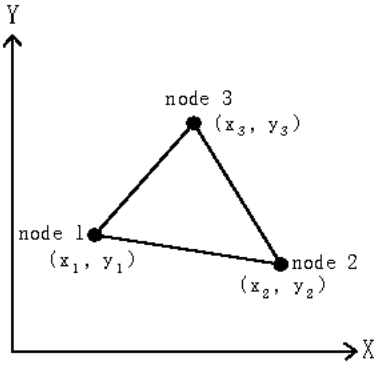

Fig. 2 A triangular element

$$\mathbf{k}^{(e)}\,\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} \tag{1}$$

상기 식에서 $\mathbf{u}^{(e)}$와 $\mathbf{f}^{(e)}$는 각각 요소를 둘러싼 절점의 변위벡터와 힘벡터이고, $\mathbf{k}^{(e)}$는 요소강성행렬로써 다음식과 같다.

$$\mathbf{u}^{(e)} = {}^t\left\{ {}^t\mathbf{u}_1^{(e)},\ {}^t\mathbf{u}_2^{(e)},\ {}^t\mathbf{u}_3^{(e)} \right\},$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = {}^t\left\{ {}^t\mathbf{f}_1^{(e)},\ {}^t\mathbf{f}_2^{(e)},\ {}^t\mathbf{f}_3^{(e)} \right\}, \tag{2}$$

$$\mathbf{k}^{(e)} = \alpha \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix}$$

여기서 t는 행렬의 전치(transpose)를 뜻하고, α는 $Eh/8A(1-\nu^2)$이고, 강성행렬의 요소는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 2a_1^2 + b_1^2(1-\nu),\\
k_{12} &= a_1 b_1 (1+\nu),\\
k_{13} &= 2a_1 a_2 + b_1 b_2 (1-\nu),\\
k_{14} &= 2a_1 b_2 \nu + a_2 b_1 (1-\nu),\\
k_{15} &= 2a_1 a_3 + b_1 b_3 (1-\nu),\\
k_{16} &= 2a_1 b_3 \nu + a_3 b_1 (1-\nu),\\
k_{22} &= 2b_1^2 + a_1^2 (1-\nu),\\
k_{23} &= 2a_2 b_1 \nu + a_1 a_2 (1-\nu),\\
k_{24} &= 2b_1 b_2 + a_1 a_2 (1-\nu),\\
k_{25} &= 2a_3 b_1 \nu + a_1 b_3 (1-\nu),\\
k_{26} &= 2b_1 b_3 + a_1 a_3 (1-\nu),\\
k_{33} &= 2a_2^2 + b_2^2 (1-\nu),\\
k_{34} &= a_2 b_2 (1+\nu),\\
k_{35} &= 2a_2 a_3 + b_2 b_3 (1-\nu),\\
k_{36} &= 2a_2 b_3 \nu + a_3 b_2 (1-\nu),\\
k_{44} &= 2b_2^2 + a_2^2 (1-\nu),\\
k_{45} &= 2a_3 b_2 \nu + a_2 b_3 (1-\nu),\\
k_{46} &= 2b_2 b_3 + a_2 a_3 (1-\nu),\\
k_{55} &= 2a_3^2 + b_3^2 (1-\nu),\\
k_{56} &= a_3 b_3 (1+\nu),\\
k_{66} &= 2b_3^2 + a_3^2 (1-\nu)
\end{aligned} \tag{3}$$

삼각평판요소를 Y축 방향으로 조립하면 스트립을 만들 수 있다. 따라서 유한요소해석을 통해 3절점 삼각평판요소의 강성행렬 $\mathbf{k}^{(e)}$를 유한요소해석의 조립과정을 통하여 임의의 i번째 스트립의 강성행렬과 그 부분행렬(sub-matrix) $\tilde{\boldsymbol{A}}_i, \tilde{\boldsymbol{B}}_i, \tilde{\boldsymbol{C}}_i, \tilde{\boldsymbol{D}}_i$를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_i^R \\ \tilde{\mathbf{F}}_i^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{B}}_i \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_i^R \\ \tilde{\mathbf{U}}_i^L \end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_i^{L,R} &= {}^t\{\ \tilde{\mathbf{u}}_1,\ \tilde{\mathbf{u}}_2,\ \cdots,\ \tilde{\mathbf{u}}_n\}_i^{L,R}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_i^{L,R} &= {}^t\{\ \tilde{\mathbf{f}}_1,\ \tilde{\mathbf{f}}_2,\ \cdots,\ \tilde{\mathbf{f}}_n\}_i^{L,R} \end{aligned} \tag{5}$$

이고, 상첨자 L과 R은 스트립의 좌측과 우측을 뜻한다.

2.3 필드-포인트 전달식

절선 i-1의 우측과 절선 i의 좌측의 힘벡터($\mathbf{F}_{i-1}$, $\overline{\mathbf{F}}_i$)와 변위벡터($\mathbf{U}_{i-1}$, $\overline{\mathbf{U}}_i$) 사이의 관계는 식 (4)로부터 다음식과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_i \\ \mathbf{F}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}}_i \\ \mathbf{U}_{i-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

여기서

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{F}}_i = \tilde{\mathbf{F}}_i^R,\ \mathbf{F}_{i-1} = -\tilde{\mathbf{F}}_i^L, \\ &\overline{\boldsymbol{U}}_i = \tilde{\boldsymbol{U}}_i^R,\ \boldsymbol{U}_{i-1} = \tilde{\boldsymbol{U}}_i^L, \\ &\boldsymbol{A}_i = \tilde{\boldsymbol{A}}_i,\ \boldsymbol{B}_i = \tilde{\boldsymbol{B}}_i, \\ &\boldsymbol{C}_i = -\tilde{\boldsymbol{C}}_i,\ \boldsymbol{D}_i = -\tilde{\boldsymbol{D}}_i \end{aligned} \tag{7}$$

이고, 하첨자 i 는 절선 i 또는 i번째 스트립에 관한 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 '—'를 붙인 것은 절선 좌측의 상태량, 붙이지 않은 것은 절선 우측의 상태량을 나타낸다.

절선 i 선상의 절점 j에 외력 (q_{xj}, q_{yj})과 기초지지 스프링 (k_{xj}, k_{yj})이 존재하면, 절선 i에서 힘의 평형식은 다음식과 같다.

$$\mathbf{F}_i = \overline{\mathbf{F}}_i + \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{Q}_i \tag{8}$$

여기서 대각행렬인 기초지지 강성행렬 $\mathbf{K}_i$와 외력벡터 $\mathbf{Q}_i$는

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \mathrm{diag}(k_{x1}, k_{y1}, \cdots, k_{xn}, k_{yn}) \\ \mathbf{Q}_i &= {}^t\{\ q_{x1}, q_{y1}, \cdots, q_{xn}, q_{yn}\} \end{aligned} \tag{9}$$

이다.

절선 i의 우측에서 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 절선강성계수행렬($\mathbf{S}_i$)과 힘보정벡터($\mathbf{E}_i$)를 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{E}_i \tag{10}$$

식 (6), (8) 및 식 (10)으로부터 다음식과 같은 절선강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_i, \\ \mathbf{E}_i &= -\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_{i-1} - \mathbf{Q}_i \end{aligned} \tag{11}$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i,\quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{D}_i \tag{12}$$

이다.

2.4 경계조건 처리 및 변위벡터의 계산

좌단의 경계조건을 절선 0의 기초지지 스프링으로 모델링하면 절선 0 좌측의 힘벡터 $\overline{\mathbf{F}}_0$는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (8)과 (10)의 i에 0을 대입한 식으로부터 절선 0 우측의 강성계수행렬 $\mathbf{S}_0$와 힘보정벡터 $\mathbf{E}_0$를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_0,\quad \mathbf{E}_0 = -\mathbf{Q}_0 \tag{13}$$

따라서 식 (13)을 시작으로, 식 (11)의 i에 1, 2, …, m을 순차적으로 대입하면, 최종적으로 우단(끝단)인 절선 m 우측의 강성계수행렬 $\mathbf{S}_m$과 힘보정

벡터 $\mathbf{E}_m$을 계산할 수 있다.

우단에서도 경계조건을 절선 m의 기초지지 스프링으로 모델링하면 절선 m에서 $\mathbf{F}_m = \mathbf{0}$가 된다. 따라서 식 (10)의 i에 m을 대입한 식으로부터 절선 m 우측의 변위벡터를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{U}_m = -\mathbf{S}_m^{-1}\mathbf{E}_m \tag{14}$$

절선 좌우측의 변위벡터의 연속조건($\mathbf{U}_i = \overline{\mathbf{U}}_i$)과 식 (4)와 식(10)으로부터 다음 식을 유도할 수 있는데

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{V}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{G}_i^{-1}\mathbf{E}_{i-1} \tag{15}$$

이 식으로부터 절선 i의 변위벡터를 이용하여 절선 i-1의 변위벡터를 구할 수 있다.

따라서 평판 각 절점의 변위벡터는 식 (14)로부터 평판 우단의 변위벡터를 계산한 후, 식 (15)로부터 절선 m-1에서 절선 0까지 모든 절점의 변위벡터를 순차적으로 계산할 수 있다.

3. 수치계산

3.1 평판의 면내 구조해석

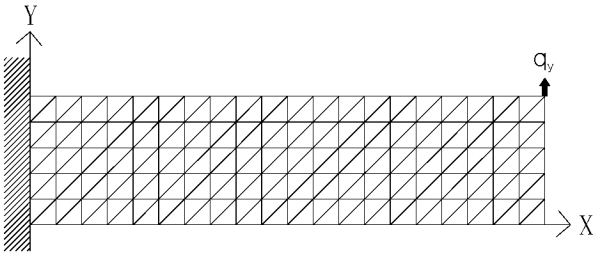

Fig. 3 Computational model Ⅰ with 20×10 mesh

Fig. 3의 수치계산 모델Ⅰ은 가로 및 세로방향의 길이가 각각 4 m, 1 m이고, 두께가 10 mm, 종탄성계수가 206 GPa, 프아송비가 0.3인 직사각형 평판구조물이다. 경계조건은 평판의 좌단이 고정이고, 나머지 부분은 모두 자유이다. 평판의 한 쪽 모서리에서 $q_y = 10^5$ N의 외력이 작용할 때 각 절점의 변위를 퍼스널 컴퓨터(CPU: Pentium 1.86 GHz, Memory: 496 MByte)상에서 유한요소법(FEM)과 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 평판 구조물의 각 절점의 변위를 각각 계산하였다.

Table 1은 평판을 8×4, 12×6, 20×10 등으로 분할하여 힘의 작용점인 평판 모서리의 X축과 Y축 방향의 변위를 계산한 결과이다. 평판을 다양한 분할수로 분할한 후, 유한요소법과 유한요소전달강성계수법으로 계산한 결과는 서로 완전히 일치하였다. 그리고 처짐량은 평판의 분할수에 따라 값이 조금씩 변하였는데, 이는 분할수가 큰 쪽으로 값이 수렴하고 있음을 확인할 수 있었다. 유한요소법에서는 200×100으로 모델링한 평판구조물에 대해서는 메모리 부족으로 계산할 수 없었다.

Table 1 Displacement of model Ⅰ (unit : mm)

Mesh	FE-TSCM		FEM	
	X	Y	X	Y
8×4	1.2995	7.0895	1.2995	7.0895
12×6	1.6601	9.3938	1.6601	9.3938
20×10	2.0218	11.355	2.0218	11.355
40×20	2.2268	12.485	2.2268	12.485
60×30	2.2701	12.725	2.2701	12.725
80×40	2.2858	12.812	2.2858	12.812
200×100	2.3033	12.911	-----	-----

Fig. 4는 다양한 분할수에 따라 계산에 소요된 시간의 비를 나타낸다. Fig. 4의 가로축은 평판의 모델링에 사용된 스트립의 수(m)를 뜻하고, 세로축은 평판의 분할수를 20×10으로 하여 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간을 1로 두고 양 방법의 계산시간을 비교한 것이다. 그 결과 유한요소-전달영향계수법이

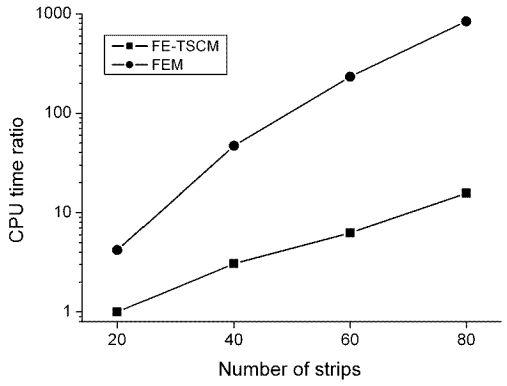

Fig. 4 Comparison of CPU time of model Ⅰ

유한요소법보다 계산 시간 면에서 우수하며, 특히 요소 분할 수가 커질수록 그 차이가 더욱 커짐을 확인할 수 있었다.

3.2 평판의 굽힘 구조해석

Fig. 5의 수치계산 모델Ⅱ는 가로 및 세로방향의 평판의 길이가 모두 1 m이고, 두께가 5 mm, 종탄성계수가 206 GPa, 프아송비가 0.3인 정사각형 평판이다. 경계조건은 평판의 모서리 부분과 모서리 사이의 중간점에서 Z축방향의 변위가 구속되고, 2000 N의 외력이 평판의 중앙에서 Z축 방향으로 작용한다. 계산모델을 4×4로 분할할 때의 형상이 Fig. 5이다. 유한요소-전달강성계수법에서는 구속점을 10^{20} N/m의 스프링상수를 갖는 기초지지 스프링으로 평판을 지지하는 것으로 모델링한다.

평판을 2×2, 4×4, 6×6 등으로 분할하여 퍼스널 컴퓨터 상에서 유한요소법(FEM)과 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 평판 구조물의 처짐량을 계산한 결과, 각각의 분할수에서 양 방법의 계산 결과가 완전히 일치하였다. 그러나 처짐량은 평판의 분할수에 따라 값이 조금씩 변하는데, 분할수가 큰 쪽으로 값이 수렴하고 있음을 확인할 수 있었다. Table 2는 각각의 분할수에 따른 힘의 작용점인 판의 중앙에서의 처짐량을 계산한 결과이다. 유한요소법에서는 100×100으로 모델링한 평판구조물에 대해서는 메모리 부족으로 계산할 수 없었다.

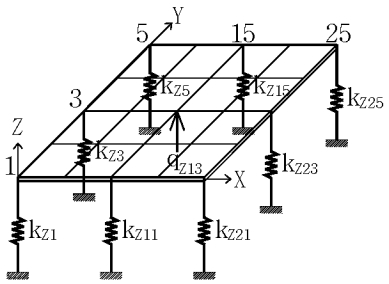

Fig. 5 Computational model Ⅱ with 4×4 mesh

Table 2 Deflection of model Ⅱ (unit : mm)

Mesh	FE-TSCM	FEM
2×2	11.797	11.797
4×4	11.092	11.092
6×6	10.837	10.837
8×8	10.746	10.746
10×10	10.703	10.703
20×20	10.641	10.641
40×40	10.624	10.624
100×100	10.618	-----

Fig. 6는 40×40으로 분할하여 유한요소-전달강성계수법으로 계산한 평판의 처짐 형상을 나타낸다.

Fig. 7은 분할수에 따라 계산에 소요된 시간의 비를 나타낸다. Fig. 7의 가로축은 평판의 모델링에 사용된 스트립의 수를 뜻하고, 세로축은 평판의 분할수를 10×10으로 하여 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간을 1로 두고 양 방법의 계산시간을 비교한 것이다. 그 결과 유한요소-전달영향계수법이 유한요소법보다 계산 시간 면에서 우수하며, 특히 요소 분할 수가 커질수록 그 차이가 더욱 커짐을 확인할 수 있었다.

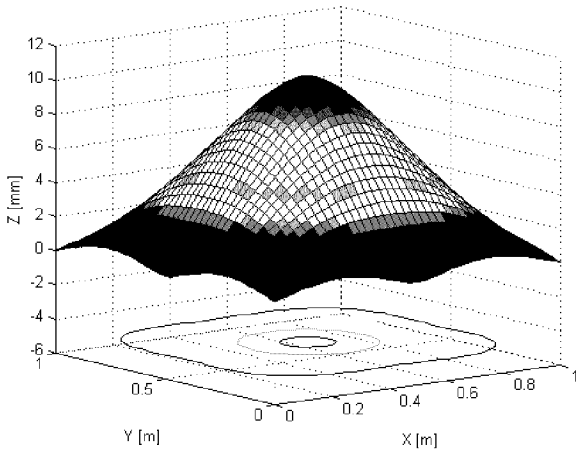

Fig. 6 Deflection of model Ⅱ

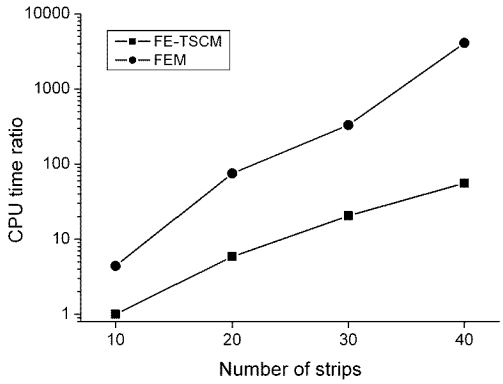

Fig. 7 Comparison of CPU time of model Ⅱ

4. 결 론

유한요소해석의 모델링 과정과 강성계수의 축차전달에 기본 개념을 두고 있는 전달강성계수법을 조합한 유한요소-전달강성계수법으로 사각평판 구조물의 면내 구조해석 알고리즘을 정식화하였다. 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 사각평판 구조물의 면내 구조해석 및 굽힘 구조해석을 퍼스

널 컴퓨터 상에서 수행한 결과, 평판의 분할수를 증가할수록 정확한 계산 결과를 구할 수 있었다. 이때 유한요소법은 평판 구조물의 모델링에 사용된 분할수를 증가할수록 계산 시간이 급격히 증가함을 확인할 수 있었고, 특정 분할수 이상에서는 메모리 부족으로 퍼스널 컴퓨터 상에서는 계산이 곤란하였다. 반면에 유한요소-전달강성계수법은 계산 시간이나 계산에 사용된 컴퓨터 메모리 이용 측면에서 유한요소법보다 우수함을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 전남대학교 2005년도 학술연구과제지원비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. K. J. Bathe, 1996, "Finite Element Procedures", Prentice-hall, London.
2. N. S. Sehmi, 1989, "Large Order Structural Eigenanalysis techniques Algorithm for Finite Element Systems", Ellis Horwood, New York, pp. 9~13.
3. M. A. Dokainish, 1972, "A New Approach for Plate Vibration : Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique", Trans. ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, No. 2, pp. 526~530.
4. D. H. Moon and M. S. Choi, 2000, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient", J. of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725~736.
5. 최명수, 문덕홍, 김성진, 2002, "유한요소-전달강성계수법을 이용한 골조 구조물의 과도응답해석", 한국소음진동공학회논문집, 제12권, 제9호, pp. 674~684.
6. M. S. Choi, 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805~815.
7. 최명수, 2003, "유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판 구조물의 강제진동해석", 한국소음진동공학회지, 제13권, 제2호, pp. 99~107.
8. 최명수, 문덕홍, 정하용, 2003, "강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제16권, 제1호, pp. 9~18.
9. Deok-Hong Moon and Myung-Soo Choi, 2003, "Development of Sensitivity Analysis Algorithm for a Straight-Line Beam Structure by the Transfer Stiffness Coefficient Method", JSME International Journal (C) , Vol. 46, No. 1, pp. 138~144.
10. Maurice Petyt, 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, pp. 143~149.